(1) 平行轴定理

刚体转动惯量与轴的位置有关. 若二轴平行,其中一轴过质心,则刚体对二轴转动惯量有下列关系

$$I = I_C + md^2, \tag{7.3.7}$$

m 为刚体质量,I_C 为刚体对过质心轴的转动惯量,I 为对另一平行轴的转动惯量,d 为两轴的垂直距离. (7.3.7)式叫作平行轴定理. 现证明如下. 图 7.16 中,Oz 与 Cz' 轴与纸面垂直,带撇坐标系表示质心坐标系,刚体对 Oz 轴的转动惯量为

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) \\ &= \sum m_i[(x'_i + x_C)^2 + (y'_i + y_C)^2] \\ &= \sum m_i(x'^2_i + y'^2_i) + 2x_C\sum m_i x'_i \\ &\quad + 2y_C\sum m_i y'_i + (x_C^2 + y_C^2)\sum m_i. \end{aligned}$$

用 m 表示刚体总质量. 根据质心坐标式,有 $\sum m_i x'_i = mx'_C$, $\sum m_i y'_i = my'_C$, x'_C 和 y'_C 分别表示质心在质心坐标系中的坐标,因这一坐标系原点正在质心,故 $x'_C = y'_C = 0$,上式中间两项消失. $\sum m_i(x'^2_i + y'^2_i)$ 即刚体对 Cz 轴的转动惯量 I_C,而 $x_C^2 + y_C^2 = d^2$. 于是得(7.3.7)式. 由定理可知,在刚体对各平行轴的不同转动惯量中,对质心轴的转动惯量最小.