

文章编号: 0583-1431(2021)03-0463-08

文献标识码: A

2-可平面图的交叉数及其应用

张欣

西安电子科技大学数学与统计学院 西安 710071
E-mail: xzhang@xidian.edu.cn

摘要 图在平面内具有最小交叉次数的嵌入称为该图的一个最优平面画法. 图 G 的交叉数 $\text{cr}(G)$ 是该图的最优平面画法中的交叉次数. 如果一个图可以嵌入在平面内使得每条边最多被交叉 k 次, 则称其为 k -可平面图. Zhang 等人 (2012) 证明了顶点数为 n 的 1-可平面图的交叉数最多为 $n-2$, 并且该上界是最优的. Czap, Harant 与 Hudák (2014) 证明了顶点数为 n 的 2-可平面图的交叉数最多为 $5(n-2)$. 本文给出了 2-可平面图的交叉数的一个更好的上界, 并利用它从组合学的角度证明了 K_n 是 2-可平面图当且仅当 $n \leq 7$ (该问题于 2019 年之前是个公开问题, 最近由 Angelini 等人使用计算机程序证明).

关键词 2-平面图; 交叉数; 权转移方法; 完全图

MR(2010) 主题分类 05C62, 05C10, 05C35

中图分类号 O157.5

The Crossing Number of 2-planar Graphs and Its Application

Xin ZHANG

*School of Mathematics and Statistics, Xidian University,
Xi'an 710071, P. R. China
E-mail: xzhang@xidian.edu.cn*

Abstract An optimal planar drawing of a graph is an embedding in the plane so that the number of crossings is as small as possible. The number of crossings in an optimal planar drawing of a graph G is the crossing number $\text{cr}(G)$ of G . A graph is k -planar if it can be embedded in the planar so that each edge is crossed at most k times. Zhang et al. (2012) proved that the crossing number of any 1-planar graph on n vertices is at most $n-2$, and this upper bound is best possible. Czap, Harant and Hudák (2014) proved that the crossing number of any 2-planar graph on n vertices is at most $5(n-2)$. In this paper, we give a better upper bound for the crossing number of 2-planar graphs and show from the point of view of combinatorics that K_n is 2-planar if and only if $n \leq 7$ (surprisingly, this was an open problem until 2019, in when Angelini solved it with computer assistance).

收稿日期: 2020-01-20; 接受日期: 2020-07-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11871055); 西安市科协青年人才托举计划资助项目 (2018-6);
国家留学基金委公派留学 (访问学者) 项目 (201906965003)

Keywords 2-planar graph; crossing number; discharging method; complete graph

MR(2010) Subject Classification 05C62, 05C10, 05C35

Chinese Library Classification O157.5

1 引言

图的交叉数的研究源于 Turán 的砖厂问题. 第二次世界大战期间, 匈牙利数学家 Pál Turán 被迫在制砖厂工作, 将装满砖块的货车从砖窑运到存储仓库. 工厂从每个砖窑到每个存储仓库都有轨道, 但是货车很难在轨道彼此交叉的位置推进. Turán 受到这种情况的启发, 考虑如何重新设计工厂的轨道以最大程度地减少将砖窑连接到存储仓库的轨道之间的交叉次数. 该问题可以用图论的语言进行描述. 具体来说, 工厂中的每个砖窑和每个存储仓库都用顶点表示, 它们之间的轨道用边表示. Turán 的砖厂问题即可以表述为: 如何在平面中嵌入一个完全二部图使得边之间的交叉次数尽可能地少^[22]. 近年来, 图的交叉数作为图绘制 (graph drawing) 领域的主要研究对象^[20], 以及 VLSI 设计^[15] 和离散几何^[21] 的重要工具, 变得越来越重要.

如果将一个图 G 嵌入在平面内使得其在边和边之间产生的交叉次数最少, 则称该嵌入为图 G 的最优平面画法. 图 G 的交叉数为其最优平面画法中的交叉次数, 用 $\text{cr}(G)$ 表示. 例如, 如果图 G 是可平面图 (可以嵌入在平面内使得边和边之间不产生交叉的图), 则 $\text{cr}(G) = 0$.

1960 年, Guy^[10] 在其论文中提及了由 Anthony Hill 最先提出的确定完全图的交叉数的问题, 并提出如下猜想.

猜想 1.1 $\text{cr}(K_n) = \frac{1}{4} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$.

Guy^[10] 证明了

$$\text{cr}(K_n) \leq \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$$

对于所有的正整数 n 都成立. Saaty^[19] 于 1964 年证明了猜想 1.1 对于 $n \leq 10$ 成立. 直到 2007 年, Pan 与 Richter^[18] 才将 Saaty 的结果进行了改进: 证明了猜想 1.1 对于 $n \leq 12$ 成立, 这也是到现在为止已知的最好结果. 由此可见, 计算图的交叉数是一个非常困难的问题.

事实上, 从算法角度来看, Garey 与 Johnson^[9] 于 1983 年证明了计算图的交叉数是一个 NP- 完全问题, 并且即使将图限制为 3- 正则图^[12] 或者几乎平面图 (除去某一条边能成为平面图的图)^[4] 也是如此.

近年来, 在图绘制领域对于超越可平面图 (beyond planar graphs) 的研究日益热门, 其中 k - 可平面图在该图类中占有重要的地位^[7]. 例如, Chimani 等人^[5] 于 2019 年研究了 1- 可平面图, 准可平面图 (quasi-planar graphs) 以及扇可平面图 (fan-planar graphs) 的交叉数的相关问题.

如果一个图可以嵌入在平面内使得每条边最多被交叉 k 次, 则称其为 k - 可平面图. 将 k - 可平面图嵌入在平面内使得每条边最多被交叉 k 次的画法称为它的 k - 平面嵌入, 或称为 k - 平面图. 例如, 被广泛研究的平面图即是 0- 平面图. 此外, 关于 1- 可平面图的研究也有很多进展 (见文 [14, 25, 26]). 例如, Zhang 等人^[24] 证明了对于任何具有 n 个顶点的 1- 可平面图 G , 都有

$$\text{cr}(G) \leq n - 2,$$

并且该上界是最优的. 另一方面, 众多学者^[2, 3, 6, 13, 16, 17] 对 2- 可平面图的结构与画法进行了一系列的研究. 其中, Pach 与 Tóth^[17] 证明了具有 n 个顶点的 2- 可平面图最多有 $5(n - 2)$ 条

边, 且该上界是最优的. Czap, Harant 与 Hudák [6] 证明了具有 n 个顶点的 2-可平面图 G , 都有

$$cr(G) \leq 5(n - 2).$$

本文将证明以下结论:

定理 1.1 设 D 是一个顶点数为 $n \geq 2$ 的 2-可平面图 G 的 2-平面嵌入, 则 D 最多含有 $\frac{10}{3}(n - 2)$ 个交叉.

由于任何一个 2-可平面图都有一个 2-平面嵌入, 从而由定理 1.1 立刻可推出如下结果, 改进 Czap 等人的前述结果.

定理 1.2 设 G 是一个顶点数为 $n \geq 2$ 的 2-可平面图, 则 $cr(G) \leq \frac{10}{3}(n - 2)$.

考虑正十二面体 (可以看成是具有 12 个面的平面图 G , 其每个面都关联 5 条边), 在其每个面 $v_1v_2v_3v_4v_5v_1$ 的内部, 添加边 $v_1v_3, v_3v_5, v_5v_2, v_2v_4, v_4v_1$ (如图 1(a) 所示), 则得到了一个 2-可平面图的 2-平面嵌入 D . 注意到, 在 D 中共有 20 个顶点以及

$$12 \times 5 = 60 = \frac{10}{3} \times (20 - 2)$$

个交叉点, 故定理 1.1 中关于交叉个数的上界是最优的.

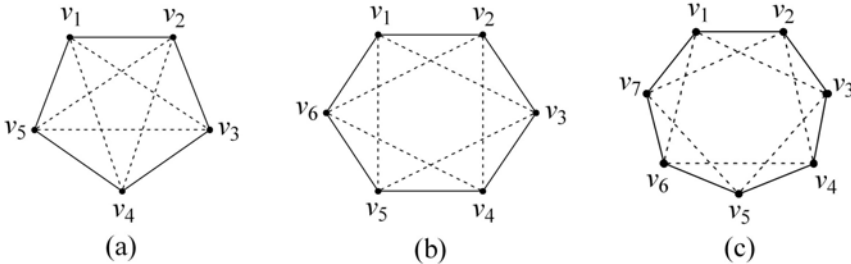


图 1 C_5, C_6 与 C_7 的平方图的某种 2-平面嵌入

另一方面, 本文将应用定理 1.1 的证明的衍生结果 (即第 2 节的定理 2.1) 来从组合学的角度证明完全图 K_8 不是 2-可平面的, 继而证明以下结论:

定理 1.3 完全图 K_n 是 2-可平面图当且仅当 $n \leq 7$.

事实上, Auer 等人 [2] 指出, 判断一个图是否是 2-可平面的至少是一个 NP-难问题. 对于完全图, 由于 K_7 可以嵌入在平面内使得每条边最多被交叉两次, 故当 $n \leq 7$ 时, K_n 是 2-可平面的; 由于 K_9 有 36 条边, 其超过了具有 9 个顶点的 2-可平面图的边数上界 $5 \times (9 - 2) = 35$, 故当 $n \geq 9$ 时, K_n 不是 2-可平面的. 然而, 令人意外的是, K_8 是否是 2-可平面图在很长时间都是一个悬而未决的问题, 直到 2019 年, Angelini 等人 [1] 首次采用计算机验证的方法, 证明了 K_8 不是 2-可平面的, 从而完成了定理 1.3 的计算机证明.

本文其他符号与定义如下. 设 G 是一个图, 分别用 $V(G), E(G)$ 来表示它的点集合, 边集合. 用 C_d 表示长度为 d (即关联 d 条边) 的圈. 如果两个图 G_1, G_2 满足 $V(G_1) \cap V(G_2) = \{u, v\}$ 且 $uv \in E(G_1) \cap E(G_2)$, 则以 $V(G_1) \cup V(G_2)$ 为点集, $E(G_1) \cup E(G_2)$ 为边集的图称为 G_1 与 G_2 的 uv -和, 记为 $G_1 \oplus_{uv} G_2$. 如果 G_1 是 G 的子图, 则 $G - G_1$ (有时用 $G - S$, 其中 $S = V(G_1)$) 表示由顶点集 $V(G) \setminus V(G_1)$ 导出的子图. 如果 $S \subseteq V(G)$ 且 $V(G_1) \cap S = \emptyset$, 则 $G_1 + S$ 表示由顶点集 $V(G_1) \cup S$ 导出的子图. 文中出现的其他定义若无特殊说明, 均参考文献 [8, 23].

2 定理 1.1 的证明

现对 G 的顶点数 n 进行归纳. 当 $n = 2$ 时, G 的任何 2-平面嵌入都不会产生交叉, 于是结论成立. 现假设结论对于顶点数小于 n 的 2-可平面图成立, 并证明顶点数为 $n \geq 3$ 的 2-可平面图的任何 2-平面嵌入 D 最多含有 $\frac{10}{3}(n-2)$ 个交叉. 如果 D 不连通, 则取 D 的一个连通分支 D_1 , 并设其顶点数为 n_1 . 由于 D_1 与 $D - D_1$ 均为某个 2-可平面图 的 2-平面嵌入, 故由归纳假设可知, 在 D_1 与 $D - D_1$ 中分别最多有

$$\frac{10}{3}(n_1 - 2) \text{ 与 } \frac{10}{3}(n - n_1 - 2)$$

个交叉, 从而 D 的交叉总数最多为

$$\frac{10}{3}(n_1 - 2) + \frac{10}{3}(n - n_1 - 2) = \frac{10}{3}(n - 4) < \frac{10}{3}(n - 2).$$

因此, 下面假设 D 是连通的. 更进一步, 不妨设 D 是极大的, 即任意连接 D 的两个不相邻的点所得到的图都不再是 2-可平面的.

情况 1 存在一条非交叉边 $uv \in E(D)$, 使得 $D - \{u, v\}$ 不连通.

设 D_1 为 $D - \{u, v\}$ 的一个连通分支. 如果 $D_1^* = D_1 + \{u, v\}$ 且 $|D_1^*| = n_1$, 则有

$$|D - D_1| = n - (n_1 - 2) = n - n_1 + 2.$$

由于 D_1^* 与 $D - D_1$ 均为某个 2-可平面图 的 2-平面嵌入, 故由归纳假设可知, 在 D_1^* 与 $D - D_1$ 中分别最多含有

$$\frac{10}{3}(n_1 - 2) \text{ 与 } \frac{10}{3}((n - n_1 + 2) - 2)$$

个交叉. 由于 $D = D_1^* \oplus_{uv} (D - D_1)$ 且 uv 不是交叉边, 从而 D 的交叉总数最多为

$$\frac{10}{3}(n_1 - 2) + \frac{10}{3}((n - n_1 + 2) - 2) = \frac{10}{3}(n_1 - 2) + \frac{10}{3}(n - n_1) = \frac{10}{3}(n - 2).$$

情况 2 对于任何一条非交叉边 $uv \in E(D)$, $D - \{u, v\}$ 都是连通的.

D 中的边如果被交叉一次, 则称其为 I-边, 如果被交叉两次, 则称其为 II-边. D 中的交叉点如果是由一条 I-边和一条 I-边交叉产生的, 则称其为 (I, I)-交叉点, 如果是由一条 I-边和另外一条 II-边交叉产生的, 则称其为 (I, II)-交叉点, 如果是由一条 II-边和另外一条 II-边交叉产生的, 则称其为 (II, II)-交叉点.

设 xy 是一条从 x 到 y 依次经过两个交叉点 p 和 q 的 II-边, 称 x 为交叉点 p 的近端关联点, 为交叉点 q 的远端关联点. 如果 II-边 uu' 与 II-边 vv' 交叉于交叉点 p 且 u 与 v 均为 p 的近端关联点, 则称 p 为 $\{u, v\}$ 的关联交叉点.

断言 1 如果 $uv \in E(D)$ 是非交叉边, 则 $\{u, v\}$ 最多有 2 个关联交叉点.

证明 设 p_1 为 $\{u, v\}$ 的一个关联交叉点, 则由顶点 u, v 以及交叉点 p_1 所构成的是一个封闭的三角区域 Δ_{uvp_1} . 由于 u 与 v 均为 p_1 的近端关联点且 uv 是非交叉边, 故没有顶点会嵌入在区域 Δ_{uvp_1} 的内部 (否则 $D - \{u, v\}$ 不连通, 与情况 2 的假设矛盾). 设 p_2 为 $\{u, v\}$ 的另外一个关联交叉点. 同理, 由顶点 u, v 以及交叉点 p_2 所构成的封闭三角区域 Δ_{uvp_2} 的内部不存在图 G 的点. 因此, 如果 $\{u, v\}$ 还有第三个关联交叉点 p_3 , 则 p_3 在 Δ_{uvp_1} 与 Δ_{uvp_2} 的外部. 由于线段 up_1, vp_1, up_2, vp_2 不会被交叉且由顶点 u, v 以及交叉点 p_3 依然构成一个封闭的三角区域

Δ_{uvp_3} , 故要么 p_1 在 Δ_{uvp_3} 的内部, 要么 p_2 在 Δ_{uvp_3} 的内部. 因此, $D - \{u, v\}$ 不连通, 与情况 2 的假设矛盾. 证毕.

注意到如果 p 是一个 (II, II)- 交叉点, 则必有两个顶点 u 和 v 使得 p 为 $\{u, v\}$ 的关联交叉点. 如果 $uv \notin E(G)$, 则容易验证 $D + uv$ 依然是 2-可平面图 (因为线段 up 与 vp 都不被交叉, 故可将边 uv 尽可能地贴着 upv 进行嵌入, 从而不会产生新的交叉), 此与 D 的极大性矛盾. 因此 $uv \in E(D)$. 下称 uv 为交叉点 p 关联的伴随边, 称 p 为边 uv 的伴随点.

断言 2 每个 (II, II)- 交叉点关联恰好 1 条伴随边.

证明 由 (II, II)- 交叉点与伴随边的定义直接即得.

断言 3 如果 $uv \in E(D)$ 是非交叉边, 则其最多有 2 个伴随点.

证明 由断言 1 即得.

现在采用权转移方法证明定理 1.1. 首先, 给 D 中每个交叉点赋权值 1. 其次, 定义如下的权转移规则:

R1 如果 p 是一个 (I, I)- 交叉点, 则 p 向其关联的每条 I- 边转移权值 $\frac{1}{2}$;

R2 如果 p 是一个 (I, II)- 交叉点, 则 p 向其关联的 I- 边和 II- 边分别转移权值 $\frac{2}{3}$ 与 $\frac{1}{3}$;

R3 如果 p 是一个 (II, II)- 交叉点, 则 p 向其关联的每条 II- 边和伴随边均转移权值 $\frac{1}{3}$.

由 R1 和 R2 可知, 如果 p 是一个 (I, I)- 交叉点或者 (I, II)- 交叉点, 则在执行完上述权转移规则后其剩余的权值恰好为 0. 由 R3 与断言 2 亦可知, (II, II)- 交叉点在执行完上述权转移规则后其剩余的权值也为 0.

断言 4 如果 e 是一条 I- 边, 则在执行完权转移规则后其权值最多为 $\frac{2}{3}$.

证明 设 e 被边 e' 交叉于 p . 如果 e' 是 I- 边, 则 p 是 (I, I)- 交叉点, 从而 e 按照规则 R1 从交叉点 p 得到 $\frac{1}{2}$. 如果 e' 是 II- 边, 则 p 是 (I, II)- 交叉点, 从而 e 按照规则 R2 从交叉点 p 得到 $\frac{2}{3}$.

断言 5 如果 e 是一条 II- 边, 则在执行完权转移规则后其权值为 $\frac{2}{3}$.

证明 设 p_1 与 p_2 是 e 上的两个交叉点. 由 R2 与 R3 可知, p_1 与 p_2 分别向 e 转移 $\frac{1}{3}$. 因此, e 的最终权值为 $\frac{2}{3}$.

断言 6 如果 e 是一条非交叉边, 则在执行完权转移规则后其权值最多为 $\frac{2}{3}$, 并且这个界被取到当且仅当 e 恰好有 2 个伴随点.

证明 由于非交叉边只可能通过规则 R3 获得权值, 而由断言 3 知其最多可以有 2 个伴随点. 因此, 根据 R3, 其最终权值最多为

$$2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

由断言 4-6 可知, 在执行完权转移规则后 D 的每条边的权值最多为 $\frac{2}{3}$, 因此图上的总权值最多为 $\frac{2}{3}m$, 其中 m 为 D 的边数. 注意到执行权转移规则前后图中的总权值不变, 而初始权值恰好为图上的交叉点的个数 Φ , 于是有

$$\Phi \leq \frac{2}{3}m.$$

由于具有 n 个顶点 m 条边的 2-可平面图满足条件

$$m \leq 5(n-2),$$

从而有

$$\Phi \leq \frac{10}{3}(n-2).$$

证毕.

注 1 如果 G 是一个 3-连通的极大 2-可平面图, D 是 G 的一个 2-平面嵌入, 则 D 的任何两个顶点 u, v 都满足 $D - \{u, v\}$ 是连通的这个条件, 于是 D 满足情况 2 所提及的要求. 因此, 使用同样的证明过程立刻可以得到如下一个更强的结论.

定理 2.1 设 G 是一个边数为 m 的 3-连通的极大 2-可平面图, 则 G 的任何一个 2-平面嵌入最多含有 $\frac{2}{3}m$ 个交叉点, 从而

$$\text{cr}(G) \leq \frac{2}{3}m.$$

给定图 H , 将图中任何两个距离不超过 2 的点之间连上边 (如果它们之间最开始没有边的话), 如此得到的图称为图 H 的平方图. 设 G 是一个围长 (图中最短圈的长度) 至少为 5 且任何两个面不共用两条相邻边的平面图. 由于 G 的每个面 f 的边界构成一个封闭的区域, 也就是图中的一个圈 C_d , 其中 $d = d_G(f)$ 为 f 在 G 中的度数, 即其在 G 中关联的边的条数, 故可在图 G 的每个面 f 的内部作其所对应的边界圈的平方图, 记得到的图为 G' . 如果 u 与 v 是图 G 的某个面 f 上距离为 2 的顶点, 即存在点 x 使得 uxv 位于 f 的边界上, 则 u 与 v 不会是图 G 的另外一个面 f' 上距离为 2 的顶点. 否则, 存在点 y 使得 uyv 位于 f' 的边界上. 如果 $y \neq x$, 则 $uxvyu$ 构成图 G 的一个长度为 4 的圈, 与图 G 的围长至少为 5 矛盾. 因此 $y = x$, 继而面 f 与面 f' 共用两条相邻的边 ux 与 vx , 与图 G 的选择方式矛盾. 这说明图 G' 没有重边, 即 G' 是一个简单图. 下称围长至少为 5 且任何两个面不共用两条相邻边的平面图 G 是面可平方图, 其对应的图 G' 为 G 的面平方嵌入.

容易看出, 上述操作在 G 的每个面所对应的圈 C_d 的内部新增了 d 条边, 并且新增加的每条边都被恰好交叉两次, 而产生的交叉次数也是 d (图 1 给出了当 $d = 5, 6, 7$ 时的示意图). 从而 G' 中含有交叉的总数为

$$\Phi = \sum_{f \in F(G)} d_G(f) = 2|E(G)|.$$

另一方面,

$$|E(G')| = |E(G)| + \sum_{f \in F(G)} d_G(f) = 3|E(G)|.$$

从而

$$\Phi = \frac{2}{3}|E(G')|.$$

事实上, 该结论还可以从另外一个角度得到. 注意到 G' 中的每条交叉边都是 II-边, 每条非交叉边都恰好有两个伴随交叉点, 因此在最开始给每个交叉点赋权值 1 并执行上面所定义的权转移规则后, 图中的每条边的最终权值都是 $\frac{2}{3}$, 从而总权值为 $\frac{2}{3}|E(G')|$. 由于权转移规则不改变总权值, 故初始总权值 Φ 等于最终总权值 $\frac{2}{3}|E(G')|$.

针对定理 2.1, 本文有如下猜想:

猜想 2.2 定理 2.1 中关于交叉点个数以及交叉数 $\text{cr}(G)$ 的上界可取到当且仅当 G 是某个面可平方图的面平方嵌入.

3 完全图 K_8 不是 2-可平面图的组合学理论证明

本节从组合学的角度来证明定理 1.3. 事实上, 仅需证明 K_8 不是 2-可平面图. 假设 K_8 是 2-可平面图并设 D 是它的 2-平面嵌入, 则由定理 2.1 可知 D 中的交叉个数最多为 $\frac{2}{3} \times 28 < 19$ (从而最多为 18). 此外, 由于猜想 1.1 对于 $n = 8$ 成立, 故

$$\text{cr}(K_8) = 18.$$

因此, D 中出现的交叉个数恰好为 18, 且每条边最多被交叉 2 次. 另一方面, Guy^[11] 证明了 K_8 的所有恰好含有 18 个交叉的平面嵌入的互不同构的画法仅有 3 种, 其中每种画法中都存在一条边被交叉 3 次 (详见文 [11, 图 9, 图 10 与图 11]). 因此, 这三种画法都不可能是 D . 上述矛盾说明 K_8 不是 2-可平面图, 证毕.

致谢 感谢审稿人仔细阅读本文原稿并提出宝贵的修正建议. 感谢 Casey Tompkins 向作者引入该文中所涉及的问题. 感谢 Pascal Gollin, Kevin Hendrey 以及 Abhishek Methuku 提出的许多优秀建议. 感谢韩国基础科学研究所 (Institute for Basic Science) 在作者访问期间给予的支持与资助.

参 考 文 献

- [1] Angelini P., Bekos M. A., Kaufmann M., et al., Efficient generation of different topological representations of graphs beyond-planarity, In: C. D. Tóth and D. Archambault eds., Proc. of 27th International Symposium on Graph Drawing (GD 2019), 2019.
- [2] Auer C., Brandenburg F., Gleißner A., et al., On sparse maximal 2-planar graphs, In: Lecture Notes in Computer Science (Including Subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), LNCS 7704, 2013: 555–556.
- [3] Bekos M., Di Giacomo E., Didimo W., et al., Edge partitions of optimal 2-plane and 3-plane graphs, *Discrete Mathematics*, 2019, **342**(4): 1038–1047.
- [4] Cabello S., Mohar B., Adding one edge to planar graphs makes crossing number and 1-planarity hard, *SIAM Journal on Computing*, 2013, **42**(5): 1803–1829.
- [5] Chimani M., Kindermann P., Montecchiani F., et al., Crossing numbers of beyond-planar graphs, In: Lecture Notes in Computer Science (Including Subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), LNCS 11904, 2019: 78–86.
- [6] Czap J., Harant J., Hudák D., An upper bound on the sum of powers of the degrees of simple 1-planar graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 2014, **165**: 146–151.
- [7] Didimo W., Liotta G., Montecchiani F., A survey on graph drawing beyond planarity, *ACM Computing Surveys*, 2019, **52**(1): Art. No4, 37pp.
- [8] Diestel R., Graph Theory (5th Edition), Springer, Berlin, 2017.
- [9] Garey M. R., Johnson D. S., Crossing number is NP-complete, *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 1983, **4**(3): 312–316.
- [10] Guy R. K., A combinatorial problem, Nabla (Bulletin of the Malayan Mathematical Society), 1960, **7**: 68–72.
- [11] Guy R. K., Crossing numbers of graphs, In: Graph Theory and Applications (Y. Alavi, D. R. Lick, and A. T. White, Eds.), Springer, Berlin, Heidelberg, 1972: 111–124.
- [12] Hliněný P., Crossing number is hard for cubic graphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 2006, **96**(4): 455–471.
- [13] Hoffmann M., Tóth C., Two-planar graphs are quasiplanar, In: 42nd International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2017), Francois Raskin, 2017, Art. No47: 1–14.
- [14] Kobourov S., Liotta G., Montecchiani F., An annotated bibliography on 1-planarity, *Computer Science Review*, 2017, **25**: 49–67.
- [15] Leighton T., Complexity Issues in VLSI, Foundations of Computing Series, MIT Press, Cambridge, 1983.

- [16] Lu Z., Song N., Light edges in 3-connected 2-planar graphs with prescribed minimum degree, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2018, **41**(3): 1265–1274.
- [17] Pach J., Tóth G., Graphs drawn with few crossings per edge, *Combinatorica*, 1997, **17**(3): 427–439.
- [18] Pan S., Richter R., The crossing number of K_{11} is 100, *Journal of Graph Theory*, 2007, **56**(2): 128–134.
- [19] Saaty T. L., The minimum number of intersections in complete graphs, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1964, **3**: 688–690.
- [20] Schaefer M., The graph crossing number and its variants: A survey, *Electronic Journal of Combinatorics*, 2018, **1**.
- [21] Székely L., Crossing numbers and hard Erdős problems in discrete geometry. *Combinatorics Probability and Computing*, 1997, **6**(3): 353–358.
- [22] Turán P., A note of welcome. *Journal of Graph Theory*, 1977, **1**(1): 7–9.
- [23] Xu J., Graph Theory and Its Application (in Chinese), Press of University of Science and Technology of China, Hefei, 2019.
- [24] Zhang X., Liu G., Wu J. L., $(1, \lambda)$ -embedded graphs and the acyclic edge choosability. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 2012, **49**(3): 573–580.
- [25] Zhang X., Liu G., Wu J. L., Structural properties of 1-planar graphs and an application to acyclic edge coloring (in Chinese). *Sci. Sin. Math.*, 2010, **40**(10): 1025–1032.
- [26] Zhang X., Liu W., The coloring of the class of 1-planar graphs and its subclasses (in Chinese), *Operations Research Transactions*, 2017, **21**(4): 135–152.