文章编号:1671-9352(2011)04-0001-03

稀疏图的 k-森林染色

张欣[1],徐兰[2],刘桂真[1]
(1. 山东大学数学学院, 山东 济南 250100; 2. 昌吉学院数学系, 新疆 昌吉 831100)

摘要:对于任意整数 $k \geqslant 2$,证明了最大度至少为 $5k-1$ 且最大平均度小于 $3-\dfrac{3}{\Delta(G)-k+2}$ 的图 G 的 k-森林染色数为 $\left\lceil \dfrac{\Delta(G)}{k} \right\rceil + 1$。

关键词:稀疏图;k-森林染色;最大平均度
中图分类号:O157.5 **文献标志码**:A

k-forested coloring of sparse graphs

ZHANG Xin[1], XU Lan[2], LIU Gui-Zhen[1]
(1. School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China;
2. Department of Mathematics, Changji College, Changji 831100, Xinjiang, China)

Abstract: For every integer $k \geqslant 2$, it is proved that the k-forested chromatic number of any graph G with a maximum degree of at least $5k-1$ and maximum average degree less than $3-\dfrac{3}{\Delta(G)-k+2}$ is accurately $\left\lceil \dfrac{\Delta(G)}{k} \right\rceil + 1$.

Key words: sparse graphs; k-forested coloring; maximum average degree

本文仅考虑简单的有限无向图。设 G 是一个图,分别用 $V(G)$,$E(G)$,$\Delta(G)$,$\delta(G)$ 来表示它的点集合,边集合,最大度和最小度。图 G 的最大平均度定义为 $\mathrm{mad}(G)=\max_{H \subseteq G}\{2|E(H)|/|V(H)|\}$。

图 G 的一个无圈正常染色,是指它的一个不含双色圈的正常染色。这个概念是由 Grünbaum 在文献[1]中提出的。在文献[2]中,Hind 等提出了 k-节约染色的概念:图 G 的 一个正常点染色称为是 k-节约的,如果对于 G 中的每个顶点 v 其邻点集所使用的颜色中每种颜色最多被使用了 k 次。Yuster 在文献[3]中将无圈染色与 2-节约染色这两个概念结合起来,定义了图的线性染色。2008 年,Esperet 等在文献[4]中扩展了 Yuster 的定义,将无圈 k-节约染色称为 k-森林染色。如果图的一个 k-森林染色 c 使用了 m 种颜色,则称 c 为 G 的 k-森林 m-染色,并称 G 是 k-森林 m-可染的。对于一个图 G,称使得 G 是 k-森林 m-可染的最小整数 m 为 G 的 k-森林色数,记为 $\chi_k^a(G)$。根据定义,显然有 $\chi_k^a(G) \geqslant \left\lceil \dfrac{\Delta(G)}{k} \right\rceil + 1$。然而,Esperet 等在文献[4]中并没有研究 $k \geqslant 3$ 的情况。最近,文献[5-6]首次考虑了对于 $k \geqslant 3$ 的 k-森林染色,证明了对于满足 $\Delta(G) \geqslant 3$,$\mathrm{mad}(G) < \dfrac{12}{5}$ 的图 G,有 $\chi_k^a(G) = \left\lceil \dfrac{\Delta(G)}{k} \right\rceil + 1$。本文将证明,对每个 $k \geqslant 2$,如果给定的图 G 的最大度充分大,则在保持上述结论不变的前提下,最大平均度的上界可以任意地接近常数 3。

如果一个图 G 的任何真子图都是 k-森林 t-可染的,但是 G 本身不是 k-森林 t-可染的,则称 G 为 k-森林 t-临界图。关于临界图,有如下引理:

收稿日期:2010-11-09
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10971121, 61070230);山东大学研究生自主创新基金资助项目(yzc10040)
作者简介:张欣(1986 –),博士研究生,主要研究方向为图的染色理论. Email: sdu.zhang@yahoo.com.cn

引理 1 设 G 是一个 k-森林 t-临界图，其中 $k\geqslant 2$。若 G 含有一个 2-度点 v，其邻点分别为 a 与 b，并且 $d(a)\leqslant d(b)$，则 $d(b)\geqslant k(t-d(a))+1$。

证明 利用反证法。假设 $d(b)<k(t-d(a))+1$。由 G 的临界性知 $G'=G-v$ 有一个 k-森林 t-染色 c。如果 $c(a)=c(b)$，令 S 为 a 在 G' 中所有邻点所使用的颜色集合以及 b 在 G' 中所有邻点所使用的颜色中恰好被使用过 k 次的颜色集合的并。现对 v 进行染色，使得其颜色不属于 $S\cup c(a)$。由于 $|S|\leqslant d(a)-1+\left\lfloor\frac{d(b)-1}{k}\right\rfloor<d(a)-1+\frac{k(t-d(a))+1-1}{k}=t-1$。故此染色可行并容易检验扩展后的染色是 G 的一个 k-森林 t-染色，矛盾。如果 $c(a)\neq c(b)$，则可类似地加以讨论，略。

定理 1 设 G 是一个图。如果 $k\geqslant 2$，$\Delta(G)\geqslant 5k-1$ 且 $\mathrm{mad}(G)<3-\frac{3}{\Delta(G)-k+2}$，则

$$\chi_k^a(G)=\left\lceil\frac{\Delta(G)}{k}\right\rceil+1。$$

证明 令 $t=\left\lceil\frac{\Delta(G)}{k}\right\rceil+1$，$\varepsilon=\frac{3}{\Delta(G)-k+2}$。假设 G 是一个满足定理条件的极小反例。则 G 是一个 k-森林 t-临界图。并且容易证明 $\delta(G)\geqslant 2$。对于 任意 $v\in V(G)$，定义 v 的初始权 $w(v)$ 为其度数 $d(v)$。下面采用权转移方法，定义转移规则如下：

$$G\text{ 中的每个 }d\text{ 度点}(d\geqslant 3)\text{向其相邻的每个 2-度点转移权值 }f(d)=1-\frac{3-\varepsilon}{d}。$$

记转移后点 v 的权值为 $w'(v)$。由于权只是在各顶点内部进行转移，从而权的加和保持不变。下面将证明对于任意 $v\in V(G)$ 都有 $w'(v)\geqslant 3-\varepsilon$。从而对于任意 $H\subseteq G$ 都有 $\sum_{v\in V(H)}w(v)=\sum_{v\in V(H)}w'(v)\geqslant(3-\varepsilon)|V(H)|$。继而推得 $\mathrm{mad}(G)\geqslant 3-\varepsilon$，矛盾。

任取 $v\in V(G)$，若 $d(v)\geqslant 3$，则其最多与 $d(v)$ 个 2-度点相邻，于是根据转移规则有 $w'(v)\geqslant d(v)-d(v)\cdot\frac{d(v)-(3-\varepsilon)}{d(v)}=3-\varepsilon$。下仅需证明对于每个 2-度点 v 也有 $w'(v)\geqslant 3-\varepsilon$。设 v 的两个邻点分别为 u 和 w。不妨设 $d(u)\leqslant d(w)$。令 $d=d(u)$，$d'=k(t-d)+1$。则由引理 1 知 $d(w)\geqslant d'$。下面分三种情况讨论。

情况 1 $\frac{kt+1}{k+1}\geqslant d\geqslant 3$。

在此情况下，容易验证 $d'\geqslant d$。根据转移规则，有 $w'(v)=2+f(d(u))+f(d(w))\geqslant 2+f(d)+f(d')=4-\frac{d+d'}{dd'}(3-\varepsilon)$。注意到 $4-\frac{d+d'}{dd'}(3-\varepsilon)\geqslant 3-\varepsilon$ 等价于 $g(d)=(1+\varepsilon)dd'+(\varepsilon-3)(d+d')\geqslant 0$。根据 d' 的定义易知 $g(d)$ 是一个关于 d 的一个二次多项式且 d^2 的系数为负。由于 $3\leqslant d\leqslant d'$，因此要证明对于所有满足条件的 d 有 $g(d)\geqslant 0$ 只需要证明 $g(3)\geqslant 0$ 与 $g\left(\frac{kt+1}{k+1}\right)\geqslant 0$。由于 $t\geqslant\frac{\Delta(G)}{k}+1$，故以上等价于证明如下两个不等式：

$$\varepsilon\geqslant\frac{9}{4\Delta(G)-8k+7},\tag{1}$$

$$\varepsilon\geqslant\frac{5k+5-\Delta(G)}{3k+3+\Delta(G)}。\tag{2}$$

容易验证，当 $\Delta(G)\geqslant 5k-1$ 时，$\varepsilon=\frac{3}{\Delta(G)-k+2}\geqslant\max\left\{\frac{9}{4\Delta(G)-8k+7},\frac{5k+5-\Delta(G)}{3k+3+\Delta(G)}\right\}$ 恒成立。因此(1)与(2)成立。

情况 2 $d\geqslant\frac{kt+1}{k+1}$。

在此情况下，有 $d(w)\geqslant d(u)=d\geqslant\frac{kt+1}{k+1}$。根据转移规则，依然有 $w'(v)=2+f(d(u))+f(d(w))\geqslant 2+2f\left(\frac{kt+1}{k+1}\right)$。由于证明 $w'(v)\geqslant 3-\varepsilon$ 等价于证明

$$\varepsilon \geqslant \frac{6k+5-kt}{2k+3+kt}, \tag{3}$$

且注意到 $t \geqslant \frac{\Delta(G)}{k}+1$，因此由(2)成立可推得(3)必定成立。

情况 3　$d=2$。

在此情况下必有 $d' \geqslant \Delta(G)-k+1 \geqslant 3$，从而根据转移规则有 $w'(v)=2+f(d(w)) \geqslant 2+f(\Delta(G)-k+1)=3-\frac{3-\varepsilon}{\Delta(G)-k+1}$。由于 $\Delta(G)-k+1=\frac{3-\varepsilon}{\varepsilon}$，因此必有 $w'(v) \geqslant 3-\varepsilon$。从而定理得证。

根据定理 1，很自然地有推论成立。

推论 1　给定一个整数 $k \geqslant 2$ 与一个图 G，则对任意的 $\varepsilon>0$ 都存在一个正整数 Δ_0，使得当 $\Delta(G) \geqslant \Delta_0$，$\mathrm{mad}(G)<3-\varepsilon$ 时，有

$$\chi_k^a(G)=\left\lceil \frac{\Delta(G)}{k} \right\rceil+1。$$

由于围长为 $g(G)$ 的平面图 G 满足条件 $\mathrm{mad}(G) \leqslant \frac{2g(G)}{g(G)-2}$，因此由定理 1 还可得另一推论：

推论 2　给定一个整数 $k \geqslant 2$ 与一个围长 $g(G)=g \geqslant 7$ 的平面图 G，如果 $\Delta(G) \geqslant \max\left\{5k-1,\ k+\frac{g+6}{g-6}\right\}$，则

$$\chi_k^a(G)=\left\lceil \frac{\Delta(G)}{k} \right\rceil+1。$$

注　对于一个图 G，如果赋给其每个点 v 一个长度为 m 的颜色列表 $L(v)$，且 G 存在一个 k-森林染色 c 使得对于 G 中每一个点 v 有 $c(v) \in L(v)$，则称 G 是 k-森林 m-可选的。使得 G 是 k-森林 m-可选的最小整数 m 称为 G 的 k-森林选择数，记为 $\chi_k^c(G)$。由于在以上引理、定理与推论的证明过程中并没有采用重新染色的技巧，因此上述各结论均可以推广到图 G 的 k-森林选择性上。即保持其他条件不变，将定理 1、推论 1 与推论 2 中的 $\chi_k^a(G)$ 改为 $\chi_k^c(G)$ 时，结论依然成立。

参考文献：

[1] GRÜNBAUM B. Acyclic colourings of planar graphs[J]. Israel J, 1973, 14:390-408.
[2] HIND H, MOLLOY M, REED B. Colouring a graph frugally[J]. Combinatorica, 1997, 17:469-482.
[3] YUSTER R. Linear colouring of graphs[J]. Discrete Math, 1998, 185:293-297.
[4] ESPERET L, MONTASSIER M, RASPAUD A. Linear choosability of graphs[J]. Discrete Math, 2008, 308:3938-3950.
[5] ZHANG Xin, LIU Guizhen, WU Jianliang. *k*-forested coloring of planar graphs with large girth[J]. Proc Japan Acad Ser A Math Sci, 2010, 86(10):169-173.
[6] ZHANG Xin, LIU Guizhen, WU Jianliang. *k*-forested choosability of graphs with bounded maximum average degree, Bulletin of the Iranian Mathematical Society[J/OL]. Bull Iranian Math Soc. http://arxiv.org/pdf/1102.3987v1.

（编辑：李晓红）