2017年12月　　运筹学学报　　第21卷 第4期
Dec., 2017　　Operations Research Transactions　　Vol.21 No.4

DOI: 10.15960/j.cnki.issn.1007-6093.2017.04.009

1-平面图及其子类的染色*

张　欣[1,†]　刘维婵[1]

摘要 如果图G可以嵌入在平面上, 使得每条边最多被交叉 1 次, 则称其为1-可平面图, 该平面嵌入称为1-平面图. 由于 1-平面图G中的交叉点是图G的某两条边交叉产生的, 故图G中的每个交叉点c都可以与图G中的四个顶点(即产生c的两条交叉边所关联的四个顶点)所构成的点集建立对应关系, 称这个对应关系为θ. 对于 1-平面图G中任何两个不同的交叉点c_1与c_2(如果存在的话), 如果$|\theta(c_1)\cap\theta(c_2)|\leqslant 1$, 则称图$G$是NIC-平面图; 如果$|\theta(c_1)\cap\theta(c_2)|=0$, 即$\theta(c_1)\cap\theta(c_2)=\varnothing$, 则称图$G$是 IC-平面图. 如果图$G$可以嵌入在平面上, 使得其所有顶点都分布在图$G$的外部面上, 并且每条边最多被交叉一次, 则称图$G$为外 1-可平面图. 满足上述条件的外 1-可平面图的平面嵌入称为外 1-平面图. 现主要介绍关于以上四类图在染色方面的结果.

关键词 1-平面图, NIC-平面图, IC-平面图, 外1-平面图, 染色

中图分类号 O157.5

2010 数学分类号 05C10, 05C15

The coloring of the class of 1-planar graphs and its subclasses*

ZHANG Xin[1,†]　LIU Weichan[1]

Abstract A graph G is 1-planar if it can be embedded on a plane so that each edge is crossed by at most one other edge, and such a 1-planar embedding of G is a 1-plane graph. Since every crossing c in a 1-plane graph is generalized by one edge crossing the other edge, there is a mapping θ from c to a set of four vertices of G that are the end-vertices of the two edges crossing at c. For any two distinct crossings c_1 and c_2 (if exist) of a 1-plane graph G, if $|\theta(c_1)\cap\theta(c_2)|\leqslant 1$, then G is an NIC-planar graph, and if $|\theta(c_1)\cap\theta(c_2)|=0$, that is, $\theta(c_1)\cap\theta(c_2)=\varnothing$, then G is an IC-planar graph. If a graph G can be embedded on a plane so that all vertices are on its outerface and each edge is crossed by at most one other edge, then G is an outer-1-planar graph, and such an embedding of G is an outer-1-plane graph. This paper surveys the results on the colorings of the above four classes of graphs.

Keywords 1-planar graph, NIC-planar graph, IC-planar graph, outer-1-planar graph, coloring

Chinese Library Classification O157.5

收稿日期：2017-07-07

* 基金项目：陕西省自然科学基础研究计划面上基金(No. 2017JM1010), 中央高校基本科研业务费(No. JB170706), 国家自然科学基金青年科学基金(No. 11301410), 国家级大学生创新创业训练计划(No. 201710701125)

1. 西安电子科技大学数学与统计学院，西安 710071; School of Mathematical and Statistics, Xidian University, Xi'an 710071, China

† 通信作者 E-mail: xzhang@xidian.edu.cn

2010 Mathematics Subject Classification 05C10, 05C15

0 引 言

我们能否用4种颜色来为每张地图的各个区域着色并使得相邻的区域具有不同的颜色? 这是著名的四色问题, 其最初是由F. Guthrie于1852年10月23日提出的, 并且他猜想四色问题的答案是肯定的. 这个问题看起来很简单, 因此当时的数学研究者觉得其充其量仅仅是一道练习题而已. 然而, 事实并非如此, 19世纪的著名数学家A. De Morgan, W. R. Hamilton 等人都在此问题上折戟. 1872年, 英国当时最著名的数学家A. Cayley正式向伦敦数学学会提出了这个问题, 于是四色猜想成了世界数学界关注的问题, 世界上许多一流的数学家都纷纷参加了四色猜想的大会战.

1879年与1880年, A. Kempe与P. G. Tait分别宣称其证明了四色猜想, 这让当时的数学界欢呼雀跃. 然而, 1890年与1891年, P. Heawood与J. Petersen分别指出A. Kempe与P. G. Tait的证明中存在不可修正的错误. 与此同时, Heawood[1]于1890年证明了可以用5种颜色来为每张地图的各个区域着色并使得相邻的区域具有不同的颜色, 即五色定理. 在此之后, 人们发现四色问题出人意料地异常困难, 越来越多的数学家虽然对此绞尽脑汁, 但一无所获. 于是人们开始认识到, 这个貌似容易的题目, 其实是一个可与Fermat猜想相媲美的难题. 进入20世纪以来, 科学家们对四色猜想的证明基本上是按照Kempe[2]的想法在进行. 在Kempe的想法的基础上, Appel, Haken与Koch[3,4] 于1976年在美国伊利诺斯大学的两台不同的电子计算机上用了1 200个小时证明了四色猜想, 轰动了全世界. 1997年, Robertson等[5]基于上述思想与计算机, 利用一个更简化的算法再次验证了四色猜想. 然而, 四色猜想的证明并未止步, 计算机证明无法给出令人信服的思考过程.

四色问题本质上是一个图的染色问题，它的提出标志着图的染色问题的起源. 四色问题的研究对象实际上可以抽象为一个平面图, 研究内容即为平面图的点染色问题.

如果一个图G可以嵌入在平面上, 使得边只可能在端点处相交, 则称图G是可平面图, 此嵌入为图G的一个平面嵌入, 同时将已经嵌入到平面内的这个图称为平图, 或者平面图. 一个平面图G的顶点和边把整个平面分割成若干连通区域, 这些区域的闭包称为平面图G的面. 其中, 外部无限区域称为外部面, 其余的面称为内部面. 设G是一个图, 用$V(G)$与$E(G)$分别表示图G的点集与边集. 若G是一个平面图, 则用$F(G)$表示图G的面集. 如果图G是一个连通的平面图, 则在其上满足著名的欧拉公式:

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2.$$

四色问题可以按照如下方式转换成图的染色问题. 首先,将地图的每个区域看成一个顶点, 如果两个点代表的区域具有公共的边界, 则将它们之间连一条边. 显然, 如此作出来的图是一个平面图G. 这样一来, 四色问题就转化为用至多四种颜色染图G的顶点使得相邻的顶点得到不同的颜色. 将该思想进一步抽象出来, 即可得到图的顶点染色的定义.

图G的一个正常点k-染色是一个从$V(G)$到$\{1, 2, \cdots, k\}$的个映射φ, 其对于任何$uv \in E(G)$, 都满足$\varphi(u) \neq \varphi(v)$. 使得图$G$具有正常点$k$-染色的最小整数$k$称为图$G$的点色数, 记为$\chi(G)$.

根据上述定义, 四色猜想即可表述为: $\chi(G) \leqslant 4$. 同时, Heawood[1]于1890年证明的五色定理即: $\chi(G) \leqslant 5$.

在图论的研究历史中, 除了研究图的点染色, 还可以研究图的边染色、全染色、点-面染色、边-面染色、点-边-面染色、列表染色等等其他的染色问题. 这些问题在平面图上的研究已经取得了很多不错的结果[6].

1 1-平面图及其几个子类简介

1.1 k-平面图与1-平面图

一种普遍的观点认为, 拓扑图论是对图的布局的研究, 它也是起源于四色问题. 后来, 硅片上电路的布局问题推动了拓扑图论的发展. 由于电路中的交叉会引起一定的问题(如短路,电磁感应等), 故在电路设计的过程中需要寻找具有无交叉线的或者交叉线较少的布局. 当在电路设计的过程中如若交叉不可避免, 则自然需要对于交叉线的分布做一定的约定与处理. 例如, 可以要求每条线不能被交叉太多次. 基于这个思想, 可以定义一类图, 即k-平面图.

如果图G可以嵌入在平面上,使得每条边最多被交叉k次, 则称其为k-可平面图, 同时将已经嵌入到平面内的这个图称为k-平面图. 显然, 对于任何图G, 都存在一个整数k, 使得图G是一个k-可平面图. 当$k=0$时, 图G即为上述所提及的可平面图. 当$k=1$时, 图G则称为1-可平面图. 如果将1-可平面图嵌入在平面上使得每条边最多被交叉一次并且交叉总数最少, 则可以得到一个特殊的平面嵌入, 其称为1-平面图(见图 1).

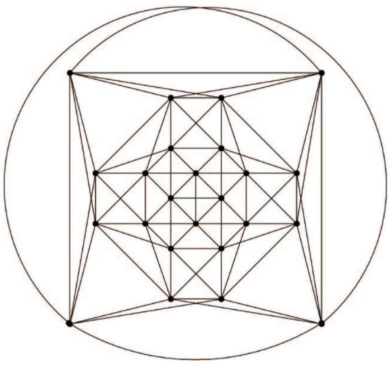

图1 1-平面图

关于1-平面图的相关研究起源于1976年. 当时, Ringel[7]考虑了平面图的点-面染色问题. 所谓平面图G的点-面k-染色即是一个从$V(G)\cup F(G)$到$\{1,2,\cdots,k\}$的映射φ, 其对于图G中任意两个相邻或关联的元素$\alpha,\beta\in V(G)\cup F(G)$, 都有$\varphi(\alpha)\neq\varphi(\beta)$. 使得平面图$G$具有点-面$k$-染色的最小整数$k$称为图$G$的点-面色数, 记为$\chi_{vf}(G)$. Ringel[7]证明了$\chi_{vf}(G)\leqslant 7$对每个平面图都成立, 并猜想$\chi_{vf}(G)$的上界可以降至6. 目前这个猜想已被Borodin[8,9]证实.

设G是一个平面图, 现按照如下规则构造一个新图G'. 首先, 将$V(G)\cup F(G)$中的每个元素分别对应图G'中一个点. 如果G'中的两个点在G中所对应的元素是相邻的或相关联的, 则在G'中用一条边将这两个点连接起来. 容易看出, 图G'恰好为一个1-平面图. 因此,平面图G的点-面染色问题则转化为1-平面图G'的点染色问题. 事实上, Ringel亦指出, 对于上述1-平面图G', 有$\chi(G')=\chi_{vf}(G)$, 并且任何一个1-平面图的点染色问题也可以类

似地转换为某个平面图的点-面染色问题. 因此, Ringle[7]的研究表明, 对于任何一个1-平面图G都有$\chi(G) \leqslant 7$, 而Borodin[8,9]则进一步证明了$\chi(G) \leqslant 6$. 注意到完全图K_6是一个1-可平面图并且其点色数为6, 故Borodin得到的关于1-平面图的点色数的上界6是紧的.

1.2 NIC-平面图与IC-平面图

设G是一个1-平面图. 如果图G存在交叉点(此时图G必然不是平面图), 则其必然是由图G的某两条边相互交叉所产生, 于是图G中的每个交叉点c都可以与图G的四个顶点(即产生c的两条交叉边所关联的四个顶点)所构成的点集建立对应关系, 记这个对应关系为θ. 对于图G的任何两个不同的交叉点c_1与c_2(如果存在的话), 可以验证[10]$|\theta(c_1) \cap \theta(c_2)| \leqslant 2$. 因此, 很自然地可以根据$|\theta(c_1) \cap \theta(c_2)|$的取值情况定义1-平面图类的两个子类.

设G是一个1-平面图, 对于图G的任何两个不同的交叉点c_1与c_2(如果存在的话), 如果$|\theta(c_1) \cap \theta(c_2)| \leqslant 1$, 则称图$G$是NIC-平面图(见图 2); 如果$|\theta(c_1) \cap \theta(c_2)| = 0$, 即$\theta(c_1) \cap \theta(c_2) = \varnothing$, 则称图$G$是IC-平面图(见图 3).

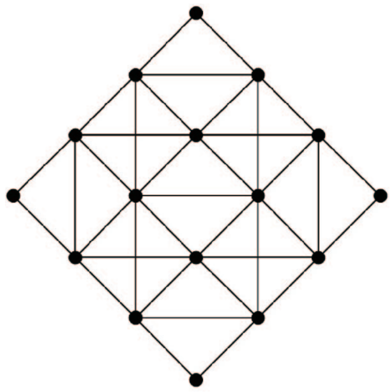

图2 NIC-平面图

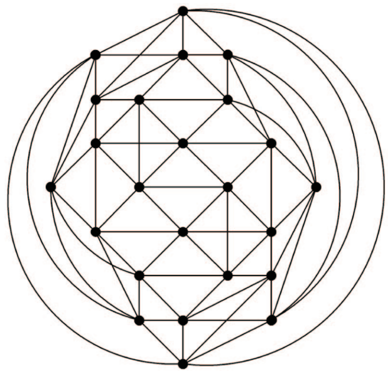

图3 IC-平面图

IC-平面图的概念是由Alberson[11]于2008年提出的. 2010年, Král与Stacho[12]证明了每个IC-平面图都是5-可染的, 并且该上界5是紧的. Král与Stacho的证明具有很强的技巧. 他们将IC-平面图的点染色问题转化为了平面图的圈染色问题(即对平面图的点进行染色使得图中每个面所关联的任何两个顶点都染不同的颜色). 事实上, 对于每个IC-平面图G, 都可以在其基础上适当地加边(不加重边), 得到一个新的IC-平面图G', 其满足条件: 如果将图G'中的每对相互交叉的边删去, 则得到一个所有面的度数是3或4的平面图G''. 容易看出, 图G'的点染色与图G''的圈染色是完全等价的. 因此, 图G''的圈色数即为原IC-平面图G的点色数的上界.

另一方面, Zhang[10]于2014年提出了NIC-平面图的概念, 证明了每个NIC-平面图G的边数$|E(G)|$的上界为$3.6(|V(G)|-2)$, 并且该上界是紧的, 同时给出了完全多部图是NIC-平面图的充分必要条件.

关于NIC-平面图与IC-平面图的画法, 判定及其相关算法的最新研究可参阅Bachmaier等[13]与Brandenburg[14]最近发表在Arxiv上的论文.

1.3 外1-平面图

如果图G可以嵌入在平面上, 使得其所有顶点都分布在图G的外部面上, 并且每条边

最多被交叉一次, 则称图G为外1-可平面图. 外1-可平面图的满足上述条件的平面嵌入称为外1-平面图(见图4). 从外1-平面图的定义容易看出, 每个外1-平面图都是平面图.

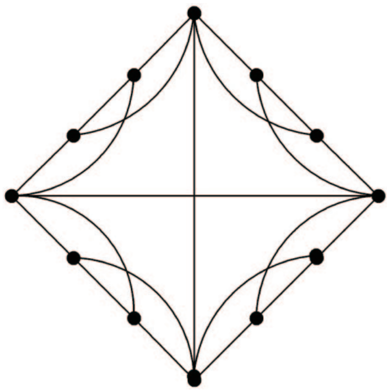

图4 外1-平面图

外1-平面图的概念最初是由Eggleton[15]于1986年提出的, 他称其为边交叉数为1的外平面图. 在Eggleton提出该概念后的16年间, 该图类鲜被研究. 2012年, Zhang, Liu与Wu[16]首次研究了外1-平面图的结构与染色问题(他们称其为伪外平面图), 得到了一些不错的结果. 2016年, Auer[17]等研究了外1-平面图的画法及其相关算法问题, 同时证明了每个外1-平面图G的边数$|E(G)|$的上界为$2.5|V(G)|-2$.

2 1-平面图的染色

本节旨在综述与1-平面图(以下仅考虑简单图)相关的染色结果. 如无特殊说明, 本节所使用的数学符号的意义可参阅Bondy与Murty[6]的经典著作《Graph Theory》.

2.1 点染色、列表点染色、无圈点染色与均匀点染色

注意到任何1-平面图G的边数最多为$4(|V(G)|-2)$[18,19], 即$|E(G)|\leqslant 4|V(G)|-8$, 故任何1-平面图的最小度$\delta(G)\leqslant 7$. Fabrici与Madaras[20]构造了一个7-正则的1-平面图(如图1), 从而上述关于$\delta(G)$的上界7是最好的. 因此, 由贪婪算法容易看出: 对于任何1-平面图都有$\chi(G)\leqslant 8$. 然而, 此处的上界8并不是紧的.

正如第1.1小节所述, 关于1-平面图的点染色, Borodin[8,9]证明了如下结论:

定理 2.1 如果图G是一个1-平面图, 则$\chi(G)\leqslant 6$, 并且该上界6是紧的.

2016年, 宋立莉[21]考虑了具有圈条件限制的1-平面图的点染色, 证明了:

定理 2.2 如果图G是一个不含4-圈且不含相邻的度数为5的点的1-平面图, 则$\chi(G)\leqslant 5$.

2017年, 王晔与孙磊[22]又证明了:

定理 2.3 如果图G是一个不含3-圈与4-圈(亦即围长$g(G)\geqslant 5$)的1-平面图, 则$\chi(G)\leqslant 5$.

如果对图G的每一个顶点v指定一个颜色列表$L(v)$, φ是图G的一个点染色, 其对于任意$v\in V(G)$, 都存在一个它可以用的颜色$\varphi(v)\in L(v)$, 使得若$xy\in E(G)$, 则$\varphi(x)\neq$

$\varphi(y)$, 则称φ是G的一个点L-染色, 也称G是点L-可染的. 若对任意指定的颜色列表L(其对任意$v \in V(G)$都有$|L(v)| \geqslant k$), G都存在一个点L-染色, 则称G是列表点k-可染的, 或称G是点k-可选的. 使得图G是点k-可选的最小整数k称为图G的列表点色数, 记为$ch(G)$. 容易看出, 对于任何图G都满足: $ch(G) \geqslant \chi(G)$.

2006年, Albertson与Mohar[23]首次考虑了1-可嵌入到曲面上的图的列表点染色问题. 所谓将图1-嵌入到曲面, 指的是将图嵌入在曲面上使得每条边最多被交叉1次. Albertson与Mohar[23]证明了

定理 2.4 如果图G可以1-嵌入到欧拉亏格为g的曲面上, 则$ch(G) \leqslant R(g)$, 其中$R(g) = \lfloor \frac{1}{2}(9 + \sqrt{32g + 17}) \rfloor$.

注意到平面的欧拉亏格为2, 故上述定理可以推出任何1-平面图的列表点色数最多为9. 然而这个推论似乎意义不大, 这是因为每个1-平面图都含有度数至多为7的点, 故由贪婪算法亦可看出: 对于任何1-平面图G都有$ch(G) \leqslant 8$.

2008年, Wang与Lih[24]将1-平面图的列表点色数的上界8进一步改进,得到如下结论:

定理 2.5 如果图G是一个1-平面图, 则$ch(G) \leqslant 7$.

事实上, Wang与Lih在证明定理2.5的过程中考虑的是平面图的列表点-面染色问题, 其等价于1-平面图的列表点染色问题. 然而,定理2.5中的上界7是不是可改进的目前尚未知晓.

如果φ是图G的一个正常点k-染色, 并且图G中的任何圈都关联至少3种颜色(即任何两种颜色的导出子图是一个森林), 则称染色φ为图G的无圈点k-染色. 使得图G具有无圈点k-染色的最小整数k称为图G的无圈点色数, 记为$\chi_a(G)$. 类似于图的列表点染色,可以定义图的列表无圈点染色与列表无圈点色数$ch_a(G)$.

2001年, Borodin[25]首次考虑了1-平面图的无圈点染色问题，证明了：

定理 2.6 如果图G是一个1-平面图, 则$\chi_a(G) \leqslant ch_a(G) \leqslant 20$.

同样，上述定理中的上界20是不是紧的仍是未知, 然而它却是到目前为止最好的结果.

设φ是图G的一个正常点k-染色, 如果对于φ中出现的任何两个颜色i, j都有$||\varphi^{-1}(i)| - |\varphi^{-1}(j)|| \leqslant 1$, 则称染色$\varphi$为图$G$的一个均匀点$k$-染色. 使得图$G$具有均匀点$k$-染色的最小整数$k$称为图$G$的均匀点色数, 记为$\chi_{eq}(G)$. 另一方面, 在图的均匀染色的研究领域还有一个值得研究的染色参数, 即图的均匀点色数阀值. 所谓图G的均匀点色数阀值$\chi^*_{eq}(G)$, 即使得图G对于任何不小于k的整数t都具有均匀点t-染色的最小整数k. 容易看出, $\chi(G) \leqslant \chi_{eq}(G) \leqslant \chi^*_{eq}(G)$. 注意到, $\chi_{eq}(G)$与$\chi^*_{eq}(G)$不一定相等, 并且它们之间的差可以是任意大的. 例如, 对于完全二部图$K_{2m+1,2m+1}$, 有$\chi_{eq}(G) = 2$, 但是$\chi^*_{eq}(G) = 2m + 2$. 关于均匀点染色的如上两个染色参数, 分别对应着以下两个著名猜想.

猜想 2.1 如果图G是一个异于完全图与奇圈的连通图, 则$\chi_{eq}(G) \leqslant \Delta(G)$.

猜想 2.2 如果图G是一个异于完全图、奇圈与完全二部图$K_{2m+1,2m+1}$的连通图, 则$\chi^*_{eq}(G) \leqslant \Delta(G)$.

其中, 猜想2.1由Meyer[26]于1973年提出, 称为均匀染色猜想; 猜想2.2由Chen, Lih与Wu[27]于1994年提出, 称为均匀Δ-染色猜想, 或Chen-Lih-Wu猜想. 容易看出, 猜想2.2强于猜想2.1. 关于这两个猜想的最新研究进展可参阅李国伟[28,29]的综述文章.

2016年, Zhang[30]首次考虑了1-平面图的均匀点染色, 得到了如下一个结果:

定理 2.7 如果图G是一个1-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 17$时, 有$\chi^*_{eq}(G) \leqslant \Delta(G)$.

最近, Zhang, Wang与Xu[31]对上述结论进行了改进, 证明了

定理 2.8 如果图G是一个1-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 15$时, 有$\chi^*_{eq}(G) \leqslant \Delta(G)$.

事实上, 在Chen-Lih-Wu猜想尚未被完全解决的前提条件下, 改进定理2.8中关于最大度$\Delta(G)$的下界仍然是一个有意义的研究方向.

2.2 边染色、无圈边染色、均匀边染色与线性荫度

图G的一个正常边k-染色是一个从$E(G)$到$\{1,2,\cdots,k\}$的一个映射φ, 其对于G的任何两条相邻的边e_1与e_2, 都满足$\varphi(e_1) \neq \varphi(e_2)$. 使得图$G$具有正常边$k$-染色的最小整数$k$称为图$G$的边色数, 记为$\chi'(G)$.

关于图的边色数, 有著名的Vizing定理, 其由Vizing[32]于1964年给出.

定理 2.9 如果图G是一个简单图, 则$\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G)+1$.

由Vizing定理可知, 一个简单图G的边色数要么是$\Delta(G)$,要么是$\Delta(G)+1$. 如果$\chi'(G) = \Delta(G)$, 则称图G是第一类的. 如果$\chi'(G) = \Delta(G)+1$, 则称图G是第二类的. 然而，判定一个图(即使其最大度是3)是否第一类的却是一个NP-完全问题[33]. 因此, 对于1-平面图, 考虑其按边色数分类的问题是十分有意义的.

2011年, Zhang与Wu[34]首次考虑了1-平面图的边染色问题,证明了:

定理 2.10 如果图G是一个1-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 10$时, 有$\chi'(G) = \Delta(G)$.

Zhang与Wu在证明定理2.10时采用的是经典的权转移方法. 注意到权转移方法是基于平面图的欧拉公式的, 然而1-平面图一般是非平面图. 因此, 在证明的过程中, 需要将1-平面图G转化成平面图$G^\times$. 事实上, 如果将1-平面图G中的所有交叉点(其并非是图G的顶点)看成是度数为4的顶点, 则可以得到一个平面图$G^\times$, 称其为1-平面图G的关联平面图$G^\times$. 于是, 利用1-平面图G的结构性质可以得到关联平面图$G^\times$的结构性质, 再在图$G^\times$上应用权转移方法, 即可得到所需的结论. 这个方法也是在考虑1-平面图的染色问题时常用的方法.

事实上, 定理2.10还可以用另外一种非常简单的方法证明. 在叙述该证明之前, 需要引入边临界图的概念. 设图G是一个最大度为Δ的图, 并且$\chi'(G) = \Delta+1$, 如果对于图G的任何一条边e都有$\chi'(G-e) = \Delta$, 则称图G是边Δ-临界的. 关于边Δ-临界图的结构性质的研究有很多, 例如Li与Li[35]证明了:

引理 2.1 如果图G是一个边Δ-临界图, 则当$\Delta \geqslant 10$时, 有$|E(G)| \geqslant 4|V(G)|$.

定理2.10的证明. 设图G是定理2.10的极小反例, 则图G为边Δ-临界图. 从而由引理2.1可知$|E(G)| \geqslant 4|V(G)|$. 另一方面, 由于图G是1-平面图, 故其边数最多为$4(|V(G)|-2)$, 即$|E(G)| \leqslant 4|V(G)|-8$. 此即为矛盾.

虽然定理2.10的证明可以按照上述方式简化, 但是Zhang与Wu在文献[34]中所使用的证明技巧可以用来考虑1-环面图(可1-嵌入到环面的图, 注意环面的欧拉亏格为0)的边染色问题. 基于该思想, Zhang与Liu[36]于2013年证明了下述结论, 从而推广了定理2.10.

定理 2.11 如果图G是一个1-环面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 10$时, 有$\chi'(G) = \Delta(G)$.

另一方面, 定理2.10中关于最大度的下界10是否可以降低? 这是一个值得考虑的问题. 事实上, Zhang与Liu[37]给出了如下结论:

定理 2.12 对于每个不超过7的正整数Δ, 存在最大度为Δ, 且边色数为$\Delta+1$的1-平面图.

该结论说明, 如果定理2.10中关于最大度的下界10可以改进, 则其最好的可能就是改进到8. 基于此, Zhang与Liu[37]提出如下猜想:

猜想 2.3 如果图G是一个1-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 8$时, 有$\chi'(G) = \Delta(G)$.

到目前为止, 上述猜想未被完全解决. 但是对于一些具有圈条件限制的1-平面图, 有一部分相关的结果.

首先, 张欣等[38]于2010年考虑了不含3-圈(即围长至少为4)的1-平面图, 证明了

定理 2.13 如果图G是一个不含3-圈的1-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 7$时, 有$\chi'(G) = \Delta(G)$.

当允许3-圈存在时, 若将1-平面图限制为不含有相邻3-圈(即不含有弦4-圈), 则可以得到如下结果, 其由Zhang与Liu[39]于2012年得到.

定理 2.14 如果图G是一个不含相邻3-圈的1-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 8$时, 有$\chi'(G) = \Delta(G)$.

更进一步, Zhang与Liu[37]考虑了不含弦5-圈的1-平面图, 证明了

定理 2.15 如果图G是一个不含弦5-圈的1-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 9$时, 有$\chi'(G) = \Delta(G)$.

2015年, Zhang与Wu[40]改进了定理2.15, 将其中的条件"不含弦5-圈"弱化为"不含相邻弦5-圈". 与此同时, 他们还考虑了不含5-圈或相邻4-圈的1-平面图, 得到了如下两个结论.

定理 2.16 如果图G是一个不含相邻弦5-圈的1-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 9$时, 有$\chi'(G) = \Delta(G)$.

定理 2.17 如果图G是一个不含5-圈的1-平面图, 或不含相邻4-圈的1-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 8$时, 有$\chi'(G) = \Delta(G)$.

事实上, 定理2.17的后半部分(即不含相邻4-圈的情况)亦被张佳丽, 苗连英与宋文耀等[41,42]独立证明.

设φ是图G的一个正常边k-染色, 如果对于φ的任何两种颜色i, j, 由$\varphi^{-1}(i) \cup \varphi^{-1}(j)$导出的$G$的子图不含圈(或者说, 图$G$的任何圈至少关联3种颜色), 则称$\varphi$是图$G$的一个无圈边$k$-染色. 使得图$G$具有无圈边$k$-染色的最小整数$k$称为图$G$的无圈边色数, 记为$\chi'_a(G)$.

2001年, Alon, Sudakov与Zaks[43]提出了著名的无圈边染色猜想, 即

猜想 2.4 对任何简单图G, 都有$\chi'_a(G) \leqslant \Delta(G) + 2$.

2010年, 张欣等[44]利用1-平面图的结构, 首次考虑了1-平面图的无圈边染色问题. 遗憾的是, 河南大学的王涛曾向该文作者指出其证明存在漏洞. 然而, 利用该文中证明1-平面图中特殊结构存在性的思想与方法, Song与Miao[45]于2015年得到了关于不含3-圈的1-平面图的无圈边染色的结果, 即

定理 2.18 如果图G是一个不含3-圈的1-平面图, 则$\chi'_a(G) \leqslant \Delta(G) + 22$.

2015年与2016年, Chen, Wang与Zhang[46]对上述结果进行了改进, 最终得到:

定理 2.19 如果图G是一个不含3-圈的1-平面图, 则$\chi'_a(G) \leqslant \Delta(G) + 16$.

2016年, 张慧琴[47]在其硕士学位论文中将定理2.19中关于$\chi'_a(G)$的上界进一步进行改进, 得到

定理 2.20 如果图G是一个不含3-圈的1-平面图, 则$\chi'_a(G) \leqslant \Delta(G) + 14$.

张慧琴[46]同时证明了

定理 2.21 如果图G是一个不含3-圈与4-圈的1-平面图, 则$\chi'_a(G) \leqslant \Delta(G) + 7$.

当允许3-圈出现在1-平面图G中时, 王二燕[48]于2016年在其硕士学位论文中证明了

定理 2.22 如果图G是一个不含相邻3-圈的1-平面图, 则$\chi'_a(G) \leqslant \Delta(G) + 30$.

从上面所列结果可以看出, 猜想2.4对于1-平面图是否成立仍然是未知的. 因此, 在现阶段给出猜想2.4对于1-平面图成立的若干充分条件依然具有较大的意义.

注意到, 上述所提及的边染色问题均为正常边染色问题. 对于1-平面图的非正常边染色, 最近也得到了一些较好的研究成果.

设φ是图G的一个边k-染色, 即从$E(G)$到$\{1,2,\cdots,k\}$的一个映射. 对于$v\in V(G)$与$i\in\{1,2,\cdots,k\}$, 定义$\omega_i(v)$为与点v关联且染颜色i的边的个数. 如果对于任何$v\in V(G)$与任何$i,j\in\{1,2,\cdots,k\}$, 都有$|\omega_i(v)-\omega_j(v)|\leqslant 1$, 则称$\varphi$是图$G$的一个均匀边$k$-染色. 使得图$G$具有均匀边$k$-染色的最小整数$k$称为图$G$的均匀边色数, 记为$\chi'_{=}(G)$. 注意到此处的关于图的均匀边染色的定义方式与第2.1小节中提出的关于图的均匀点染色的定义方式完全不同. 事实上, 如果将图的均匀边染色定义为图的一个使得任何两个色类中所包含的边数至多相差1的正常边染色, 则其性质与图的正常边染色完全一致. 容易证明, 如果图G的边色数是k, 则其必定存在一个正常的边k-染色, 使得在该染色下图G中任何两个色类中所包含的边数至多相差1(否则可利用匹配的相关性质[6]进行调整).

然而, 研究图的均匀边色数看上去似乎并没有太大的意义. 这是因为, 对于任何图G, 只用一种颜色对其边进行染色即可得到它的均匀边染色, 继而有$\chi'_{=}(G)=1$. 因此, 在图的均匀边染色领域, 研究其均匀边色数阀值才有意义. 所谓图G的均匀边色数阀值$\chi'_{\equiv}(G)$, 即使得图G对于任何不小于k的整数t都具有均匀边t-染色的最小整数k.

最近, Hu, Wu与Zhang[49]首次考虑了1-平面图的均匀边染色问题, 得到了如下一个结论:

定理 2.23 如果图G是一个1-平面图, 则$\chi'_{\equiv}(G)\leqslant 21$.

在图的均匀非正常边染色领域, 还有一个非常常见但又极其重要的染色, 即树染色. 设φ是图G的一个边k-染色, 即从$E(G)$到$\{1,2,\cdots,k\}$的一个映射. 如果对于每个$i\in\{1,2,\cdots,k\}$, 由$\varphi^{-1}(i)$导出的图G的子图是一个线性森林, 亦即每个连通分支都是路的森林, 则称φ为图G的一个线性树边k-染色. 使得图G具有线性树边k-染色的最小整数kc称为图G的线性荫度, 记为$la(G)$. 容易看出, 对于任何图G都有$la(G)\geqslant\lceil\frac{\Delta(G)}{2}\rceil$. 另一方面, 关于$la(G)$的上界, Akiyama, Exoo与Harary[50]于1980年提出了著名的线性荫度猜想, 即:

猜想 2.5 对任何简单图G, 都有$\lceil\frac{\Delta(G)}{2}\rceil\leqslant la(G)\leqslant\lceil\frac{\Delta(G)+1}{2}\rceil$.

2011年, 张欣等[51]对1-平面图考虑了上述猜想, 证明了:

定理 2.24 如果图G是一个1-平面图, 则当$\Delta(G)\geqslant 33$时, 有$la(G)=\lceil\frac{\Delta(G)}{2}\rceil$.

2.3 全染色与$(p,1)$-全标号

图G的一个正常全k-染色是一个从$V(G)\cup E(G)$到$\{1,2,\cdots,k\}$的映射φ, 其对于$V(G)\cup E(G)$中任何两个相邻或者相关联的的元α与β, 都满足$\varphi(\alpha)\neq\varphi(\beta)$. 使得图$G$具有正常全$k$-染色的最小整数$k$称为图$G$的全色数, 记为$\chi''(G)$.

注意到, 如果对图G的点集进行正常的点染色, 再对其边集用异于任何点所使用的颜色的颜色进行正常边染色, 则得到的是图G的一个正常全染色. 因此有$\chi''(G)\leqslant\chi(G)+\chi'(G)$. 如果图$G$是一个平面图, 则由四色定理与Vizing定理(定理2.9), 可得$\chi''(G)\leqslant 4+\Delta(G)+1=\Delta(G)+5$. 类似地, 如果图$G$是一个1-平面图, 则由六色定理(定理2.1)与Vizing定理(定理2.9), 可得$\chi''(G)\leqslant 6+\Delta(G)+1=\Delta(G)+7$. 事实上, 对于一般图, Behzad[52]与Vizing[53]分别独立地提出了如下猜想, 即为著名的全染色猜想.

猜想 2.6 如果图G是一个简单图, 则$\chi''(G)\leqslant\Delta(G)+2$.

全染色猜想至今尚未解决. 然而, 对于平面图等图类, 该猜想的研究则取得了较好的进展(但仍未完全解决), 具体进展可参阅Borodin[54]于2013年撰写的综述文章.

对于1-平面图的全色数, Czap[55]于2013年给出了一个上界, 即

定理 2.25 如果图G是一个1-平面图, 则当$\Delta(G)\geqslant 10$时, 有$\chi''(G)\leqslant\Delta(G)+3$, 如果再有$\chi(G)\leqslant 4$, 则$\chi''(G)\leqslant\Delta(G)+2$.

2015年, Zhang, Hou与Liu[56]对于最大度至少为13的1-平面图证明了全染色猜想, 即得到如下结果:

定理 2.26 如果图G是一个1-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 13$时, 有$\chi''(G) \leqslant \Delta(G)+2$.

注意到, 任何图G的全色数至少为$\Delta(G)+1$. 因此, 若全染色猜想是正确的话, 则图G的全色数要么是$\Delta(G)+1$, 要么是$\Delta(G)+2$. 于是确定什么样的图G的全色数是$\Delta(G)+1$是一个非常有意义的问题. 2016年, Sun, Wu与Cai[57]在1-平面图上考虑了该问题，证明了：

定理 2.27 如果图G是一个1-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 12$且图G不含3-圈与4-圈(亦即围长$g(G) \geqslant 5$)时, 有$\chi''(G) = \Delta(G)+1$.

图G的k-$(p,1)$-全标号是一个从$V(G) \cup E(G)$到$\{0,1,2,\cdots,k\}$的映射φ, 其对于图G的任何两个相邻的点u,v, 都有$|\varphi(u)-\varphi(v)| \geqslant 1$, 对于图$G$的任何两条相邻的边$e_1,e_2$, 有$|\varphi(e_1)-\varphi(e_2)| \geqslant 1$, 同时对于图$G$的任何点$u$及其关联的边$e$, 有$|\varphi(u)-\varphi(e)| \geqslant p$. 使得图$G$具有$k$-$(p,1)$-全标号的最小整数$k$称为图$G$的$(p,1)$-全标号数, 记为$\lambda_p^T(G)$.

注意到, 当$p=1$时, 上述定义与图的全染色几乎完全一致(仅仅所使用的颜色集合差异了一个元素0), 因此立刻有$\lambda_1^T(G) = \chi''(G)-1$, 从而全染色猜想(猜想2.6)等价于: $\lambda_1^T(G) \leqslant \Delta(G)+1$. 对于$p$的一般情况, Havet与Yu[58]于2008年提出了如下的$(p,1)$-全标号猜想.

猜想 2.7 如果图G是一个简单图, 则$\lambda_p^T(G) \leqslant \min\{\Delta(G)+2p-1, 2\Delta+p-1\}$.

围绕上述猜想, Zhang, Yu与Liu[59]于2011年首次考虑了1-平面图的$(p,1)$-全标号问题, 证明了:

定理 2.28 如果图G是一个1-平面图且$p \geqslant 2$是一个整数, 则当$\Delta(G) \geqslant 8p+4$, 或者$\Delta(G) \geqslant 6p+2$且$g(G) \geqslant 4$时, 有$\lambda_p^T(G) \leqslant \Delta(G)+2p-2$.

2015年, Sun与Cai[60]考虑了具有圈条件限制的1-平面图的$(p,1)$-全标号问题, 得到了如下结果:

定理 2.29 如果图G是一个1-平面图且$p \geqslant 2$是一个整数, 则当$\Delta(G) \geqslant 7p+1$且G不含相邻3-圈, 或者$\Delta(G) \geqslant 6p+3$且G不含相交3-圈时, 有$\lambda_p^T(G) \leqslant \Delta(G)+2p-2$.

2.4 列表边染色与列表全染色

类似于列表点染色的定义, 可以定义图G的列表边染色、列表边色数、列表全染色与列表全色数. 本文分别用$ch'(G)$与$ch''(G)$代表图G的列表边色数与列表全色数.

20世纪90年代, Vizing, Gupta, Abertson与Collins, Bollobás与Harris这四个研究组[61]分别独立地提出了猜想2.8, 为列表边染色猜想. Borodin, Kostochka与Woodall[62]则于1997年提出了猜想2.9, 为列表全染色猜想.

猜想 2.8 $ch'(G) = \chi'(G)$.

猜想 2.9 $ch''(G) = \chi''(G)$.

列表边染色猜想与列表全染色猜想是近代图论中两个非常著名的猜想. 虽然与其相关的研究有很多, 但是它们仍未被解决.

2012年, Zhang, Liu与Wu[63]考虑了1-平面图的列表边染色与列表全染色问题, 证明了列表边染色猜想与列表全染色猜想对于最大度至少是21的1-平面图成立. 具体来说, 他们给出了如下定理:

定理 2.30 如果图G是一个1-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 21$时, 有$ch'(G) = \chi'(G) = \Delta(G)$, 且$ch''(G) = \chi''(G) = \Delta(G)+1$.

上述结论中关于最大度$\Delta(G)$的下界21后来被张欣[64]在其博士学位论文中改进到了20, 即

定理 2.31 如果图G是一个1-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 20$时, 有$ch'(G) = \chi'(G) = \Delta(G)$, 且$ch''(G) = \chi''(G) = \Delta(G) + 1$.

注意到, 研究猜想2.8与猜想2.9可能比较难, 故很自然地可以研究一些比其稍微弱的问题. 事实上, 如果猜想2.8成立的话, 则由Vizing定理(定理2.9)可知$ch'(G) \leqslant \Delta(G)+1$. 因此如下的猜想2.10是猜想2.8成立的一个必要条件.

猜想 2.10 设G是一个简单图, 则$ch'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

类似地, 如果猜想2.9成立且全染色猜想(猜想2.6)成立, 则$ch'(G) \leqslant \Delta(G) + 2$. 因此如下的猜想2.11是猜想2.6与猜想2.9同时成立的一个必要条件.

猜想 2.11 设G是一个简单图, 则$ch''(G) \leqslant \Delta(G) + 2$.

一般地, 分别称猜想2.10与猜想2.11为弱列表边染色猜想与弱列表全染色猜想. 2012年, Zhang, Liu 与Wu[63]证明了上述两个猜想对于最大度至少是16的1-平面图成立, 即

定理 2.32 如果图G是一个1-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 16$时, 有$ch'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$, 且$ch''(G) \leqslant \Delta(G) + 2$.

2014年, 张淑洁[65]在其硕士学位论文中考虑了具有圈条件限制的1-平面图的列表边染色与列表全染色, 证明了如下两个结果:

定理 2.33 如果图G是一个不含相邻3-圈的1-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 17$时, 有$ch'(G) = \Delta(G)$, 且$ch''(G) = \Delta(G)+1$; 当$\Delta(G) \geqslant 13$时, 有$ch'(G) \leqslant \Delta(G)+1$, 且$ch''(G) \leqslant \Delta(G)+2$.

定理 2.34 如果图G是一个不含相邻4-圈的1-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 19$时, 有$ch'(G) = \Delta(G)$, 且$ch''(G) = \Delta(G)+1$; 当$\Delta(G) \geqslant 13$时, 有$ch'(G) \leqslant \Delta(G)+1$, 且$ch''(G) \leqslant \Delta(G)+2$.

2015年, 庄禧超[66]在其硕士学位论文中证明了:

定理 2.35 如果图G是一个不含相交3-圈的1-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 16$时, 有$ch''(G) = \Delta(G) + 1$.

定理2.36 如果图G是一个1-平面图, 其每个点至多关联一个3-圈或4-圈, 则当$\Delta(G) \geqslant 14$时, 有$ch''(G) = \Delta(G) + 1$.

3 IC-平面图与NIC-平面图的染色

3.1 点染色与均匀点染色

根据IC-平面图的定义可知, 如果将IC-平面图G中的每一对相互交叉的边删去一条即可得到一个平面图. 因此, 对于任何IC-平面图G, 都有$|E(G)| \leqslant \frac{13}{4}|V(G)| - 6$, 从而推得每个IC-平面图的最小度$\delta(G) \leqslant 6$. Zhang与Liu[67]证明了关于IC-平面图的边数与最小度的上述上界都是紧的, 并构造出了6-正则的IC-平面图(见图3). 因此, 由贪婪算法容易看出: 对于任何IC-平面图都有$\chi(G) \leqslant ch(G) \leqslant 7$.

然而, 关于IC-平面图的点色数, Král与Stacho[12]于2010年证明了如下的五色定理:

定理 3.1 如果图G是一个IC-平面图, 则$\chi(G) \leqslant 5$, 并且该上界5是紧的.

最近, Zhang, Wang与Xu[31]考虑了IC-平面图与NIC-平面图的均匀点染色问题, 得到了如下两个结果:

定理 3.2 如果图G是一个IC-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 12$时, 有$\chi^*_{eq}(G) \leqslant \Delta(G)$.

定理 3.3 如果图G是一个NIC-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 13$时, 有$\chi^*_{eq}(G) \leqslant \Delta(G)$.

3.2 边染色及其相关染色

2013年, Zhang与Liu[67]首次考虑了IC-平面图的边染色问题, 得到了如下两个结论:

定理 3.4 如果图G是一个IC-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 8$时, 有$\chi'(G) = \Delta(G)$.

定理 3.5 对于每个不超过6的正整数Δ, 存在最大度为Δ, 且边色数为$\Delta + 1$的IC-平面图.

注意到, 定理3.4事实上解决了猜想2.3中的图G是IC-平面图的情况. 结合定理3.4与定理3.5, 很自然地又可以提出如下猜想:

猜想 3.1 如果图G是一个IC-平面图, 则当$\Delta(G) = 7$时, 有$\chi'(G) = 7$.

接下来, Zhang与Liu[67]又考虑了IC-平面图的列表边染色与列表全染色问题, 证明了如下两个结果:

定理 3.6 如果图G是一个IC-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 14$时, 有$ch'(G) = \chi'(G) = \Delta(G)$, 且$ch''(G) = \chi''(G) = \Delta(G) + 1$.

定理 3.7 如果图G是一个IC-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 10$时, 有$ch'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$; 当$\Delta(G) \geqslant 11$时, 有$ch''(G) \leqslant \Delta(G) + 2$.

围绕线性荫度猜想(猜想2.5), Zhang与Liu[67]证明了

定理 3.8 如果图G是一个IC-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 17$时, 有$la(G) = \lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil$.

到目前为止, 并无相关文献单独研究IC-平面图或NIC-平面图的全染色. 但是, Zhang, Liu与Yu[68]于2012年研究了IC-平面图的$(p,1)$-全标号问题, 证明了:

定理 3.9 如果图G是一个IC-平面图且$p \geqslant 2$是一个整数, 则当$\Delta(G) \geqslant 6p + 2$, 或者$\Delta(G) \geqslant 4p + 2$且$g(G) \geqslant 4$, 或者$\Delta(G) \geqslant 2p + 5$且$g(G) \geqslant 5$时, 有$\lambda_p^T(G) \leqslant \Delta(G) + 2p - 2$.

4 外1-平面图的染色

4.1 点染色、无圈点染色、均匀点染色与均匀点荫度

注意到, Auer[16]等证明了每个外1-平面图G的边数$|E(G)|$的上界为$2.5|V(G)| - 2$, 并且指出该上界是最优的. 由此, 可以推出每个外1-平面图的最小度$\delta(G) \leqslant 4$. 然而, 此处关于外1-平面图的最小度的上界并不是最优的.

2012年, Zhang, Liu与Wu[15]研究了外1-平面图的结构, 证明了每个外1-平面图的最小度$\delta(G) \leqslant 3$, 并且该上界3是紧的. 例如, 图4所示的外1-平面图的最小度为3, 其点色数为4. 因此, 由贪婪算法容易得到:

定理 4.1 如果图G是一个外1-平面图, 则$\chi(G) \leqslant ch(G) \leqslant 4$, 并且该上界4是紧的.

最近, 刘维婵与张欣[69]考虑了外1-平面图的无圈点染色, 得到了如下结果:

定理 4.2 如果图G是一个外1-平面图, 则$\chi_a(G) \leqslant ch_a(G) \leqslant 4$, 并且该上界4是紧的.

注意到, 文献[69]中所给出的定理4.2的证明虽并未提及无圈列表点染色, 然而其中的证明却可以立刻推出上述结论. 事实上, 定理4.2亦推广了定理4.1.

2014年, Tian与Zhang[70]研究了外1-平面图的均匀点染色问题, 证明了:

定理 4.3 如果图G是一个外1-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 3$时, 有$\chi_{eq}^*(G) \leqslant \Delta(G)$.

上述定理表明, 均匀染色领域的两个著名猜想, 即均匀染色猜想(猜想2.1)与Chen-Lih-Wu猜想(猜想2.2)对于所有的外1-平面图成立.

注意到, 均匀染色猜想与Chen-Lih-Wu猜想中所提及的均匀点染色, 均指的是正常点染色. 事实上, 对于非正常的点染色, 也可以考虑其均匀化问题.

设φ是一个从图G的点集$V(G)$到颜色集$\{1,2,\cdots,k\}$的映射, 其对于任何$i,j\in\{1,2,\cdots,k\}$, 都有$||\varphi^{-1}(i)|-|\varphi^{-1}(j)||\leqslant 1$, 并且由点集$\varphi^{-1}(i)$导出的图$G$的子图是一个森林. 将该映射$\varphi$称为图$G$的均匀树点$k$-染色. 使得图$G$具有均匀树点$k$-染色的最小整数$k$称为图$G$的均匀点荫度, 记为$va_=(G)$. 类似于图的均匀点色数阈值的概念, 此处可以定义图的均匀点荫度阈值$va_\equiv(G)$ 为使得图G对于任何不小于k的整数t都具有均匀树点t-染色的最小整数k.

图的均匀点荫度及其阈值的概念是由Wu, Zhang与Li[71]于2013年提出. 2015 年, Esperet, Lemoine与Maffray[72]证明了$va_\equiv(G)\leqslant 4$对于所有的平面图G都成立, 从而解决了文献[71]中的一个猜想. 他们同时指出, 判定平面图的均匀点荫度阈值是否不超过3是一个有意义的研究方向. 基于此, 刘维婵与张欣[69]研究了外1-平面图的均匀树点染色问题, 得到了如下结果:

定理 4.4 如果图G是一个外1-平面图, 则$va_\equiv(G)\leqslant 3$.

然而, 定理4.4中关于$va_\equiv(G)$的上界3是否紧的并未确定.

4.2 边染色及其相关染色

2012年, Zhang, Liu与Wu[15]首次考虑了外1-平面图的边染色问题, 证明了:

定理 4.5 如果图G是一个外1-平面图, 则当$\Delta(G)\geqslant 4$时, 有$\chi'(G)=\Delta(G)$.

Zhang, Liu与Wu[15]亦指出, 定理4.5中关于最大度$\Delta(G)$的下界4是紧的. 这是因为, 对于任何整数$n\geqslant 7$, 都存在2-连通的最大度为3, 边色数为5的外1-平面图.

基于此, Zhang[73]于2016年考虑了最大度为3的外1-平面图, 给出了其是第一类的充分必要条件. 在叙述Zhang的定理之前, 需要先介绍如下一些相关的概念与定义.

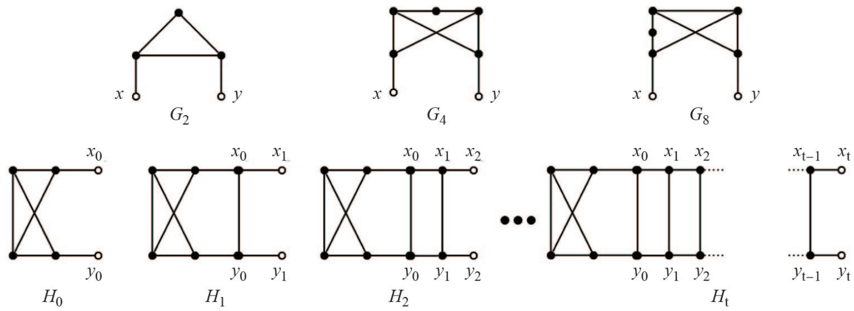

图5 构造图类$\mathcal{P}$所使用的几种生成结构

将完全图K_4的某条边进行剖分(即将其替换为一条长度为2的路)得到的图记为K_4^+. 显然, 它是一个外1-平面图. 设$\mathcal{P}$是一个图类, 其包含K_4^+, 并且对于任何图$G\in\mathcal{P}$, 都可以由$\mathcal{P}$中的某一个图H经过如下两种操作之一得到:

(1) 删除图H的一个度数为2的点z(设其在图H的两个邻点分别为z_1与z_2), 将结构G_2, 或G_4, 或G_8(如图5所示)黏贴到当前图上, 使得该结构中的x,y分别与z_1,z_2重合;

(2) 删除图H中的边z_1z_2, 任选一个整数$t\geqslant 0$, 将结构H_t(如图5所示)黏贴到当前图上, 使得该结构中的x_t,y_t分别于z_1,z_2重合.

从上述定义容易看出, 图类$\mathcal{P}$中的任何图的最大度均为3. Zhang[71]证明了对于任何$G\in\mathcal{P}$, 都有$\chi'(G)=4$, 且对于任何$G\in\mathcal{O}_3\setminus\mathcal{P}$, 都有$\chi'(G)=3$, 其中$\mathcal{O}_3$表示全体最大度为3的外1-平面图的集合. 因此, 结合定理4.5, 立刻可以得到:

定理 4.6 如果图G是一个外1-平面图, 则

$$\chi'(G) = \begin{cases} \Delta(G), & \text{如果}G \notin \mathcal{P}\text{且}G\text{不是奇圈;} \\ \Delta(G)+1, & \text{如果}G \in \mathcal{P}\text{或}G\text{是奇圈.} \end{cases}$$

Zhang[73]亦指出: 如果能在多项式时间内判定一个最大度为3的图是否属于图类$\mathcal{P}$, 则可以在多项式时间内判定一个外1-平面图是否第一类的.

2012年, Zhang, Liu与Wu[15]亦首次考虑了外1-平面图的线性树边染色/线性荫度问题, 证明了:

定理 4.7 如果图G是一个外1-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 5$或$\Delta(G) = 3$时, 有$la(G) = \lceil\frac{\Delta(G)}{2}\rceil$; 当$\Delta(G) = 4$时, 有$la(G) \leqslant \lceil\frac{\Delta(G)+1}{2}\rceil = 3$.

Zhang, Liu与Wu[15]同时指出: 对于任何整数$n \geqslant 15$, 都存在2-连通的最大度为4, 线性荫度为3的外1-平面图. 因此定理4.7在该意义上是最优的.

2013年, Zhang[74]围绕图的列表全染色猜想(猜想2.9), 考虑了外1-平面图的列表全染色, 证明了:

定理 4.8 如果图G是一个外1-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 5$时, 有$ch''(G) = \chi''(G) = \Delta(G)+1$.

2014年, Tian与Zhang[70]则围绕图的列表边染色猜想(猜想2.8), 研究了外1-平面图的列表边染色, 证明了:

定理 4.9 如果图G是一个外1-平面图, 则当$\Delta(G) \geqslant 5$时, 有$ch'(G) = \chi'(G) = \Delta(G)$.

5 结 语

本文第2, 3, 4节分别尽可能完整地综述了关于1-平面图, IC/NIC-平面图, 外1-平面图这几个图类在图的染色方面的研究成果. 从中可以发现, 相对于平面图染色的研究, 这些研究不尽完善, 其中有很多结果都有较大的改进空间. 同时, 对于上述几类图, 亦可以研究一些其他类型的染色.

关于1-平面图的研究, 除了本文详细列举的关于染色方面的结果外, 在图的分解及其算法[75-80], 图的局部结构[81-91], 图的极值问题[92-98], 图的拓扑画法[99-105]等方面也取得了不错的进展. 相关结果本文不再详述, 感兴趣的读者可参阅综述文献[106].

参 考 文 献

[1] Heawood P J. Map-colour theorem [J]. *Q. J. Math.*, 1890, **24**: 332-338.

[2] Kempe A B. On the geographical problem of the four colours [J]. *Amer. J. Math.*, 1879, **2**(3): 193-220.

[3] Appel K, Haken W. Every planar map is four volorable. I. Discharging [J]. *Illinois J. Math.*, 1977, **21**(3): 429-490.

[4] Appel K, Haken W, Koch J. Every planar map is four volorable. II. Reducibility [J]. *Illinois J. Math.*, 1977, **21**(3): 491-567.

[5] Robertson N, Sanders D, Seymour P, Thomas R. The four-colour theorem [J]. *J. Combin. Theory Ser. B*, 1997 , **70**(1): 2-44.

[6] Bondy J A, Murty U S R. *Graph Theory* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2008.

[7] Ringel G. Ein Sechsfarbenproblem auf der Kugel (in German) [J]. *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.*, 1965, **29**: 107-117.

[8] Borodin O V. Solution of the Ringel problem on vertex-face coloring of planar graphs and coloring of 1-planar graphs [J]. *Metody Diskretnogo Analiza*, 1984, (41): 12-26.

[9] Borodin O V. A New Proof of the 6 Color Theorem [J]. *J. Graph Theory*, 1995, **19**(4): 507-521.

[10] Zhang X. Drawing complete multipartite graphs on the plane with restrictions on crossings [J]. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 2014, **30(12)**, 2045-2053.

[11] Alberson M O. Chromatic number, independent ratio, and crossing number [J]. *Ars Math. Contemp.*, 2008, **1**: 1-6.

[12] Král D, Stacho L. Coloring plane graphs with independent crossings [J]. *J. Graph Theory*, 2010, **64**(3): 184-205.

[13] Bachmaier C, Brandenburg F J, Neuwirth D, et al. NIC-planar graphs [OL]. *arXiv*: 1701.04375 [cs.DM].

[14] Brandenburg F J. Recognizing IC-planar and NIC-planar graphs [OL]. *arXiv*: 1610. 08884 [cs.DM].

[15] Eggleton R B. Rectilinear drawings of graphs [J]. *Util. Math.*, 1986, **29**: 149-172.

[16] Zhang X, Liu G, Wu J L. Edge covering pseudo-outerplanar graphs with forests [J]. *Discrete Math.*, 2012, **312**: 2788-2799.

[17] Auer C, Bachmaier C, Brandenburg F J, et al. Outer-1-planar graphs [J]. *Algorithmica*, 2016, **74**: 1293-1320.

[18] Bodendiek R, Schumacher H, Wagner K. Bemerkungen zu einem Sechsfarbenproblem von G. Ringel [J]. *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.*, 1983, **53**, 41-52.

[19] Bodendiek R, Schumacher H, Wagner K. Uber 1-optimale Graphen [J]. *Math. Nachr.*, 1984, **117**, 323-339.

[20] Fabrici I, Madaras T. The structure of 1-planar graphs [J]. *Discrete Math.*, 2007, **307**, 854–865.

[21] 宋立莉. 某些特殊图的点染色问题研究 [D]. 济南：山东师范大学, 2016.

[22] 王晔, 孙磊. 不含3圈和4圈的1-平面图是5-可染的 [J]. 山东大学学报(理学版), 2017, **52**(4): 34-39.

[23] Albertson M O, Mohar B. Coloring vertices and faces of locally planar graphs [J]. *Graphs Combin.*, 2006, **22**(3): 289-295。

[24] Wang W, Lih K W. Coupled choosability of plane graphs [J]. *J. Graph Theory*, 2008, **58**(1), 27-44.

[25] Borodin O V, Kostochka A V, Raspaud A, Sopena E. Acyclic coloring of 1-planar graphs [J]. *Discrete Appl. Math.*, 2001, **114**(1-3): 29-41.

[26] Meyer W. Equitable coloring [J]. *Amer. Math. Monthly*, 1973, **80**: 920-922.

[27] Chen B L, Lih K W, Wu P L. Equitable coloring and the maximum degree [J]. *European J. Combin.*, 1994, **15**, 443-447.

[28] Lih K W. Equitable Coloring of Graphs [A]. *Handbook of Combinatorial Optimization*, Berlin: Springer-Verlag, 2013, 1199–1248.

[29] 李国伟. 均匀染色最新的一些进展 [J]. 中国科学：数学, 2015, **45**(9): 1383–1388.

[30] Zhang X. On equitable colorings of sparse graphs [J]. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 2016, **39**(1): 257-268.

[31] Zhang X, Wang H, Xu L. Equitable coloring of three classes of 1-planar graphs [J]. *Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser.*, to appear.

[32] Vizing V G. On an estimate of the chromatic class of a p-graph [J]. *Diskret. Analiz.*, 1964, **3**: 25-30.

[33] Holyer I. The NP-completeness of edge-coloring [J]. *SIAM J. Comput.*, 1981, **10**(4): 718-720.

[34] Zhang X, Wu J L. On edge colorings of 1-planar graphs [J]. *Inform. Process. Lett.*, 2011, **111**: 124-128.

[35] Li S, Li X. Edge coloring of graphs with small maximum degrees [J]. *Discrete Math.*, 2009, **309**: 4843-4852.

[36] Zhang X, Liu G. On edge colorings of 1-toroidal graphs [J]. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 2013, **29**(7): 1421-1428.

[37] Zhang X, Liu G. On edge colorings of 1-planar graphs without chordal 5-cycles [J]. *Ars Combin.*, 2012, **104**: 431-436.

[38] 张欣, 刘桂真, 吴建良. 不含3-圈的1-平面图的边染色[J]. 山东大学学报（理学版）, 2010, **45**(6): 15-17.

[39] Zhang X, Liu G. On edge colorings of 1-planar graphs without adjacent triangles [J]. *Inform. Process. Lett.*, 2012, **112**: 138-142.

[40] Zhang W, Wu J L. Some sufficient conditions for 1-planar graphs to be Class 1 [J]. *Theoret. Comput. Sci.*, 2015, **566**, 50-58.

[41] 张佳丽，苗连英，宋文耀. 最大度为8不含相邻4-圈的1-平面图边色数[J]. 山东大学学报(理学版), 2014, **49(4)**: 17-23.

[42] 宋文耀，苗连英，张佳丽. 不含相邻 4 -圈的 1 -平面图边染色[J]. 湖北大学学报(自然科学版), 2013, **35(2)**: 209-213.

[43] Alon N, Sudakov B, Zaks A. Acyclic edge colorings of graphs [J]. *J. Graph Theory*, 2001, **37**: 157-167.

[44] 张欣, 刘桂真, 吴建良. 1-平面图的结构性质及其在无圈边染色上的应用[J]. 中国科学: 数学, 2010, 40: 1025-1032.

[45] Song W Y, Miao L Y. Acyclic Edge Coloring of Triangle-free 1-planar Graphs [J]. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 2015, **31**(10): 1563–1570.

[46] Chen J, Wang T, Zhang H. Acyclic chromatic index of triangle-free 1-planar graphs [OL]. *arXiv*: 1504.06234v2 [math.CO]

[47] 张慧琴. 1-平面图的无圈边染色数 [D]. 开封: 河南大学, 2016.

[48] 王二燕. 2-连通外平面图的r-hued染色和不含邻接三角形的1-平面图的无圈边染色[D]. 徐州: 中国矿业大学, 2016.

[49] Hu D Q, Wu J L, Zhang X. On the equitable edge-colouring of 1-planar graphs and planar graphs [J]. *Graphs Combin.*, to appear.

[50] Akiyama J, Exoo G, Harary F. Covering and packing in graphs III: Cyclic and acyclic invariants [J]. *Math. Slovaca*, 1980, **30**: 405-417.

[51] 张欣, 刘桂真, 吴建良. 1-平面图的线性荫度(英文) [J]. 运筹学学报, 2011, **15**(3): 38-44.

[52] Behzad M. Graphs and their chromatic numbers [D]. Michigan：Michigan State University, 1965.

[53] Vizing V. Some unsolved problems in graph theory [J]. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1968, **23**: 117-134.

[54] Borodin O V. Colorings of plane graphs: A survey [J]. *Discrete Math.*, 2013, **313**: 517-539.

[55] Czap J. A note on total colorings of 1-planar graphs [J]. *Inform. Process. Lett.*, 2013, **113**: 516-517.

[56] Zhang X, Hou J, Liu G. On total coloring of 1-planar graphs [J]. *J. Comb. Optim.*, 2015, **30**(1): 160-173.

[57] Sun L, Wu J L, Cai H. A totally $(\Delta+1)$-colorable 1-planar graph with girth at least five [J]. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 2016, **32**: 1337-1349.

[58] Havet F, Yu M L. $(p,1)$-total labelling of graphs [J]. *Discrete Math.*, 2008, **308**(4): 496-513.

[59] Zhang X, Yu Y, Liu G. On $(p,1)$-total labelling of 1-planar graphs [J]. *Cent. Eur. J. Math.*, 2011, **9**(6): 1424-1434.

[60] Sun L, Cai H. On $(p,1)$-total labelling of special 1-planar graphs [J]. *Ars Combin.*, 2015, **123**: 87-96.

[61] Jensen T R, Toft B. *Graph Coloring Problems* [M]. New York: John Wiley & Sons, 1995.

[62] Borodin O V, Kostochka A V, Woodall D R. List edge and list total colourings of multigraphs [J]. *J. Combin. Theory Ser. B*, 1997, **71**: 184-204.

[63] Zhang X, Wu J L, Liu G. List edge and list total coloring of 1-planar graphs [J]. *Front. Math. China*, 2012, **7**(5): 1005-1018.

[64] 张欣. 几类拓扑图的结构与染色 [D]. 济南：山东大学, 2012.

[65] 张淑洁. 关于1-平面图的若干列表染色的问题研究 [D]. 徐州： 中国矿业大学, 硕士学位论文, 2014.

[66] 庄禧超. 特殊1-平面图的列表全染色 [D]. 济南：山东大学, 2015.

[67] Zhang X, Liu G. The structure of plane graphs with independent crossings and its applications to coloring problems [J]. *Cent. Eur. J. Math.*, 2013, **11**(2): 308-321.

[68] Zhang X, Liu G, Yu Y. On $(p, 1)$-total labelling of plane graphs with independent crossings [J]. *Filomat*, 2012, **26**(6): 1091-1100.

[69] 刘维婵, 张欣. 外1-平面图的均匀点荫度 [J]. 计算机工程与应用, 已录用.

[70] Tian J, Zhang X. Pseudo-outerplanar graphs and chromatic conjectures [J]. *Ars Combin.*, 2014, **114**, 353-361.

[71] Wu J L, Zhang X, Li H. Equitable vertex arboricity of graphs [J]. *Discrete Math.*, 2013, **313**: 2696-2701.

[72] Esperet L, Lemoine L, Maffray F. Equitable partition of graphs into induced forests[J], *Discrete Math.*, 2015, **338**(8): 1481-1483.

[73] Zhang X. The edge chromatic number of outer-1-planar graphs [J]. *Discrete Math.*, 2016, **339**: 1393-1399.

[74] Zhang X. List total coloring of pseudo-outerplanar graphs [J]. *Discrete Math.*, 2013, **313**: 2297-2306.

[75] Lenhart W J, Liotta G, Montecchiani F. On partitioning the edges of 1-plane graphs [J]. *Theoret. Comput. Sci.*, 2017, **662**: 59-65.

[76] Kong J X, Zhang L Z. A note on the surviving rate of 1-planar graphs [J]. *Discrete Math.*, 2017, **340**: 1074-1079.

[77] Bekos M A, Bruckdorfer T, Kaufmann M, Raftopoulou C. 1-Planar graphs have constant book thickness [J]. *Lecture Notes in Comput. Sci.*, 2015, **9294**: 130-141.

[78] Ackerman E. A note on 1-planar graphs [J]. *Discrete Appl. Math.*, 2014, **175**: 104-108.

[79] Chen Z Z, Kouno M. A linear-time algorithm for 7-coloring 1-plane graphs [J]. *Algorithmica*, 2005, **43**: 147-177.

[80] Chen Z Z, Kouno M. A linear-time algorithm for 7-coloring 1-planar graphs [J]. *Lecture Notes in Comput. Sci.*, 2003, **2747**: 348-357.

[81] Lu Z P, Song N. On the minimum weight of a 3-connected 1-planar graph [J]. *Bull. Korean Math. Soc.*, 2017, **54**: 763-787.

[82] Wang T. Strongly light subgraphs in the 1-planar graphs with minimum degree 7 [J]. *Ars Math. Contemp.*, 2015, **8**: 409-416.

[83] Czap J, Harant J, Hudak D. An upper bound on the sum of powers of the degrees of simple 1-planar graphs [J]. *Discrete Appl. Math.*, 2014, **165**: 146-151.

[84] Zhang X. Light 3-cycles in 1-planar graphs with degree restrictions [J]. *Bull. Korean Math. Soc.*, 2014, **51**: 511-517.

[85] Zhang X. A note on the weight of triangle in 1-planar graphs with minimum degree 6 [J]. *Util. Math.*, 2014, **93**: 129-134.

[86] Zhang X, Liu G. On The lightness of chordal 4-cycle in 1-planar graphs with high minimum degree [J]. *Ars Math. Contemp.*, 2014, **7**: 281-291.

[87] Zhang X, Liu G, Wu J L. Light subgraphs in the family of 1-planar graphs with high minimum degree [J]. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 2012 **28**: 1155-1168.

[88] Hudak D, Sugerek P. Light edges in 1-planar graphs with prescribed minimum degree [J]. *Discuss. Math. Graph Theory*, 2012 **32**: 545-556.

[89] Hudak D, Madaras T. On Local Properties of 1-planar graphs with high minimum degree [J]. *Ars Math. Contemp.*, 2011 **4**: 245-254.

[90] Zhang X, Wu J L, Liu G. New upper bounds for the heights of some light subgraphs in 1-planar graphs with high minimum degree [J]. *Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.*, 2011 **13**: 9-16.

[91] 刘维婵. NIC-平面图中的轻边存在性及其定向染色[J]. 计算机工程与应用, doi: 10.3778/j.issn.1002-8331.1612-0160.

[92] Suzuki Y. K_7-minors in optimal 1-planar graphs [J]. *Discrete Math.*, 2017, **340**: 1227-1234.

[93] Czap J, Przybylo J, Skrabulakova E. On an extremal problem in the class of bipartite 1-planar graphs [J]. *Discuss. Math. Graph Theory*, 2016, **36**: 141-151.

[94] Noguchi K, Suzuki Y. Relationship among triangulations, quadrangulations and optimal 1-planar graphs [J]. *Graphs Combin.*, 2015, **31**: 1965-1972.

[95] Hudak D, Madaras T, Suzuki Y. On properties of maximal 1-planar graphs [J]. *Discuss. Math. Graph Theory*, 2012 **32**: 737-747.

[96] Suzuki Y. Optimal 1-planar graphs which triangulate other surfaces [J]. *Discrete Math.*, 2010 **310**: 6-11.

[97] Suzuki Y. Re-embeddings of maximum 1-planar graphs [J]. *SIAM J. Discrete Math.*, 2010 **24**: 1527-1540.

[98] Korzhik V P. Minimal non-1-planar graphs [J]. *Discrete Math.*, 2008, **308**: 1319-1327.

[99] Czap J, Hudak D, Madaras T. Joins of 1-planar graphs [J]. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 2014, **30**: 1867-1876.

[100] Di Giacomo E, Liotta G, Montecchiani F. Drawing outer 1-planar graphs with few slopes [J]. *Lecture Notes in Comput. Sci.*, 2014, **8871**: 174-185.

[101] Sultana S, Rahman M S, Roy A, Tairin S. Bar 1-visibility drawings of 1-planar graphs [J]. *Lecture Notes in Comput. Sci.*, 2014, **8321**: 62-76.

[102] Czap J, Hudak D. On drawings and decompositions of 1-planar graphs [J]. *Electron. J. Combin.*, 2013, **20**: #P54.

[103] Didimo W. Density of straight-line 1-planar graph drawings [J]. *Inform. Process. Lett.*, 2013, **113**: 236-240.

[104] Ahmed M E, Bin Yusuf A, Polin M Z H. Bar 1-visibility representation of optimal 1-planar graph [C]. *2013 International Conference on Electrical Information and Communication Technology (EICT)*, 2013.

[105] Dehkordi H R, Eades P. Every outer-1-plane graph has a right angle crossing drawing [J]. *Internat. J. Comput. Geom. Appl.*, 2012, **22**: 543-557.

[106] Kobourov S G, Liotta G, Montecchiani F. An annotated bibliography on 1-planarity [J]. *Comput. Sci. Rev.*, 2017, **25**: 49-67.