

不含特殊子式的符号图的选择数

宫辰, 武丽芳, 刘维婵, 张欣

GONG Chen, WU Lifang, LIU Weichan, ZHANG Xin

西安电子科技大学 数学与统计学院, 西安 710071

School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710071, China

GONG Chen, WU Lifang, LIU Weichan, et al. Choosability of signed graphs without certain minors. *Computer Engineering and Applications*, 2018, 54(16):55-58.

Abstract: The list coloring problem of the signed graphs is investigated in this paper, which proves that the choosability of every signed graph without K_5 -minor or $K_{3,3}$ -minor is at most 5, and this upper bound cannot be lowered anymore. This generalizes a corresponding result of Jin, Kang and Steffen on signed planar graph, which is published in "European Journal of Combinatorics, 2016, 52:234-243".

Key words: graph theory; signed graph; list vertex coloring; choosability; minor

摘要: 针对符号图的列表点染色问题, 证明了任何不含 K_5 -子式或 $K_{3,3}$ -子式的符号图的选择数至多为 5, 并且此处的上界 5 是不可再降低的, 从而推广了 Jin、Kang 与 Steffen 发表于 "European Journal of Combinatorics, 2016, 52:234-243" 的关于符号平面图的对结论。

关键词: 图论; 符号图; 列表点染色; 选择数; 子式

文献标志码: A **中图分类号:** O157.5 **doi:** 10.3778/j.issn.1002-8331.1706-0284

1 引言

设 G 是一个有限的、无向的简单图。分别用 $V(G)$ 与 $E(G)$ 代表图 G 的点集合与边集合。对于图 G 的每条边 e , 定义其符号 $\sigma(e)$ 为 $+1$ 或者 -1 , 由此得到的图称为符号图, 记为 (G, σ) 。对于符号图 (G, σ) 中的边 e , 如果 $\sigma(e) = +1$, 则称其为正边; 如果 $\sigma(e) = -1$, 则称其为负边。符号图的概念最初是由 Harary^[1] 于 1955 年在一篇数学文章中提出的, 之后又被 Cartwright 与 Harary^[2] 用于社会心理学的研究。例如, 在人际关系网中用点代表自然人, 如果两个人之间是朋友关系, 则将对应这两个人的点用一条正边连接; 反之, 如果两个人之间是敌对关系, 则将对应这两个人的点用一条负边连接。继而, 可以通过建立符号图的数学模型来分析人际关系网中的一系列问题, 如稳定性、社团划分问题等。

事实上, 网络的社团划分问题的研究可以归结于图的染色问题^[3-4]。1982 年, Zaslavsky^[5-7] 首次定义了符号

图的染色。设 (G, σ) 是一个符号图, c 是从点集 $V(G)$ 到数集 $\{-k, -(k-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, (k-1), k\}$ 的映射, 其对于图 G 的任何一条边 uv 满足:

(1) 若 $\sigma(uv) = +1$, 则 $c(u) \neq c(v)$;

(2) 若 $\sigma(uv) = -1$, 则 $c(u) \neq -c(v)$ 。

该映射 c 称为图 (G, σ) 的具有 k 个颜色的或者具有 $2k+1$ 个符号颜色的符号点染色。

2016 年, Máčajová、Raspaud 与 Škoviera^[8] 指出 Zaslavsky 的上述定义存在缺陷, 即该定义不能直接从无符号图的定义直接转换过来。为了克服这个缺陷, Máčajová 等结合 Zaslavsky 的定义, 重新给出了符号图的符号点染色的定义。

设 M_n 为整数集的一个子集, 当 $n = 2k$ 时, 令 $M_n = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm k\}$; 当 $n = 2k+1$ 时, 令 $M_n = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k\}$ 。如果一个从点集 $V(G)$ 到数集 M_n 的映射 c 对于图 G 的任何一条边 uv 满足 $c(u) \neq \sigma(uv)c(v)$, 则称

基金项目: 陕西省自然科学基金面上基金项目 (No.2017JM1010); 中央高校基本科研业务费项目 (No.JB170706)。

作者简介: 宫辰 (1997—), 女, 研究领域为图论及其应用; 武丽芳 (1995—), 女, 研究领域为图论及其应用; 刘维婵 (1996—), 女, 研究领域为图论及其应用; 张欣 (1986—), 通讯作者, 男, 博士, 副教授, 研究领域为图论及其应用, E-mail: xzhang@xidian.edu.cn。

收稿日期: 2017-06-21 **修回日期:** 2017-10-09 **文章编号:** 1002-8331(2018)16-0055-04

CNKI 网络出版: 2018-04-18, <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2127.TP.20180418.1643.014.html>

映射 c 为符号图 (G, σ) 的符号 n -点染色。使得符号图 (G, σ) 具有符号 n -点染色的最小整数 n , 称为符号图 (G, σ) 的符号点色数, 记为 $\chi(G, \sigma)$ 。

2016年, Jin, Kang 与 Steffen^[9]提出了符号图的列表染色的概念。设 (G, σ) 是一个符号图, 对于其每个点 v 赋予一个颜色列表 $L(v) \subseteq \mathbb{Z}$ 。符号图 (G, σ) 的 L -点染色是其一个点染色 c , 其满足:

- (1) 对于任何点 $v \in V(G)$, 都有 $c(v) \in L(v)$;
- (2) 对于任何边 $uv \in E(G)$, 都有 $c(u) \neq \sigma(uv)c(v)$ 。

如果符号图 (G, σ) 具有 L -点染色, 则称其为 L -点染色。如果符号图 (G, σ) 上的颜色列表 L 对于任何点 $v \in V(G)$ 都有 $|L(v)| = k$, 则称该列表 L 为 k -列表。如果对于任何一个 k -列表 L , 符号图 (G, σ) 都具有 L -点染色, 则称其是 k -点可选的。使得符号图 (G, σ) 是 k -点可选的最小整数 k 称为符号图 (G, σ) 的选择数, 记为 $ch(G, \sigma)$ 。显然有 $ch(G, \sigma) \geq \chi(G, \sigma)$ 。Jin, Kang 与 Steffen^[9]等研究了符号平面图的列表染色问题, 证明了 $ch(G, \sigma) \leq 5$ 对于任何符号平面图 (G, σ) 成立。

设 G 是一个图, 如果可以通过删除图 G 的某些点与边或者收缩图 G 的某些边得到图 H , 则称图 H 是图 G 的一个子式。著名的 Wagner 定理^[10]指出: 如果一个图是平面图当且仅当 K_5 与 $K_{3,3}$ 都不是它的子式。因此, 不含 K_5 -子式的图与不含 $K_{3,3}$ -子式的图均包含平面图。

本文证明了 $ch(G, \sigma) \leq 5$ 对于任何符号图 (G, σ) 成立, 其中图 G 不含有 K_5 -子式或 $K_{3,3}$ -子式。因此, 该结论推广了上述提及的 Jin, Kang 与 Steffen 等人的相应结论。

2 几类符号图的列表点染色

2.1 相关定义与术语

设 G 是一个平面图, C 是图 G 的一个圈。如果圈 C 关联 k 个顶点, 则称其为 k -圈。如果平面图 G 中的一个圈 C 的内部和外部都包含图 G 的顶点, 则称圈 C 是分离的。如果平面图 G 的除了无界面的所有面的边界都是 3-圈, 则称 G 是一个近似三角剖分(注意此时无界面的边界亦有可能是 3-圈)。如果平面图 G 的所有面的边界都是 3-圈, 称 G 是一个三角剖分。显然, 三角剖分一定是近似三角剖分。

设 G_1 与 G_2 为两个图, 则图 $G_1 \cap G_2$ 的点集为 $V(G_1) \cap V(G_2)$, 边集为 $E(G_1) \cap E(G_2)$, 图 $G_1 \cup G_2$ 的点集为 $V(G_1) \cup V(G_2)$, 边集为 $E(G_1) \cup E(G_2)$ 。

设 G 是一个不含 K_5 -子式的图, 或不含 $K_{3,3}$ -子式的图, 或平面图。如果在图 G 中任意添加一条边所得到的图含有 K_5 -子式, 或含有 $K_{3,3}$ -子式, 或是非平面图, 则称图 G 是边极大的。

设 φ 是图 G 的一个染色, 图 H 是图 G 的一个子

图, 则 $\varphi|_H$ 指的是图 H 的一个染色, 使得对于图 H 的任何一个点 v 都有 $\varphi|_H(v) = \varphi(v)$, 亦即 $\varphi|_H$ 是将染色 φ 限制在图 H 上的一个染色。

2.2 延拓引理

本节将引入几个重要的引理, 用于下一节的主要定理的证明。

引理 1^[9] 设 (G, σ) 是一个符号图, 其中 G 是一个近似三角剖分。记圈 $C = [v_1, v_2, \dots, v_p]$ 为 G 的无界面的边界。如果 L 是 (G, σ) 上的一个颜色列表, 其满足 $L(v_1) = \alpha, L(v_2) = \beta, \alpha \neq \beta\sigma(v_1v_2)$, 并且对于任何 $v \in V(C) \setminus \{v_1, v_2\}$ 有 $|L(v)| \geq 3$, 对于任何 $v \in V(G) \setminus V(C)$ 有 $|L(v)| \geq 5$, 则符号图 (G, σ) 具有 L -点染色。

引理 2 设 (G, σ) 是一个符号图, 其中 G 是一个近似三角剖分。设 L 是 (G, σ) 上的一个颜色列表, 其对于 $v \in V(G)$ 有 $|L(v)| \geq 5$ 。如果 H 是 G 的一个同构于 K_3 的子图, 且 λ 是 (H, σ) 的 L -点染色, 则 λ 可以延拓为符号图 (G, σ) 的 L -点染色。

证明 记符号图 (H, σ) 的 3 个顶点分别为 u, v, w 。由于 H 同构于 K_3 , 故它为图 G 的一个 3-圈。下面根据 H 是否为 G 的分离的 3-圈分两种情况讨论。

情况 1 H 不是 G 的分离 3-圈。

由于 G 是一个近似三角剖分, 故不妨假设 H 是 G 的最外面的 3-圈, 即 H 关联着 G 的无界面。此时, 在图 G 中适当地添加边(边上的符号可任意给定)使得其成为一个三角剖分, 仍记当前的符号图为 (G, σ) 。

令 $G' = G - w$ 。定义符号图 (G', σ) 上的列表 L' 如下: 如果 x 是 w 在 G 中的异于 u 与 v 的邻点, 则令 $L'(x) = L(x) \setminus \{\lambda(w)\sigma(wx)\}$, 否则令 $L'(x) = L(x)$ 。记 $u, w_1, w_2, \dots, w_t, v$ 是 w 在 G 中所有邻点, 且按该顺序依次排列在 w 的周围。由于 G 是一个三角剖分, 故 G' 是一个近似三角剖分, 其无界面的边界为圈 $C = [u, w_1, w_2, \dots, w_t, v]$ 。由于对于任何 $x \in V(C) \setminus \{u, v\}$ 有 $|L'(x)| \geq |L(x)| - 1 \geq 4$, 对于任何 $x \in V(G') \setminus V(C)$ 有 $|L'(x)| = |L(x)| \geq 5$, 故根据引理 1 可知: 符号图 (G', σ) 具有 L' -点染色 φ , 使得 $\varphi(u) = \lambda(u)$ 且 $\varphi(v) = \lambda(v)$ 。注意到 $\varphi(w_i) \neq \lambda(w)\sigma(ww_i)$ 对于所有的 $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ 成立。故将 φ 与 λ 组合起来即得到符号图 (G, σ) 的 L -点染色, 其中 u, v, w 的颜色分别为 $\lambda(u), \lambda(v), \lambda(w)$ 。

情况 2 H 是 G 的分离 3-圈。

设 (G_1, σ) 是所有点和边都在 H 上或其内部的符号图, (G_2, σ) 是所有点和边都在 H 上或其外部的符号图。显然, G_1 与 G_2 都是近似三角剖分且 H 不是 G_1 的分离 3-圈, 也不是 G_2 的分离 3-圈。

将情况 1 的讨论分别应用于符号图 (G_1, σ) 与 (G_2, σ) , 可以得到 (G_1, σ) 的 L -点染色 φ_1 与 (G_2, σ) 的 L -点染色 φ_2 , 使得 $\varphi_1(u) = \varphi_2(u) = \lambda(u)$, $\varphi_1(v) = \varphi_2(v) = \lambda(v)$

且 $\varphi_1(w) = \varphi_2(w) = \lambda(w)$ 。因此, 将 φ_1 与 φ_2 组合起来即得到符号图 (G, σ) 的 L -点染色, 其中 u, v, w 的颜色分别为 $\lambda(u), \lambda(v), \lambda(w)$ 。

引理 3 设 (G, σ) 是一个符号图, 其中 G 是 Wagner 图(如图 1 所示)。设 L 是 (G, σ) 上的一个颜色列表, 其对于 $v \in V(G)$ 有 $|L(v)| \geq 5$ 。如果 H 是 G 的一个同构于 K_2 的子图, 且 λ 是 (H, σ) 的 L -点染色, 则 λ 可以延拓为符号图 (G, σ) 的 L -点染色。

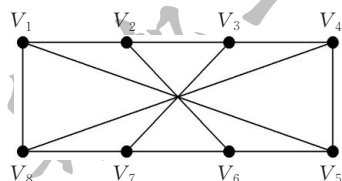


图 1 Wagner 图

证明 由 Wagner 图的结构对称性, 下面仅需考虑两种情况。

情况 1 $H = v_1v_2$ 。

此时, v_1 与 v_2 上的颜色分别为 $\lambda(v_1)$ 与 $\lambda(v_2)$, 且 $\lambda(v_1) \neq \lambda(v_2)\sigma(v_1v_2)$ 。接下来对图中剩余的点按如下顺序染色, 即分别取:

$$\begin{aligned} \lambda(v_3) &\in L(v_3) \setminus \{\lambda(v_2)\sigma(v_2v_3)\} \\ \lambda(v_4) &\in L(v_4) \setminus \{\lambda(v_3)\sigma(v_3v_4)\} \\ \lambda(v_5) &\in L(v_5) \setminus \{\lambda(v_1)\sigma(v_1v_5), \lambda(v_4)\sigma(v_4v_5)\} \\ \lambda(v_6) &\in L(v_6) \setminus \{\lambda(v_2)\sigma(v_2v_6), \lambda(v_5)\sigma(v_5v_6)\} \\ \lambda(v_7) &\in L(v_7) \setminus \{\lambda(v_3)\sigma(v_3v_7), \lambda(v_6)\sigma(v_6v_7)\} \\ \lambda(v_8) &\in L(v_8) \setminus \{\lambda(v_1)\sigma(v_1v_8), \lambda(v_4)\sigma(v_4v_8), \lambda(v_7)\sigma(v_7v_8)\} \end{aligned}$$

为点 $v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8$ 上的颜色。从而 λ 已延拓为符号图 (G, σ) 的 L -点染色。

情况 2 $H = v_1v_5$ 。

此时, v_1 与 v_5 上的颜色分别为 $\lambda(v_1)$ 与 $\lambda(v_5)$, 且 $\lambda(v_1) \neq \lambda(v_5)\sigma(v_1v_5)$ 。接下来对图中剩余的点按如下顺序染色, 即分别取:

$$\begin{aligned} \lambda(v_2) &\in L(v_2) \setminus \{\lambda(v_1)\sigma(v_1v_2)\} \\ \lambda(v_3) &\in L(v_3) \setminus \{\lambda(v_2)\sigma(v_2v_3)\} \\ \lambda(v_4) &\in L(v_4) \setminus \{\lambda(v_3)\sigma(v_3v_4), \lambda(v_5)\sigma(v_4v_5)\} \\ \lambda(v_6) &\in L(v_6) \setminus \{\lambda(v_2)\sigma(v_2v_6), \lambda(v_5)\sigma(v_5v_6)\} \\ \lambda(v_7) &\in L(v_7) \setminus \{\lambda(v_3)\sigma(v_3v_7), \lambda(v_6)\sigma(v_6v_7)\} \\ \lambda(v_8) &\in L(v_8) \setminus \{\lambda(v_1)\sigma(v_1v_8), \lambda(v_4)\sigma(v_4v_8), \lambda(v_7)\sigma(v_7v_8)\} \end{aligned}$$

为点 $v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8$ 上的颜色。从而 λ 已延拓为符号图 (G, σ) 的 L -点染色。

引理 4 设 (G, σ) 是一个符号图, 其中 G 是完全图 K_5 。设 L 是 (G, σ) 上的一个颜色列表, 其对于 $v \in V(G)$ 有 $|L(v)| \geq 5$ 。如果 H 是 G 的一个同构于 K_2 的子图, 且 λ 是 (H, σ) 的 L -点染色, 则 λ 可以延拓为符号图 (G, σ) 的 L -点染色。

证明 记 G 的顶点分别为 v_1, v_2, v_3, v_4 与 v_5 。由完

全图 K_5 的结构对称性, 不妨设 $H = v_1v_2$ 。

此时, v_1 与 v_2 上的颜色分别为 $\lambda(v_1)$ 与 $\lambda(v_2)$, 且 $\lambda(v_1) \neq \lambda(v_2)\sigma(v_1v_2)$ 。接下来对图中剩余的点按如下顺序染色, 即分别取:

$$\begin{aligned} \lambda(v_3) &\in L(v_3) \setminus \{\lambda(v_1)\sigma(v_1v_3), \lambda(v_2)\sigma(v_2v_3)\} \\ \lambda(v_4) &\in L(v_4) \setminus \{\lambda(v_1)\sigma(v_1v_4), \lambda(v_2)\sigma(v_2v_4), \lambda(v_3)\sigma(v_3v_4)\} \\ \lambda(v_5) &\in L(v_5) \setminus \{\lambda(v_1)\sigma(v_1v_5), \lambda(v_2)\sigma(v_2v_5), \lambda(v_3)\sigma(v_3v_5), \\ &\quad \lambda(v_4)\sigma(v_4v_5)\} \end{aligned}$$

为点 v_3, v_4, v_5 上的颜色。从而 λ 已延拓为符号图 (G, σ) 的 L -点染色。

2.3 列表点染色

本节将证明 $ch(G, \sigma) \leq 5$ 对于任何不含 K_5 -子式或 $K_{3,3}$ -子式的符号图 (G, σ) 成立。首先, 下列两个引理分别刻画了不含 K_5 -子式的图与不含 $K_{3,3}$ -子式的图的结构。

引理 5^[11] 如果图 G 是边极大的不含 K_5 -子式的图, 则 $G = G_1 \cup G_2$, 其中 G_1 是边极大的不含 K_5 -子式的图, G_2 是边极大的平面图或者 Wagner 图, 并且 $G_1 \cap G_2 = K_2$ 或 K_3 。

引理 6^[11] 如果图 G 是边极大的不含 $K_{3,3}$ -子式的图, 则 $G = G_1 \cup G_2$, 其中 G_1 是边极大的不含 $K_{3,3}$ -子式的图, G_2 是边极大的平面图或者完全图 K_5 , 并且 $G_1 \cap G_2 = K_2$ 。

将上述两个引理与第 2.2 节的延拓定理结合起来, 可证明本文的两个主要定理。

定理 1 如果 (G, σ) 是一个符号图, 其中 G 是不含 K_5 -子式的图。若 L 是 (G, σ) 上的一个颜色列表, 其对于 $v \in V(G)$ 有 $|L(v)| \geq 5$, 则符号图 (G, σ) 具有 L -点染色, 即有 $ch(G, \sigma) \leq 5$ 。

证明 在图 G 中适当地添加边使得其成为一个边极大的不含 K_5 -子式的图。对于新添加的每条边, 其符号均设定为正。仍记目前得到的符号图为 (G, σ) 。下面对图 G 的顶点数进行数学归纳, 证明定理 1 所述结论对于边极大的不含 K_5 -子式的符号图 (G, σ) 成立, 从而定理 1 得证。

由引理 5 可知, $G = G_1 \cup G_2$, 其中 G_1 是边极大的不含 K_5 -子式的图, G_2 是边极大的平面图或者 Wagner 图, 并且 $H = G_1 \cap G_2 = K_2$ 或 K_3 。由归纳假设, 符号图 (G_1, σ) 具有 L -点染色 φ_1 。在执行完染色 φ_1 后, 图 H 的所有顶点均已经染好。

此时若 $H = K_2$, 则当 G_2 是边极大的平面图(即三角剖分)时, 由引理 1 可知, $\varphi_1|_H$ 可延拓为符号图 (G_2, σ) 的 L -点染色 φ_2 ; 当 G_2 是 Wagner 图时, 由引理 3 可知, $\varphi_1|_H$ 亦可延拓为符号图 (G_2, σ) 的 L -点染色 φ_2 。无论上述何种情况, 将 L -点染色 φ_1 与 φ_2 组合起来即得到符号图 (G, σ) 的 L -点染色。

另一方面,若 $H=K_3$,则 G_2 不是 Wagner 图(因 Wagner 图中不含有三角形),从而 G_2 是边极大的平面图,即三角剖分。由引理 2 可知, $\varphi_{1|H}$ 可延拓为符号图 (G_2, σ) 的 L -点染色 φ_2 ,然后将 L -点染色 φ_1 与 φ_2 组合起来即得符号图 (G, σ) 的 L -点染色。

定理 2 如果 (G, σ) 是一个符号图,其中 G 是不含 $K_{3,3}$ -子式的图。若 L 是 (G, σ) 上的一个颜色列表,其对于 $v \in V(G)$ 有 $|L(v)| \geq 5$,则符号图 (G, σ) 具有 L -点染色,即有 $ch(G, \sigma) \leq 5$ 。

证明 在图 G 中适当地添加边使得其成为一个边极大的不含 $K_{3,3}$ -子式的图。对于新添加的每条边,其符号均设定为正。仍记目前得到的符号图为 (G, σ) 。下面对图 G 的顶点数进行数学归纳,证明定理 2 所述结论对于边极大的不含 $K_{3,3}$ -子式的符号图 (G, σ) 成立,从而定理 2 得证。

由引理 6 可知, $G = G_1 \cup G_2$,其中 G_1 是边极大的不含 K_5 -子式的图, G_2 是边极大的平面图或者完全图 K_5 ,并且 $H = G_1 \cap G_2 = K_2$ 。由归纳假设,符号图 (G_1, σ) 具有 L -点染色 φ_1 。在执行完染色 φ_1 后,图 H 的所有顶点均已经染好。

此时当 G_2 是边极大的平面图(即三角剖分)时,由引理 1 可知, $\varphi_{1|H}$ 可延拓为符号图 (G_2, σ) 的 L -点染色 φ_2 ;当 G_2 是完全图 K_5 时,由引理 4 可知, $\varphi_{1|H}$ 亦可延拓为符号图 (G_2, σ) 的 L -点染色 φ_2 。无论上述何种情况,将 L -点染色 φ_1 与 φ_2 组合起来即得到符号图 (G, σ) 的 L -点染色。

3 结论

定理 1 与定理 2 指出任何不含 K_5 -子式或 $K_{3,3}$ -子式的符号图的选择数至多为 5。由于一个图是平面图当且仅当 K_5 与 $K_{3,3}$ 都不是它的子式(Wagner 定理),故上述结论可以推出 Jin、Kang 与 Steffen 于 2016 年发表的如下结论:

推论 1 任何符号平面图的选择数至多为 5。

由于无符号的平面图可以看成是所有边都是正边的符号图,故可得如下结论:

推论 2 任何平面图的选择数至多为 5。

由于 Voigt^[12-13]证明了存在选择数恰好为 5 的平面图,故推论 2 中的上界 5 是最优的。由此可推得:定理 1

与定理 2 中关于 $ch(G, \sigma)$ 的上界 5 是最优的。

事实上,对于符号图而言,除了研究其点染色与列表点染色之外,还可以研究其点荫度与圆染色等相关的染色问题。感兴趣的读者可参考文献[14-15]。

参考文献:

- [1] Harary F. On the notion of balance of a signed graph[J]. Michigan Mathematical Journal, 1955, 2: 143-146.
- [2] Cartwright D, Harary F. Structural balance: a generalization of Heider's theory[J]. Psychological Review, 1956, 63: 277-293.
- [3] Newman M E J, Girvan M. Finding and evaluating community structure in networks[J]. Physical Review E, 2004, 69(2): 026113.
- [4] Ahn Y Y, Bagrow J P, Lehmann S. Link communities reveal multiscale complexity in networks[J]. Nature, 2010, 466(7307): 761-764.
- [5] Zaslavsky T. Signed graph coloring[J]. Discrete Mathematics, 1982, 39: 215-218.
- [6] Zaslavsky T. How colorful the signed graph[J]. Discrete Mathematics, 1984, 52: 279-284.
- [7] Zaslavsky T. Signed graphs and geometry[J]. arXiv: 1303.2770, 2013.
- [8] Máčajová E, Raspaud A, Škovič A M. The chromatic number of a signed graph[J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2016, 23(1).
- [9] Jin L, Kang Y, Steffen E. Choosability in signed planar graphs[J]. European Journal of Combinatorics, 2016, 52: 234-243.
- [10] Wagner K. Über eine eigenschaft der ebenen komplexe[J]. Mathematische Annalen, 1937, 114(1): 570-590.
- [11] Zhang X. List vertex arboricity of graphs without forbidden minors[J]. Ars Combinatoria, 2017, 133: 349-353.
- [12] Voigt M. List colourings of planar graphs[J]. Discrete Mathematics, 1993, 120: 215-219.
- [13] Voigt M. On 3-colorable non-4-choosable planar graphs[J]. Journal of Graph Theory, 1997, 24: 233-235.
- [14] Liu W, Gong C, Wu L, et al. A note on the vertex arboricity of signed graphs[J]. Utilitas Mathematica, 2018, 106: 251-258.
- [15] Kang Y, Steffen E. Circular coloring of signed graphs[J]. Journal of Graph Theory, 2018, 87(2): 135-148.