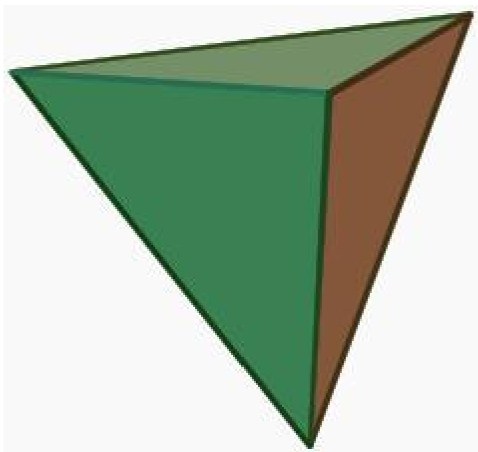
# 欧拉公式与权转移方法

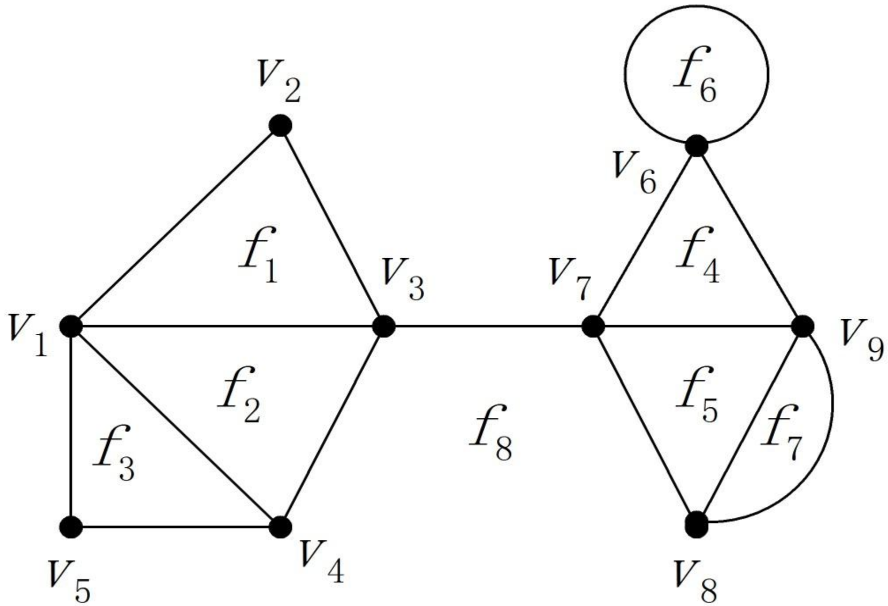


**欧拉公式：**设G是一个有v个顶点，e条边和f个面的连通平面图，则

$$v-e+f=2$$

**点度d(v)：**与点v关联的边的条数（环算两条边）

**面度d(f)：**与面f关联的边的条数（割边算两条边）




$d(v_1)=4$
$d(v_2)=2$
$d(v_3)=4$
$d(v_4)=3$
$d(v_5)=2$
$d(v_6)=4$
$d(v_7)=4$
$d(v_8)=3$
$d(v_9)=4$

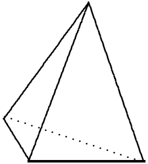
$d(f_1)=3$
$d(f_2)=3$
$d(f_3)=3$
$d(f_4)=3$
$d(f_5)=3$
$d(f_6)=1$
$d(f_7)=2$
$d(f_8)=12$

v=9， e=15, f=8

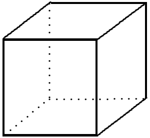
点度和=面度和=30=2e

**The Euler Polyhedral Formula** *If a polyhedron has $V$ vertices, $E$ edges, and $F$ faces, then*

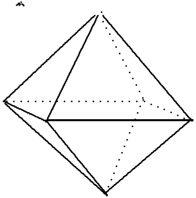
$$V - E + F = 2.$$



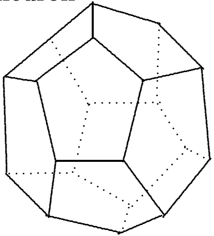
tetrahedron



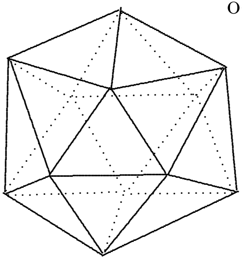
cube



octahedron



dodehedron



icosahedron

| Platonic solid | $V$ | $E$ | $F$ |
|---|---|---|---|
| tetrahedron | 4 | 6 | 4 |
| cube | 8 | 12 | 6 |
| octahedron | 6 | 12 | 8 |
| dodecahedron | 20 | 30 | 12 |
| icosahedron | 12 | 30 | 20 |

**定理：**设G是一个连通平面图，则对于任何实数k,l>0，恒有：

$$\sum_{v\in V(G)}(kd(v)-2(k+l))+\sum_{f\in F(G)}(ld(f)-2(k+l))=-4(k+l)$$

**推论：**

$$\sum_{v\in V(G)}(d(v)-4)+\sum_{f\in F(G)}(d(f)-4)=-8$$

$$\sum_{v\in V(G)}(d(v)-6)+\sum_{f\in F(G)}(2d(f)-6)=-12$$

…………

## 四色定理的证明概述（每个平面图都是4-顶点可染的）

### 第一部分：（权转移方法）

**证明每个平面图都含有若干种构型中的其中一个！**

此部分使用的是理论性的数学证明！

### 第二部分：（可约性验证）

**假设四色定理不正确，则其必然存在反例，即一个不是4-顶点可染的平面图G，接下来证明图G不含有上述提及的任何一个构型！**

此部分使用的是计算机证明，耗时1200小时！

## 权转移方法：一个例子

每个最小度为5的平面简单图，都含有以下两种构型之一：

(1) 一条边uv，其中d(u)=5，d(v)=5;

(2) 一条边uv，其中d(u)=5，d(v)=6.

证明 :假设该命题的结论不对 !即存在一个最小度为5的平面简单图G，其不含有上述两种构型。

由于G的最小度为 5 ，因此G必定含有一条边uv，其中d(u)=5。

由于G不含有构型(1)与(2), $d(v)\geq 7$。

**根据欧拉公式，有**

$$\sum_{v\in V(G)}(d(v)-6)+\sum_{f\in F(G)}(2d(f)-6)=-12$$

**从而给图G的每一个点v，定义权值**

$$c(v)=d(v)-6$$

**给图G的每一个面f，定义权值**

$$c(f)=2d(f)-6$$

**于是图中所有点与面的权值总和为-12.**

由于图G是平面简单图，其不含有【环】与【重边】，因此G中每个面的度数至少为3！

接下来，我们定义权转移规则，使得图中每个点或者面的权值可以向其他点或者面进行转移（传递）。

对于图中的点v，其初始的权值为c(v)，在进行权转移后，其最终的权值设为$c^*(v)$

对于图中的点f，其初始的权值为c(f)，在进行权转移后，其最终的权值设为$c^*(f)$

由于权值仅仅在所有的点与所有的面所构成的一个“集体”的“内部成员”之间进行转移，权值总和必定保持不变，即

$$\sum_{v\in V(G)\cup F(G)} c^{*}(v) = \sum_{v\in V(G)\cup F(G)} c(v) = -12 < 0$$

**本例的权转移规则定义如下：**

**R1. 每个度数为5的点从它的每个邻点得到权值1/5**

**R2. 每个度数至少为4的面向其关联的每个点转移权值1/2**

**下面计算图中每个点和面的最终的权值！**

---

**5-度点：其有5个邻点，它从这5个邻点分别得到1/5，因此**

$$c^*(v) \geq c(v) + 5*1/5 = 5-6+1 = 0$$

**6-度点：其与5-度点不相邻，因此其不向外转移权值，因此**

$$c^*(v) \geq c(v) = 6-6 = 0$$

本例的权转移规则定义如下：

R1. 每个度数为5的点从它的每个邻点得到权值1/5

R2. 每个度数至少为4的面向其关联的每个点转移权值1/2

下面计算图中每个点和面的最终的权值！

---

k-度点（$k\geq 8$）：其可能是5-度点的邻点，并且它最多可以是k个5-度点的邻点，因此根据权转移规则，有

$$c^*(v)\geq c(v)-k*1/5=k-6-k*1/5\geq 8-6-1.6>0$$

7-度点（如果它最多是5个5-度点的邻点）

$$c^*(v)\geq c(v)-5*1/5=7-6-5*1/5=0$$

本例的权转移规则定义如下：

R1. 每个度数为5的点从它的每个邻点得到权值1/5

R2. 每个度数至少为4的面向其关联的每个点转移权值1/2

下面计算图中每个点和面的最终的权值！

---

7-度点（如果它至少是6个5-度点的邻点）

此时，这个7-度点v必定关联一个度数至少为4的面（为什么？）

从而根据权转移规则R2，v将从其关联的面得到至少1/2，因此

$$c^*(v) \ge c(v) - 7*1/5 + 1/2 = 7-6-1.4+0.5 > 0$$

至此，已经证明了图G的所有点的最终权值均为非负！！

**本例的权转移规则定义如下：**

**R1. 每个度数为5的点从它的每个邻点得到权值1/5**

**R2. 每个度数至少为4的面向其关联的每个点转移权值1/2**

**下面计算图中每个点和面的最终的权值！**

---

**3-度面：其不参与规则R1与R2，因此** $c^*(f)=c(f)=2*3-6=0$

**k-度面（k≥4）：其关联至多k-个顶点，根据规则R2，其向它关联的每个顶点转移1/2，因此**

$$c^*(f) \ge c(f)-k*1/2=2k-6-0.5k=1.5k-6 \ge 0$$

**至此，已经证明了图G的所有面的最终权值均为非负！！**

综上所述，我们得到：

$$\sum_{v\in V(G)\cup F(G)} c^*(v) \geq 0$$

这与

$$\sum_{v\in V(G)\cup F(G)} c^*(v) = \sum_{v\in V(G)\cup F(G)} c\ \ (v) = -12 < 0$$

矛盾！！！！！

~~　证毕！

（＊^_^＊）