

力学中链条下落问题的探讨*

林正喆 陈熙

(西安电子科技大学物理学院 陕西 西安 710071)

(收稿日期:2022-08-17)

摘要:在经典力学教学中,链条运动问题是连续变形体动力学中的典型问题.对此类问题的课堂教学常见示例进行了研究,指出理论分析与实际情况的不符之处,并运用力学原理进行分析,提出与事实更加接近的理论模型.研究结论可作为新内容在力学课堂教学中进行介绍,使学生深入认识力学基本原理,提高运用力学原理解决实际问题的能力.

关键词:连续变形体;动量定理;角动量定理

1 引言

在经典力学课程中,连续变形体和变质量系统的动力学是一类典型的问题.这类问题对质点系动量定理的运用来说是很好的例子,是力学教科书中的常见基础示例^[1-3].在此类问题中,柔软均质链条在重力作用下下落问题是个常见示例.该例子对掌握分析变质量系统的方法是非常有用的.在通常的教学中,我们假设柔软链条下落的各个部分不存在相互作用.然而,该假设存在一定问题.如图1所示,线密度为 λ 、长为 L 的柔软均质链条在重力作用下下落.取触地点为坐标原点 O ,竖直向上建立 y 轴.设链条未下落部分长度为 y ,地面对链条作用力为 f .对 y 轴正方向来说,整个系统的动量为

$$p = \lambda y \dot{y} \quad (1)$$

常规分析方法以下落各部分不存在相互作用这个假设为基础,认为下落部分为自由落体运动,下落加速度即为重力加速度.则有 $\ddot{y} = -g$,以及 $\dot{y} = -\sqrt{2g(L-y)}$.对系统应用动量定理得

$$f - \lambda g L = \frac{dp}{dt} = \frac{d(\lambda y \dot{y})}{dt} = \lambda (y \ddot{y} + \dot{y}^2) = \lambda [-gy + 2g(L-y)] = \lambda g(2L - 3y) \quad (2)$$

由此得

$$f = 3\lambda g(L - y)$$

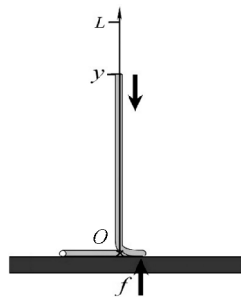
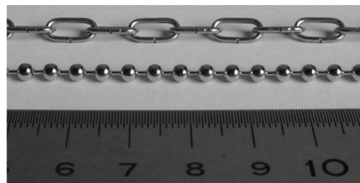


图1 柔软均质链条在重力作用下自由下落

然而,一些现代实验表明,柔软链条的下落运动规律与常规理论分析差异甚大^[4-7].这些实验涵盖了力学教学中所涉及变形物体运动的一些情形,包括链条自由下落、链条沿桌面边缘下落、链条沿滑轮下落等.图2展示了文献[4]用高速摄像拍摄到的链条自由落体过程,测得下落加速度超过了重力加速度.对此类现象,我们需在理论上进一步修正原有的模型,以便更准确地描写其运动过程.

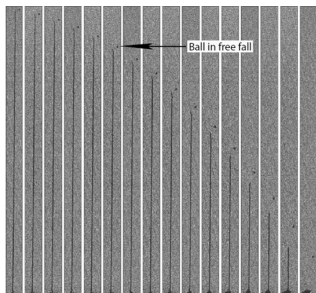


(a) 所用链条及标尺

* 2022年西安电子科技大学招生培养综合改革研究项目“政府协同下的西安高校联合省外招生探索”,项目编号:ZS322019;陕西省自然科学基金基础研究计划,项目编号:2021JQ-185.

作者简介:林正喆(1984-),男,博士,副教授,主要从事大学物理教学和凝聚态物理研究工作.

通讯作者:陈熙(1987-),女,博士,讲师,主要从事大学物理教学和凝聚态物理研究工作.



(b) 拍摄到的下落过程

图2 文献[4]的实验

2 问题分析

针对实验与常规理论分析结果不符的情况,我们作出以下原因分析.首先,排除空气阻力因素.因为实验测得下落加速度超过重力加速度 g .若空气阻力产生影响,将使下落加速度小于 g .其次,考虑链条中张力的影响.将链条竖直地提起,链条中可能存在一定张力.下落可能造成张力释放并影响加速度.链条的弹性模量 k 定义为

$$\Gamma = k \frac{\Delta L}{L}$$

其中 L 为链条原长, ΔL 为伸长量, Γ 为张力.实验所用链条接近刚性, $k \approx 5.5 \times 10^3$ N,质量线密度 $\lambda \approx 15$ g/m.链条中机械波传播速度

$$c = \sqrt{\frac{k}{\lambda}} \approx 6 \times 10^2 \text{ m/s}$$

故形变释放时,相互作用从链条一端传递到另一端只需几ms时间,远远小于链条下落时间.而且初始伸长量 $\Delta L = \lambda g \frac{L^2}{2k}$.1 m长的链条,其初始伸长量仅约 $13 \mu\text{m}$,并不足以造成可观的实验效应.第三种可能的原因是链条落地点的弯曲.链条即将落地的部分,由竖直下落变为平躺状态.此处运动状态的微妙改变,可能影响下落加速度,详见以下分析.

3 新的理论模型

笔者建立的模型如图3所示.设线密度为 λ 、总长为 L 的柔软链条横截面半径为 r .触地处形成 90° 弯曲.将弯曲部分近似为半径为 R 的圆弧,则弯曲开始处到地面垂直距离为 $R+r$.与图1相似,取下落部分正对地面 O 点为坐标原点,竖直向上建立 y 轴.设链条未下落部分长度为 y .将地面对链条作用力分为两部分,其中 f_1 为瞬时下落部分受到的冲击

力, $f_2 = \lambda g(L-y)$ 为已落地部分(长度 $L-y$)受到的支持力.实际情况下 r 和 R 很小.将 R 忽略不计,系统相对于 y 轴正方向的总动量仍如式(1).按动量定理得

$$f_1 + f_2 - \lambda g L = f_1 - \lambda g y = \frac{dp}{dt} = \lambda (y\ddot{y} + \dot{y}^2) \quad (3)$$

即

$$f_1 = \lambda (g y + y\ddot{y} + \dot{y}^2) \quad (4)$$

在常规方法中,假设 $\ddot{y} = -g$,则有

$$\dot{y} = -\sqrt{2g(L-y)}$$

即可计算出 f_1 .若不作此假设,则再需一个方程方可求解.为考虑弯曲部分造成的影响,我们结合角动量定理进行求解.

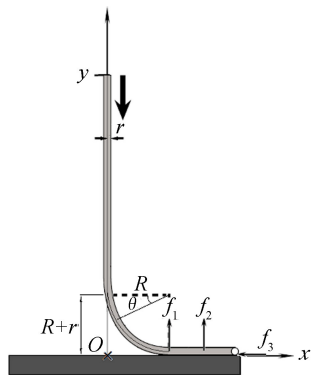


图3 一种新的下落链条模型

考虑系统绕 O 点的角动量.假设链条很细,横截面半径 r 很小.正在竖直下落的部分,朝着 O 点运动.此部分对 O 点的角动量可忽略.如图3所示,弯曲部分上某点坐标为

$$x = R(1 - \cos \theta) \quad y = r + R(1 - \sin \theta)$$

弧元长度为 $Rd\theta$,下落速度为

$$v = -\dot{y}$$

角度 θ 处的速度矢量为

$$\boldsymbol{v} = (v \sin \theta, -v \cos \theta)$$

则弯曲部分的角动量大小表示为

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lambda R d\theta \cdot v(x \cos \theta + y \sin \theta) = \lambda R v \left[\left(2 - \frac{\pi}{2} \right) R + r \right] \quad (5)$$

弯曲部分角动量的改变包括两部分.速度的增加使角动量 L 增大.另一方面,链条上的质元运动到弯曲部分末端时,速度骤降为零. dt 时间内末端发生“猝灭”的角动量大小为

$$\lambda v dt \cdot \omega r = \lambda v^2 r dt$$

故体系总角动量的变化率为

$$\frac{dL}{dt} = \lambda R \frac{dv}{dt} \left[\left(2 - \frac{\pi}{2} \right) R + r \right] - \lambda v^2 r \quad (6)$$

冲击力 f_1 造成体系角动量变化的力矩 $-f_1 R$. 支持力 f_2 的力矩与地面支持力力矩相抵消. 因

$$\dot{y} = -v \quad \ddot{y} = -\frac{dv}{dt}$$

按角动量定理有

$$f_1 R = \lambda R \ddot{y} \left[\left(2 - \frac{\pi}{2} \right) R + r \right] + \lambda \dot{y}^2 r \quad (7)$$

即

$$f_1 = \lambda \ddot{y} \left[\left(2 - \frac{\pi}{2} \right) R + r \right] + \lambda \frac{r}{R} \dot{y}^2 \quad (8)$$

需要指出的是, 系统质元速度在弯曲部分末端突然降为零. 系统水平方向动量减少, 必然受到水平向左的外力 f_3 . 该力应由桌面提供, 其作用线位于链条与桌面接触处, 对 O 点的力矩为零. 式(8) 结合动量定理得到的式(4), 有

$$gy + y\ddot{y} + \dot{y}^2 = \ddot{y} \left[\left(2 - \frac{\pi}{2} \right) R + r \right] + \frac{r}{R} \dot{y}^2 \quad (9)$$

考虑到在大多数时间内 $y \gg R, y \gg r$, 略去

$\left(2 - \frac{\pi}{2} \right) R + r$ 项则有

$$y\ddot{y} + \left(1 - \frac{r}{R} \right) \dot{y}^2 + gy = 0 \quad (10)$$

式(10) 为系统的运动方程. 在链条非常柔软、半径非常小的理想情况下, $1 - \frac{r}{R} = 0$. 方程变为 $\ddot{y} = -g$, 即常规理论模型的解. 实际情况下, 由于链条弯曲部分总存在一定的半径 R , $1 - \frac{r}{R}$ 项往往不能近似为零, 常规解不成立. 对此, 我们作出以下数值模拟.

4 数值模拟

为了更好地求解式(10), 首先对其进行无量纲化处理. 设

$$T = \sqrt{\frac{2L}{g}} \quad Y = \frac{y}{L} \quad \tau = \frac{t}{T}$$

式(10) 可化为

$$Y \frac{d^2 Y}{d\tau^2} + \left(1 - \frac{r}{R} \right) \left(\frac{dY}{d\tau} \right)^2 + 2Y = 0 \quad (11)$$

为了进行数值计算, 将式(11) 转化为一阶常微分方程组. 令 $Z = \frac{dY}{d\tau}$, 得

$$\begin{cases} \frac{dY}{d\tau} = Z \\ \frac{dZ}{d\tau} = -\left(1 - \frac{r}{R} \right) \frac{Z^2}{Y} - 2 \end{cases} \quad (12)$$

链条未下落长度为 $y = LY$, 下落速度为

$$v = -\sqrt{\frac{gL}{2}} Z$$

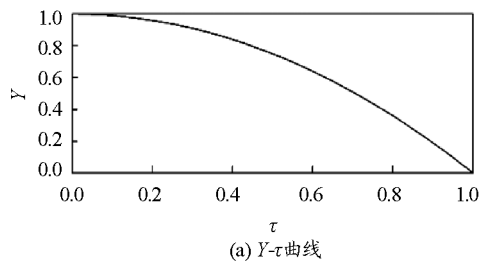
下落加速度为

$$a = -\frac{g}{2} \frac{dZ}{d\tau}$$

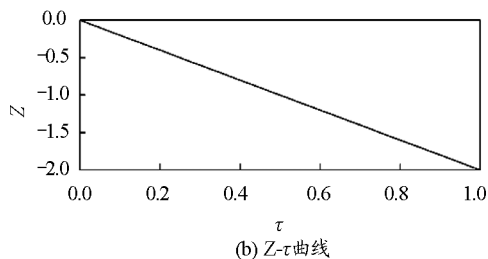
取初值 $Y = 1, Z = 0$, 式(12) 采用四阶-五阶自适应步长 Runge-Kutta 方法求解. 下落过程中地面受力为

$$\begin{aligned} f &= f_1 + f_2 = \\ \lambda(gL + y\ddot{y} + \dot{y}^2) &= \lambda \left[\frac{r}{R} \dot{y}^2 + g(L - y) \right] = \\ \lambda gL \left(1 - Y + \frac{r}{2R} Z^2 \right) \end{aligned} \quad (13)$$

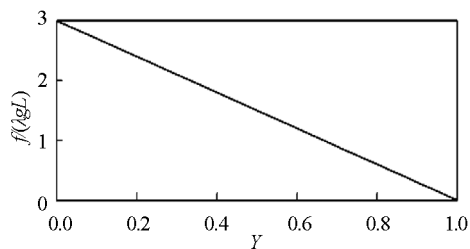
为了检验模型的可靠性, 我们首先对 $\frac{r}{R} = 0$ 的情况进行数值模拟. 所得结果等同于常规模型的结论, 如图4所示.



(a) Y - τ 曲线



(b) Z - τ 曲线



(c) f - Y 曲线 (f 以链条重量 λgL 为单位)

图4 $\frac{r}{R} = 0$ 的数值模拟结果

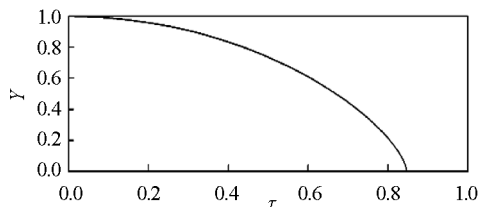
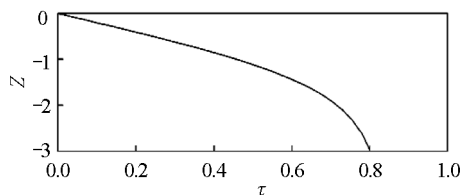
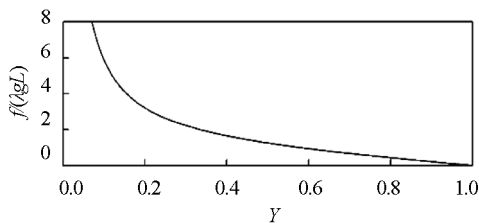
图4(a)表示 $\frac{r}{R} = 0$ 时下落过程的 Y 随 τ 变化曲线. 该过程为理想自由落体, $Y-\tau$ 曲线为抛物线.

从图4(b)的 $Z-\tau$ 曲线可以看到,下落过程为匀加速运动,加速度为 $a = -\frac{g}{2} \frac{dZ}{d\tau} = -g$,即重力加速度.

图4(c)给出地面受力 f 与 Y 的关系,可以看出符合常规模型的 $f = 3\lambda g(L-y)$ 结果.

以上结果表明,对理想的柔软、横截面半径非常小的链条,新模型能够给出与常规模型相同的结果. 接下来,我们用新模型对非理想情况,即 $0 < 1 - \frac{r}{R} < 1$

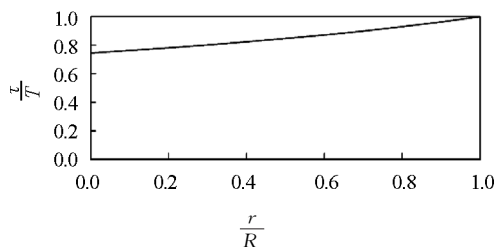
情况进行研究. 图5给出了 $\frac{r}{R} = 0.5$ 时的结果,其中图5(a)、(b)、(c)3幅图内容与图4一一对应.

(a) $Y-\tau$ 曲线(b) $Z-\tau$ 曲线(c) fY 曲线 (f 以链条重量 λgL 为单位)图5 $\frac{r}{R} = 0.5$ 的数值模拟结果

通过比较可以看到,图5(a)所示的下落过程 Y 随 τ 变化曲线近似为抛物线,但下落时间比 $\frac{r}{R} = 0$ 时更短. 从图5(b)可看出,前期下落过程近似为匀加速运动. 到过程后期,加速度增大. $\tau = 0 \sim 0.2$ 时, $a \approx -g$; $\tau = 0.2 \sim 0.5$ 时,加速度 a 由 $-g$ 逐渐增大到 $-2.9g$; $\tau > 0.5$ 时,加速度变得更大. 以上

结果印证了实验现象.

图6总结了不同 $\frac{r}{R}$ 时的下落总时间. 在各种不同的 $\frac{r}{R}$ 情况下,下落时间均比自由落体时间更短. 对极细的链条($r \rightarrow 0$),下落时间约为 $0.75T$. 即使对细链条,其触地部分的弯曲仍造成影响.

图6 下落总时间随 $\frac{r}{R}$ 的关系

5 模型的不足之处

在常规模型中,当链条完全落地(即 $Y = 0$ 瞬间)时, $f = 3\lambda gL$. 图5(c)给出了 $\frac{r}{R} = 0.5$ 时的地面受力 f 与未下落部分长度的关系. 可以看到,当 $Y \rightarrow 0$ 时, f 显著地超过 $3\lambda gL$. 文献[4]的实验也观测到了类似现象,在链条下落后期,其表观重量明显增大. 然而,我们的模型存在一点不足之处. 当 $Y < 0.2$ 时,所给出的 f 很大. $Y \rightarrow 0$ 时 f 趋于 ∞ . 这是不符合实际情况的. 本模型仍有待在今后的研究中进一步修正.

6 结束语

传统教学中某些惯用的理想模型或假设,其描述未必接近实际情况. 本文以力学中的链条问题为例,通过研究指出常用模型中的假设与实际不符之处,并提出更符合事实的模型. 本研究可在课堂教学中进行介绍,使学生深提高运用力学原理解决实际问题的能力.

参考文献

- [1] 管靖,梁绍荣,刘昌年,等. 普通物理学·第一分册·力学[M]. 3版. 北京:高等教育出版社,2005.
- [2] 漆安慎,杜婵英. 普通物理学教程·力学[M]. 3版. 北京:高等教育出版社,2012.
- [3] C. Kittel, A. C. Helmholtz. 伯克利物理学教程(SI版): 第1卷 力学[M]. 陈秉乾,译. 北京:机械工业出版社,2014.

(下转第30页)

- [3] 蒋芸,王亚芳,董爱国,等. 问题引导型物理实验自主学习模式的探究[J]. 实验室研究与探索,2017,36(8):237-239,283.
- [4] 李艳华. 地方本科院校向应用型院校转型形势下大学物理及大学物理实验课程教学改革研究[J]. 科学咨询(教育科研),2021(3):41-42.
- [5] 严超,杨占金,杨方源,等. 大学物理实验“课程思政”的探索与实践[J]. 实验室科学,2020,23(4):222-225.
- [6] 高景霞,常乐,刘斌,等. 应用型高校大学物理实验课程教学改革探讨[J]. 科技视界,2021(14):19-20.

Reform and Practice on Physical Experiment Teaching Guided by Applied Talents

LU Xiaocui MA Zenghong YANG Guangwu

(Tianjin Sino-German University of Applied Sciences, Tianjin 300350)

Abstract: Firstly, through the investigation and analysis of the current situation of college physics experiment course, this paper concludes four practical problems in physics experiment teaching. Secondly, according to the training requirements of applied talents, the structure of physics experiment teaching content is reconstructed with students as the center, diversified teaching methods are used to exercise students' scientific cognitive ability, innovative laboratories are used as the platform to stimulate students' interest in scientific and technological innovation, and demonstration instruments are used as the carrier to promote the effect of experimental teaching.

Key words: college physics experiment; applied talents; teaching Reform; demonstration instrument

(上接第26页)

- [4] E. Hamm, J. - C. Géminard. The weight of a falling chain, revisited [J]. *Am. J. Phys.*, 2010, 78(8):828-833.
- [5] M. G. Calkin, R. H. March. The dynamics of a falling chain: I [J]. *Am. J. Phys.*, 1989, 57(2):154-157.
- [6] W. Tomaszewski, P. Pieranski, J. - C. Géminard. The motion of a freely falling chain tip [J]. *Am. J. Phys.*, 2006, 74(9):776-783.
- [7] C. W. Wong, S. H. Youn, K. Yasui. The falling chain of Hopkins, Tait, Steele and Cayley [J]. *Eur. J. Phys.*, 2007, 28(3):385-400.

A Discussion on the Chain Falling Question in Mechanics

LIN Zhengzhe CHEN Xi

(School of Physics, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071)

Abstract: In the teaching of classical mechanics, the motion of chains is a typical problem about the dynamics of continuous deformation body. This paper studies the common examples of such problems in teaching, points out the inconsistencies between theoretical analysis and the actual situations, analyzes the questions by using mechanics principles, and brings a theoretical model that is closer to the facts. The research conclusion can be introduced as a new content in mechanics teaching, so that students can deeply understand the basic of mechanics and improve their ability to solve practical problems by using mechanics principles.

Key words: continuous deformation objects; momentum theorem; angular momentum theorem