

外1-平面图的均匀点荫度

刘维婵, 张欣

LIU Weichan, ZHANG Xin

西安电子科技大学 数学与统计学院, 西安 710071

School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710071, China

LIU Weichan, ZHANG Xin. Equitable vertex arboricity of outer-1-planar graphs. *Computer Engineering and Applications*, 2018, 54(10): 51-53.

Abstract: An equitable tree- k -coloring is a vertex k -coloring. The sizes of any two color classes differ by at most 1, and the subgraph induced by any color class is a forest. The minimum integer k that a graph G admits an equitable tree- k -coloring is the equitable vertex arboricity of G . It is proven that the equitable vertex arboricity of every outer-1-planar graph is at most 3, and then the equitable vertex arboricity conjecture is verified for outer-1-planar graphs.

Key words: graph theory; outer-1-planar graph; equitable coloring; vertex arboricity

摘要: 图的均匀树 k -染色是图的一个点 k -染色, 其任何两个色类的大小相差至多为 1, 并且每个色类的导出子图是一个森林。使得图 G 具有均匀树 k -染色的最小整数 k 称为图 G 的均匀点荫度。证明了每个外 1-平面图的均匀点荫度至多为 3, 继而对于外 1-平面图证明了均匀点荫度猜想。

关键词: 图论; 外 1-平面图; 均匀染色; 点荫度

文献标志码: A **中图分类号:** O157.5 **doi:** 10.3778/j.issn.1002-8331.1703-0356

1 引言

图论是一门古老的数学分支, 它起源于 1736 年欧拉对于哥尼斯堡七桥问题的研究。近年来, 图论学科的发展非常迅速且应用广泛, 已渗透到诸如语言学、物理学、化学、电讯工程、计算机科学以及数学的其他分支中, 特别在计算机科学中, 图论在如形式语言、数据结构、分布式系统、操作系统等方面均扮演着重要的角色。

本文仅考虑简单的有限无向图。设 G 是一个图, 用 $\Delta(G)$, $\delta(G)$, $V(G)$ 与 $E(G)$ 分别表示图 G 的最大度, 最小度, 点集合与边集合, 用 $|G|$ 与 $\|G\|$ 分别表示图 G 的顶点数与边数。

本文主要研究图的均匀树染色问题。所谓图的均匀树 k -染色是一个从图的点集到数集 $\{1, 2, \dots, k\}$ 的映射 c , 其满足对于任何 $1 \leq i < j \leq k$, 都有 $|c^{-1}(i) - c^{-1}(j)| \leq 1$, 并且由点集 $c^{-1}(i)$ 导出的子图为一个森林。

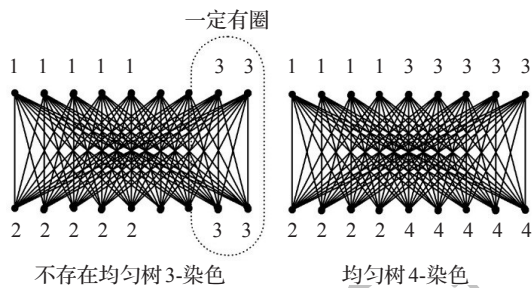
使得图 G 具有均匀树 k -染色的最小整数 k 称为图 G 的均匀点荫度, 记为 $va_-(G)$ 。例如, 完全二部图 $K_{9,9}$ 具有一个均匀树 2-染色 (每一个部染一种颜色即可), 而不具有均匀树 1-染色, 从而 $va_-(K_{9,9}) = 2$ 。然而, 容易验证完全二部图 $K_{9,9}$ 不具有均匀树 3-染色 (如图 1 的第一张图所示), 从而在研究图的均匀树染色的过程中, 还需要定义一个染色参数, 即图的均匀点荫度阈值。所谓图 G 的均匀点荫度阈值 $va_+^*(G)$ 是一个尽可能小的整数 k , 其使得对于任何一个不小于 k 的整数 t , 图 G 都具有均匀树 t -染色。例如, 完全二部图 $K_{9,9}$ 不具有均匀树 3-染色, 但是对于每个不小于 4 的整数 k 都具有均匀树 k -染色 (如图 1 的第二张图所示), 从而 $va_+^*(K_{9,9}) = 4$ 。显而易见, 对于任何图 G , 都有 $va_-(G) \leq va_+^*(G)$, 并且 $va_+^*(G)$ 与 $va_-(G)$ 的差值可以很大。

基金项目: 高等学校博士学科点专项科研基金新教师类项目 (No.20130203120021); 国家自然科学基金青年科学基金项目 (No.11301410); 陕西省自然科学基金面上基金项目 (No.2017JM1010); 中央高校基本科研业务费项目 (No. JB170706)。

作者简介: 刘维婵 (1996—), 女, 研究领域为应用数学; 张欣 (1986—), 通讯作者, 男, 博士, 副教授, 硕士研究生导师, 研究领域为图论及其应用, E-mail: xzhang@xidian.edu.cn。

收稿日期: 2017-03-21 **修回日期:** 2017-05-10 **文章编号:** 1002-8331(2018)10-0051-03

CNKI 网络出版: 2017-08-03, <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2127.TP.20170803.1630.042.html>

图1 $K_{9,9}$ 的均匀树染色

图的均匀点荫度的概念是由 Wu, Zhang 与 Li^[1]于 2013 年提出的,他们证明了 $va_-(G) \leq 3$ 对于所有的围长至少为 5 的平面图成立, $va_*(G) \leq 2$ 对于所有的围长至少为 6 的平面图以及外平面图成立等结论,同时提出了两个猜想。

猜想 1 对于任何图 G , 都有 $va_*(G) \leq \lceil (\Delta(G) + 1)/2 \rceil$ 。

猜想 2 存在常数 C , 其使得对于任何平面图 G 都有 $va_*(G) \leq C$ 。

到目前为止,猜想 1(均匀点荫度猜想)已被证明对于完全图以及完全二部图 $K_{n,n}$ ^[1], 最大度至少为 $|G|/2$ 的图^[2], 最大度至多为 3 的图^[3]与 5-退化图^[4]成立。猜想 2 则被 Esperet, Lemoine 与 Maffray^[5]于 2015 年解决,他们证明了 $va_*(G) \leq 4$ 对于所有的平面图 G 成立。由于 Chartrand 与 Kronk^[6]证明了平面图的点荫度至多为 3,故 Esperet, Lemoine 与 Maffray 认为考虑平面图是否具有均匀树 3-染色是十分有意义的。

2015 年, Zhang^[7]证明了 $va_-(G) \leq 3$ 对于任何两个长度至多为 4 的圈都是点不交的平面图以及围长为 4 且任何两个 4-圈不相邻的平面图成立。将该结论与 Wu, Zhang 与 Li 所给出的前述关于平面图的均匀点荫度的结论结合起来,本文提出如下猜想:

猜想 3 对于任何平面图 G , 都有 $va_*(G) \leq 3$ 。

如果一个图 G 可以画在一个平面上,使得其所有顶点都分布在 G 的外面上,并且每条边最多被交叉一次,则称图 G 为外 1-平面图。从这个定义容易看出,每个外 1-平面图都是平面图。因此,下文将针对外 1-平面图证明猜想 3,继而对外 1-平面图证明猜想 1。

2 外 1-平面图的结构

关于图的结构问题的研究是图论领域的一个热门研究方向,在该领域有很多结果,并且有一部分被用于图的染色问题的研究,读者可参阅文献[8-15]了解相关细节。

本章将主要讨论外 1-平面图的结构,然后在第 3 章将其用于研究外 1-平面图的相关染色问题。

设 G 是外 1-平面图,并且其已经画在平面上,使其所有的顶点 $v_1, v_2, \dots, v_{|G|}$ 都按照该次序以逆时针顺

序分布在 G 的外面上,并且每条边最多被交叉一次。按如此方式画好的外 1-平面图称为外 1-平面图。记 $\mathcal{V}[v_i, v_j] = \{v_i, v_{i+1}, \dots, v_j\}$, $\mathcal{V}(v_i, v_j) = \mathcal{V}[v_i, v_j] \setminus \{v_i, v_j\}$, 分别用 $\mathbb{G}[v_i, v_j]$, $\mathbb{G}(v_i, v_j)$ 表示由点集 $\mathcal{V}[v_i, v_j]$, $\mathcal{V}(v_i, v_j)$ 导出的子图。如果 $v_i v_j \in E(G)$ 并且 $|j-i| \neq 1, |G|-1$, 则称 $v_i v_j$ 为外 1-平面图 G 的一条弦。本章首先证明如下一个结构引理。

引理 1 设图 G 是一个 2-连通的外 1-平面图,则图 G 含有以下四种结构之一:

- (1) 边 uv , 其中 $d(u)=2, d(v) \leq 3$;
- (2) 长度为 3 的圈 $uvwu$, 其中 $d(u)=2$;
- (3) 长度为 4 的圈 uxv_yu , 其中 $d(u)=d(v)=2$;
- (4) 长度为 4 的圈 uxv_yu , 其中 $d(u)=d(v)=3, uv \in E(G)$ 。

此外,如果图 G 含有结构(3)或者结构(4),则按如下方式得到的图 H 依然是外 1-平面图:先将点 u 删除,此时若 $xy \in E(G)$,则将 x 与 y 用一条新边连接。

证明 不妨假设图 G 是一个外 1-平面图,且不含有上述四种结构之一。如果图 G 不含有交叉弦,则其为外平面图,而众所周知的是每个外平面图必定含有一条边 uv , 其中 $d(u)=2, d(v) \leq 3$, 从而 G 包含结构(1)。

设弦 $v_i v_j$ 与弦 $v_k v_l$ 在图 G 中交叉,其中 $1 \leq i < k < j < l$, 并且 $\mathbb{G}[v_i, v_l]$ 仅含有两条交叉弦,即 $v_i v_j$ 与 $v_k v_l$ 。如果 $k-i \geq 3$, 则 $\mathbb{G}[v_i, v_k]$ 中必定含有弦,否则根据图 G 的 2-连通性可推出子图 $\mathbb{G}(v_i, v_k)$ 是一条路。由于 $|\mathcal{V}(v_i, v_k)| = k-i-1 \geq 2$, 故在 $\mathcal{V}(v_i, v_k)$ 中必定含有两个相邻的度数为 2 的点,因此图 G 含有结构(1)。另一方面,如果 $\mathbb{G}[v_i, v_k]$ 中含有弦,则取其中的一条弦 $v_s v_t$, 使得 $i \leq s < t \leq k$ 并且 $\mathbb{G}[v_s, v_t]$ 只包含一条弦,即 $v_s v_t$ 。此时,再次根据图 G 的 2-连通性又可推出 $t-s=2$ 且 $v_s v_{s+1}, v_{s+1} v_t \in E(G)$, 从而 $v_s v_{s+1} v_t v_s$ 是一个长度为 3 的圈,并且 $d(v_{s+1})=2$, 于是图 G 含有结构(2)。因此, $k-i \leq 2$ 。同理可证, $l-j \leq 2, j-k \leq 2$ 。

如果 $k-i=2$, 则必定有 $d(v_{k-1})=2, v_{k-1} v_k \in E(G)$ 。如果 $d(v_k) \leq 3$, 则图 G 含有结构(1)。如果 $d(v_k) \geq 4$, 则必定有 $v_i v_k \in E(G)$ 或者 $v_k v_j \in E(G)$ 。此时若 $v_i v_k \in E(G)$, 则 $v_i v_{k-1} v_k v_i$ 是一个长度为 3 的圈, 并且 $d(v_{k-1})=2$ 。若 $v_k v_j \in E(G)$, 则 $v_k v_{j-1} v_j v_k$ 是一个长度为 3 的圈, 并且 $d(v_{j-1})=2$ 。无论何种情况,均可推出图 G 含有结构(2)。因此, $k-i=1$ 。此时如果 $v_i v_k \notin E(G)$, 则点 v_l 是图 G 的一个割点,此与图的 2-连通性矛盾,因此有 $v_i v_k \in E(G)$ 。

同理可证 $l-j=1$ 且 $v_j v_l \in E(G)$ 。此时若 $j-k=2$, 则 $d(v_{k+1})=2, v_k v_{k+1} \in E(G)$ 。如果 $d(v_k) \leq 3$, 则图 G

含有结构(1)。如果 $d(v_k) \geq 4$, 则 $v_k v_{k+1} v_j v_k$ 是一个长度为3的圈, 从而图 G 含有结构(2)。因此, $j-k=1$ 。此时如果 $v_k v_j \notin E(G)$, 则 $v_k v_l v_j v_i v_k$ 是一个长度为4的圈, 并且 $d(v_k) = d(v_j) = 2$, 于是图 G 含有结构(3)。如果 $v_k v_j \in E(G)$, 则 $v_k v_l v_j v_i v_k$ 是一个长度为4的圈, 并且 $d(v_k) = d(v_j) = 3, v_k v_j \in E(G)$, 于是图 G 含有结构(4)。无论上述何种情况, 均可验证 $G - v_k + v_i v_l$ 依然是外1-平面图。

3 外1-平面图的染色

本章首先考虑与图的树染色密切相关的无圈点染色。图的无圈点 k -染色是图的一个正常的点 k -染色, 其使得任何两个色类的导出子图是一个森林。使得图 G 具有无圈点 k -染色的最小整数 k 称为图 G 的无圈点色数, 记为 $\chi_a(G)$ 。Borodin^[8]证明了每个平面图的无圈点色数至多为5, 并且这个上界5是紧的。下面考虑外1-平面图的无圈点染色问题。

定理1 如果 G 是外1-平面图, 则 $\chi_a(G) \leq 4$ 。

证明 假如该结论不成立, 则取 G 为该定理的极小反例, 即 $\chi_a(G) > 4$, 且对于任何图 H , 只要 $|H| + \|H\| < |G| + \|G\|$, 则 $\chi_a(H) \leq 4$ 。显然, 图 H 是2-连通的。由引理1, 图 H 包含引理所述的四种结构之一。

情况1 图 H 包含边 uv , 其中 $d(u) = 2, d(v) \leq 3$ 。

此时, 不妨设 $d(v) = 3$ 。记 u 的另外一个邻点为 w , v 的另外两个邻点为 v_1 与 v_2 。由图 H 的极小性可知图 $H' = H - u$ 具有一个无圈点4-染色 c 。如果 $c(v) \neq c(w)$, 则用颜色 $c(u) \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{c(v), c(w)\}$ 染点 u 。如果 $c(v) = c(w)$, 则用颜色 $c(u) \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{c(v), c(v_1), c(v_2)\}$ 染点 u 。无论上述何种情况均可得到图 G 的一个无圈点4-染色, 矛盾。

情况2 图 H 包含长度为3的圈 $uvwu$, 其中 $d(u) = 2$ 。

由图 H 的极小性可知图 $H' = H - u$ 具有一个无圈点4-染色 c 。此时用颜色 $c(u) \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{c(v), c(w)\}$ 染点 u 即可得到图 G 的一个无圈点4-染色, 矛盾。

情况3 图 H 包含长度为4的圈 $uxvyu$, 其中 $d(u) = d(v) = 2$ 。

由引理1与图 H 的极小性可知图 $H' = H - u + xy$ 具有一个无圈点4-染色 c 。此时用颜色 $c(u) \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{c(x), c(y)\}$ 染点 u 即可得到图 G 的一个无圈点4-染色, 矛盾。

情况4 图 H 包含长度为4的圈 $uxvyu$, 其中 $d(u) = d(v) = 3, uv \in E(G)$ 。

由引理1与图 H 的极小性可知图 $H' = H - u + xy$ 具有一个无圈点4-染色 c 。此时用颜色 $c(u) \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{c(x), c(y), c(v)\}$ 染点 u 即可得到图 G 的一个无圈点4-染色, 矛盾。

综上所述, 该定理的极小反例不存在, 从而结论成立。

注1 由定理1给出的外1-平面图的无圈点色数的上界4是紧的, 例如完全图 K_4 是一个外1-平面图, 其无圈点色数恰好是4。

定理2 如果 G 是外1-平面图, 则 $va_-(G) \leq 3$ 。

证明 由于每个平面图的均匀点荫度阈值至多为4^[5], 故此处仅需证图 G 具有均匀树3-染色。由定理1, 可以用四种颜色对图 G 进行染色, 即将图 G 的点集分成四个两两不交的子集 V_1, V_2, V_3, V_4 , 使得由任何两个子集导出的子图是森林。不妨假设 $|V_1| \leq |G|/4$ 。由于

$$\sum_{i=2}^4 (|V_1| + |V_i|) = |G| + 2|V_1|$$

故必定存在 $i \in \{2, 3, 4\}$, 使得 $|V_1| + |V_i| \geq |G|/3 + 2|V_1|/3$ 。因此, 不妨设 $|V_1| + |V_2| \geq |G|/3 + 2|V_1|/3$, 从而 $|V_2| \geq |G|/3 - |V_1|/3$ 。于是可以取到 V_2 的一个大小为 $\lfloor |G|/3 \rfloor - |V_1|$ 的子集 V_2^1 , 使得 $S_1 := V_1 \cup V_2^1$ 的导出子图是森林, 并且 $|S_1| = \lfloor |G|/3 \rfloor$ 。

下面考虑集合 $U_2 := V_2 \setminus V_2^1, U_3 := V_3, U_4 := V_4$ 。由于 $|U_2| + |U_3| + |U_4| = |G| - |S_1| \geq 2|G|/3$, 故不妨假设 $|U_2| \leq 2|G|/9$ 。由于

$$\sum_{i=3}^4 (|U_2| + |U_i|) = |G| - |S_1| + |U_2| \geq 2|G|/3 + |U_2|$$

故必定存在 $i \in \{3, 4\}$, 使得 $|U_2| + |U_i| \geq |G|/3 + |U_2|/2$ 。因此, 不妨设 $|U_2| + |U_3| \geq |G|/3 + |U_2|/2$, 从而 $|U_3| \geq |G|/3 - |U_2|/2$ 。于是可以取到 U_3 的一个大小为 $\lfloor |G|/3 \rfloor - |U_2|$ 的子集 U_3^1 , 使得 $S_2 := U_2 \cup U_3^1$ 的导出子图是森林, 并且 $|S_2| = \lfloor |G|/3 \rfloor$ 。

最后, 令 $S_3 := V(G) \setminus (S_1 \cup S_2)$, 则 $S_3 \subset V_3 \cup V_4$ 。从而 S_3 的导出子图是森林, 并且 $\lfloor |G|/3 \rfloor \leq |S_3| \leq \lfloor |G|/3 \rfloor$ 。

因此, 图 G 具有均匀树3-染色, 其三个色类分别为 S_1, S_2, S_3 。

注2 定理2的证明过程说明, 只要事先给出了外1-平面图的无圈点4-染色, 则必定可以在多项式时间内构造出它的均匀树3-染色。

4 结论

设 G 是外1-平面图, 如果 $\Delta(G) \geq 4$, 则由定理2知 $va_-(G) \leq 3 \leq \lceil (\Delta(G) + 1)/2 \rceil$ 。如果 $2 \leq \Delta(G) \leq 3$, 则由于Zhang在文献[3]中证明了任何最大度至多为3的图都有 $va_-(G) \leq 2$, 故依然有 $va_-(G) \leq \lceil (\Delta(G) + 1)/2 \rceil$ 。如果 $\Delta(G) \leq 1$, 则图 G 本身就是一个树, 从而 $va_-(G) = 1 = \lceil (\Delta(G) + 1)/2 \rceil$ 。因此得到:

(下转80页)