对经典力学中的轨道角动量和自转角动量的探讨

林正喆，陈 熙
(西安电子科技大学 物理与光电工程学院，陕西 西安 710071)

摘要：角动量是力学中的重要概念.本文建立了经典力学中质点系的轨道角动量和自转角动量的概念，使经典力学的理论体系更加完备，并通过几个例子阐述其应用意义.在经典力学中引入轨道角动量和自转角动量的概念，能够使学生加深对角动量的理解.

关键词：经典力学；轨道角动量；自转角动量
中图分类号：O 313.2 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-0712(2022)--
【DOI】10.16854/j.cnki.1000-0712.210535

通常在量子力学教科书中对自旋角动量的规范的说法是：自旋角动量是量子力学中的一个新的自由度，没有经典对应[1-6]. 把自旋归结为经典的转动是不合适的.实际上，经典力学中存在轨道角动量和自转角动量的概念. 对具有几何形状的物体的空间运动，轨道角动量指的是其质心运动的角动量，自转角动量指的是其绕自身质心旋转的角动量.我们有必要在经典力学中建立两种角动量的严格理论，并对一些实际的体系进行研究.本文试图阐述经典力学中的轨道角动量和自转角动量的严格理论框架，并通过一些例子总结出完善的经典力学角动量理论.

1 经典力学中的轨道角动量和自转角动量

在力学中，先对单个质点的角动量进行定义，而后给出质点系的总角动量.在惯性系中，质点系相对于坐标原点 O 的总角动量为

$$\boldsymbol{L}=\sum_i \boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i \tag{1}$$

其中 m_i、$\boldsymbol{r}_i$、$\boldsymbol{v}_i$ 分别为第 i 个质点的质量、位置、速度.将各个质点的角动量相对于系统的质心进行分解(图 1).设质心的位置和速度分别为 $\boldsymbol{r}_C$、$\boldsymbol{v}_C$，将第 i 个质点的位置和速度分解为 $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{r}'_i$、$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}'_i$，则系统的总角动量分解为

$$\boldsymbol{L}=\sum_i(\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{r}'_i)\times m_i(\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}'_i)=\boldsymbol{r}_C\times M\boldsymbol{v}_C+\left(\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_i\right)\times\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{r}_C\times\sum_i m_i\boldsymbol{v}'_i+\sum_i \boldsymbol{r}'_i\times m_i\boldsymbol{v}'_i \tag{2}$$

这里 $M=\sum_i m_i$ 为系统的总质量. 对其中的第 2 项，由于系统的质心在自身质心参考系中的位置应为零，即 $\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_i/M=0$，也就是 $\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_i=0$. 对第 3 项，由于系统质心在质心系中的速度 $\sum_i m_i\boldsymbol{v}'_i/M=0$，则有 $\sum_i m_i\boldsymbol{v}'_i=0$. 综上所述，式(2)简化为

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}_C\times M\boldsymbol{v}_C+\sum_i \boldsymbol{r}'_i\times m_i\boldsymbol{v}'_i \tag{3}$$

其中第 1 项表示系统质心绕坐标原点运动的角动量，称作轨道角动量. 第 2 项为系统内各个质点相对于质心的角动量之和，与系统绕其质心的运动有关，称为自转角动量. 该式对惯性系中任意质点系的运动成立，可应用于刚体力学.该式给出了与量子力学中角动量类似的形式，将总角动量分解为轨道角动量与自转角动量的和.

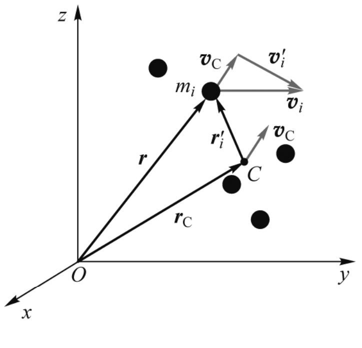

图 1 质点的位置和速度相对于质心坐标系的分解

收稿日期：2021-10-29；**修回日期**：2021-11-26
基金项目：西安电子科技大学物理与光电工程学院教改项目“物理教学中的新模型及理论方法探索”资助
作者简介：林正喆(1984—)，男，西安电子科技大学物理与光电工程学院副教授，博士，主要从事大学物理理论教学和凝聚态物理研究工作.

2　总角动量分解的应用意义

对刚体的一般运动，通过将体系的运动分解为质心的平动和绕质心的转动两部分进行分析. 设第 i 个质点受到的合外力为 $\boldsymbol{F}_i$，按质心运动定理有

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

对系统绕质心的转动，按质心系角动量定理有

$$\sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i = \frac{\mathrm{d}\left(\sum_i \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}'_i\right)}{\mathrm{d}t} \tag{5}$$

对于刚体，将式(5)中的绕质心角动量用转动惯量张量和角速度矢量表达之后，这两个式子构成可完备求解的方程组. 对系统的总角动量式(3)运用角动量定理则有

$$\begin{aligned}\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i &= \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{C}} \times M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} \times M\boldsymbol{v}_{\mathrm{C}} + \\ &\sum_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_i}{\mathrm{d}t} \times m_i \boldsymbol{v}'_i + \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'_i}{\mathrm{d}t} = \\ &\boldsymbol{r}_{\mathrm{C}} \times M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} + \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'_i}{\mathrm{d}t}\end{aligned} \tag{6}$$

相比之下，式(6)实际上是式(4)和(5)的综合. 式(6)左边可看作 $\sum_i \boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{F}_i + \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i$. 将式(4)两边左乘 $\boldsymbol{r}_C$ 再与式(5)相加即得式(6). 以上推导表明，质点系总角动量的演化方程在动力学求解中并未提供新的条件，但这并不意味着质点系的总角动量概念没有用处. 在对某些物理问题进行分析时，根据轨道角动量和自转角动量的物理概念可对问题进行进一步的探讨，加深对问题物理本质的认识. 以下列举数例.

3　轨道角动量和自转角动量在力学问题中的应用

3.1　重对称陀螺的运动

下面利用轨道角动量和自转角动量的概念，建立对重对称陀螺运动的一种描述方法. 如图 2 所示，质量为 m，O 点与地面相接触的重对称陀螺. C 为其质心. 以 O 点为坐标原点，质心位置为 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{C}}$. 陀螺以角速度 ω 绕其对称轴自转，自转轴与 z 轴夹角为 θ. 陀螺绕 z 轴进动的角速度为 Ω.

为了描述角动量，在陀螺质心 C 上建立 χ-ζ 坐标系(图 2). 其中 ζ 沿陀螺对称轴方向. 陀螺质心 C 绕 O 点的轨道角动量为

$$\boldsymbol{L}_o = mr_{\mathrm{C}}^2 \Omega \sin\theta \boldsymbol{e}_\chi \tag{7}$$

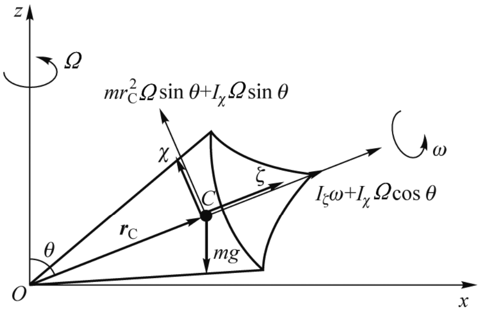

图 2　重对称陀螺

陀螺的自转为两种转动的合成，其一是自身以角速度 ω 绕 ζ 轴的旋转，其二是进动引起的以角速度 Ω 绕 z 轴的旋转. 由于对称性，χ、ζ 轴为陀螺的惯性主轴. 陀螺的自转角动量为

$$\boldsymbol{L}_s = I_\zeta(\omega + \Omega\cos\theta)\boldsymbol{e}_\zeta + I_\chi \Omega \sin\theta \boldsymbol{e}_\chi \tag{8}$$

总角动量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_o + \boldsymbol{L}_s$ 的水平分量(沿 x 轴)为

$$\begin{aligned}L_x = &I_\zeta(\omega + \Omega\cos\theta)\sin\theta - \\ &(mr_{\mathrm{C}}^2 + I_\chi)\Omega\sin\theta\cos\theta\end{aligned} \tag{9}$$

重力对 O 点力矩为 $mgr_{\mathrm{C}}\sin\theta$. 若陀螺处在稳定的(无章动)进动状态，则根据角动量定理 $mgr_{\mathrm{C}}\sin\theta = \Omega L_x$ 得

$$\Omega(I_\zeta\omega + (I_\zeta - I_\chi - mr_{\mathrm{C}}^2)\Omega\cos\theta) = mgr_{\mathrm{C}} \tag{10}$$

式(10)的解为无章动进动 Ω 所需满足的条件. 若 Ω 小于该方程的解，则陀螺自转轴向下运动以补偿不足的角动量变化率 $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$，同时 L_x 增大. L_x 增大到一定程度以后将遏制陀螺自转轴的向下运动，并反过来朝上运动. 此过程反复，形成章动.

通过重对称陀螺模型，可使学生深入理解经典力学中的轨道角动量与自转角动量概念. 在日后学习量子力学时，学生将经典力学的自转角动量和量子力学中的自旋角动量概念相互比较，认识其异同. 在经典力学中建立轨道角动量与自转角动量概念，使其理论构架更加完善，并使学生对角动量建立全面的认识.

3.2　两个边缘相接触的转盘

如图 3 所示，将两个正在旋转的、半径分别为 R 和 r 旋转的转盘边缘相互接触，二者发生摩擦，在经过一段时间后达到稳定运动状态. 设二者均为均质圆盘，质量分别为 M 和 m，初始角速度为 Ω_0 和 ω_0，不计两个轮轴的摩擦，计算达到稳定运动状态后二者的角速度.

在通常的大学物理教学中会强调，角动量守恒必须对同一个参考点(或同一个转轴)使用. 针对此例往往对学生强调，两个转盘的转轴不是同一个转

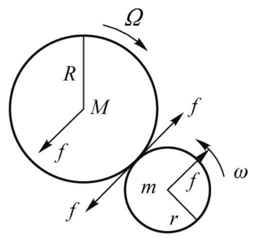

图 3 两个边缘相互接触的转盘

轴,不能对此系统使用“角动量守恒”.也就是说,设一段过程中两个转盘角速度的改变为 $\Delta\Omega$ 和 $\Delta\omega$,不可以写出 $\frac{1}{2}MR^2\Delta\Omega-\frac{1}{2}mr^2\Delta\omega=0$.我们通常用摩擦力的冲量矩来计算这个问题.在一小段时间内,摩擦力对两个转盘的冲量矩为 $-fR\mathrm{d}t=\frac{1}{2}MR^2\mathrm{d}\Omega$ 和 $fr\mathrm{d}t=\frac{1}{2}mr^2\mathrm{d}\omega$.故可得

$$\int f\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}MR\Delta\Omega=\frac{1}{2}mr\Delta\omega \tag{11}$$

于是有 $\Delta\omega=-\frac{MR}{mr}\Delta\Omega$.当两个转盘边缘线速度相同,即 $R(\Omega_0+\Delta\Omega)=r(\omega_0+\Delta\omega)$ 时,摩擦力消失,体系达到稳定运动状态.可计算出稳定状态下的角速度为

$$\begin{cases}\Omega=\Omega_0+\Delta\Omega=\dfrac{\dfrac{r}{R}\omega_0+\dfrac{M}{m}\Omega_0}{1+\dfrac{M}{m}}\\[2ex]\omega=\omega_0+\Delta\omega=\dfrac{\omega_0+\dfrac{MR}{mr}\Omega_0}{1+\dfrac{MR}{mr}}\end{cases} \tag{12}$$

实际上,角动量定理是力学中的普适规律.对该体系,我们考虑用角动量定理进行描述.以第一个转盘的圆心为参考点,第 1 个转盘的角动量为 $L_1=\frac{1}{2}MR^2\Omega$.由于第 2 个圆盘的质心不在参考点上,第 2 个圆盘的角动量可分解为轨道角动量和自转角动量两部分.又由于第 2 个圆盘质心静止,故只有自转角动量,即 $L_2=-\frac{1}{2}mr^2\omega$.这里我们看到,两个圆盘的角动量是可以写成这样简洁的形式的.虽然不可以写成前面说的“角动量守恒”,但我们可以用角动量定理表述其运动规律.两个圆盘的质心要保持静止,它们各自的转轴会对其产生相应的力以抵抗所受到的摩擦力(图 3).相对第 1 个转盘的质心,体系受到的合外力矩为 $M=-f(R+r)$.体系的角动量定理写作

$$-f(R+r)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}MR^2\mathrm{d}\Omega-\frac{1}{2}mr^2\mathrm{d}\omega \tag{13}$$

可根据式(11)验证式(13)成立.虽然式(13)不足以用来求解体系运动过程,但通过以上讨论可加深对力学中角动量原理的理解.

3.3 平行轴定理

刚体转动惯量的平行轴定理也是与总角动量分解相关联的一个例子.如图 4 所示,一个质量为 m、绕 O 轴旋转角速度为 ω 的刚体,设 C 为其质心、OC 两轴距离为 d,则刚体绕 O 轴的总角动量可分解为

$$L=m\omega d^2+I_C\omega \tag{14}$$

其中第 1 项为质心绕 O 轴的轨道角动量,第 2 项为刚体绕其质心的自转角动量,I_C为绕 C 轴的转动惯量.设 $L=I\omega$,则可得刚体绕 O 轴的转动惯量为

$$I=I_C+md^2 \tag{15}$$

即平行轴定理.由此可看到,总角动量的分解自然地与平行轴定理相自洽.

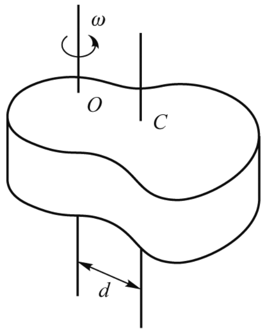

图 4 绕 O 轴旋转的刚体,C 为其质心

4 结论

轨道角动量和自转角动量的概念可从经典力学中得到.事实上,在人们建立量子力学自转概念的过程中,借助了经典的自转角动量概念.角动量作为力学中的重要概念,有必要对其进行深入的理论阐述.本文建立了经典力学中质点系的轨道角动量和自转角动量的概念,使经典力学的理论体系更加完备.

参考文献:

[1] 曾谨言.量子力学.卷 I[M]. 3 版. 北京:科学出版社, 2000:395-396.

[2] 倪光炯,陈苏卿.高等量子力学[M]. 2 版. 上海:复旦大学出版社, 2004:2-4.

[3] 苏汝铿.量子力学[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社, 2002:232.

[4] 周世勋, 陈灏. 量子力学教程[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社, 2009:172-174.

[5] 程剑剑,郑华.电子自旋是角动量的讨论[J]. 大学物理, 2019, 38(10):28-29.

[6] 李铭. 自旋不是轨道角动量的相对论效应——与许方官和高春媛商榷[J]. 大学物理,2002,21(1):34-35.

[7] 管靖,梁绍荣,刘昌年,等.普通物理学第一分册・力学[M]. 3 版. 北京:高等教育出版社,2005.

[8] 漆安慎,杜婵英.普通物理学教程・力学[M]. 3 版. 北京:高等教育出版社, 2012.

[9] C. Kittel, A. C. Helmholz. 伯克利物理学教程(SI版).第 1 卷.力学[M]. 陈秉乾,译. 北京:机械工业出版社,2014.

[10] 周衍柏.理论力学教程[M]. 3 版. 北京:高等教育出版社, 2009.

[11] 张启仁.经典力学[M]. 北京:科学出版社, 2002.

[12] 刘川.理论力学[M]. 北京:北京大学出版社,2019.

Discussion on orbit angular momentum and rotation momentum in classical mechanics

LIN Zheng-zhe, CHEN Xi

(School of Physics and Optoelectronic Engineering, Xidian University, Xi'An 710071, China)

Abstract: Angular momentum is an important concept in mechanics. In this paper, the concepts of orbit angular momentum and rotation momentum of a system of mass points are established in classical mechanics to make the theory more complete. The application significance is illustrated by several examples. Introducing orbit angular momentum and rotation momentum into classical mechanics can help students deepen their understanding of angular momentum, establish a relationship with orbit and spin angular momentum in quantum mechanics, and deeply understand the similarities and differences between spin angular momentum in classical and quantum mechanics.

Key words: classical mechanics; orbit angular momentum; rotation momentum