

1-平面图的结构性质及其在无圈边染色上的应用

张欣, 刘桂真*, 吴建良

山东大学数学学院, 济南 250100

E-mail: sdu.zhang@yahoo.com.cn, gzliu@sdu.edu.cn, jlwu@sdu.edu.cn

收稿日期: 2009-09-14; 接受日期: 2010-07-31; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 10871119, 10971121) 与高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 200804220001) 资助项目

摘要 一个图称为是 1-平面的如果它可以画在一个平面上使得它的每条边最多交叉另外一条边. 本文描述了任意 1-平面图中小于等于 7 度点之邻域的局部结构, 解决了由 Fabrici 和 Madaras 提出的两个关于 1-平面图图类中轻图存在性的问题, 证明了每个最大度是 Δ 的 1-平面图 G 是无圈列表 $\max\{2\Delta - 2, \Delta + 83\}$ -边可选的.

关键词 1-平面图 轻图 无圈边染色 列表染色

MSC (2000) 主题分类 05C10, 05C15

1 引言

本文仅考虑简单无向的有限图. 记号 $V(G)$, $E(G)$, $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示图 G 的点集, 边集, 最小度和最大度. 记 $v(G) = |V(G)|$, $e(G) = |E(G)|$. 用 $d_G(v)$ (简写成 $d(v)$) 表示点 v 在 G 中的度数. 图 G 中的 k -, k^+ - 与 k^- 点分别表示度数为 k , 至少为 k 和至多为 k 的点. 其他没有定义的记号参见文献 [1].

一个图 G 称为是可 1-嵌入到一个曲面的, 如果它可以画在一个曲面上使得它的每条边最多交叉另外一条边. 特别地, 一个图称为是 1-平面的, 如果它可以 1-嵌入在一个平面上. 1-平面图的概念由 Ringel 在 [2] 中研究平面图的点面染色的时候提出. Ringel 猜想每个 1-平面图都是可以 6-点染色的, 这已被 Borodin 在 [3] 中证明. 最近, Albertson 与 Mohar 在 [4] 中研究了可 1-嵌入到一个正亏格曲面的图类的列表点染色. Borodin 等在 [6] 中证明了每个 1-平面图是无圈 20-点可染的. Fabrici 和 Madaras 在 [5] 中则研究了 1-平面图的结构性质. 他们证明了任何 1-平面图 G 都满足 $e(G) \leq 4v(G) - 8$, 于是有 $\delta(G) \leq 7$. 由于存在一个 7-正则的 1-平面图 (参见文献 [5] 中的图 1), 这个上界 7 是最优的.

本文在第 2 节描述了 1-平面图中小于等于 7 度点之邻域的局部结构. 利用这些结构, 在第 3 节回答了由 Fabrici 和 Madaras 在 [5] 中提出的两个关于 1-平面图图类中轻图存在性的问题, 并在第 4 节中证明了最大度为 Δ 的 1-平面图 G 是无圈列表 $\max\{2\Delta - 2, \Delta + 83\}$ -边可选的.

2 1-平面图的局部结构

对于 1-平面图 G , 本文总是假设 G 满足最优性, 即 G 已经被 1-嵌入在平面上并使得 G 中的交叉点的数目是最小的. 因此对于交叉于 z 点的两条边 x_1y_1, x_2y_2 , 它们的四个端点是两两不同的. 设

引用格式: Zhang X, Liu G Z, Wu J L. Structural properties of 1-planar graphs and an application to acyclic edge coloring (in Chinese). Sci Sin Math, 2010, 40(10): 1025-1032, doi: 10.1360/012009-678

$C(G)$ 是 G 中所有交叉点的集合 (注意交叉点并非 G 中的顶点), $E_0(G)$ 是 G 中没有被交叉的边的集合. 定义 1- 平面图 G 的**关联平面图** G^\times , 使得 $V(G^\times) = V(G) \cup C(G)$, $E(G^\times) = E_0(G) \cup \{xz, yz \mid xy \in E(G) \setminus E_0(G)\}$, 其中 z 是位于 xy 上的交叉点. 于是 G 中的交叉点成为了 G^\times 中的度数为 4 的顶点. 一个简单图 G 称为是三角化的, 如果其每个长度大于等于 3 的圈都含有弦. 对于一个 1- 平面图 G , 称 G_T 为它的**正规三角化**, 如果 G_T 是通过对 G 依次进行如下操作得来的:

步骤 1 对于每对相互交叉于点 s (并非 G 的顶点) 的边 ab, cd , 增加边 ac, cb, bd 与 da 使其包围 s ;

步骤 2 删除所有重边;

步骤 3 如果有两条相互交叉的边, 删除其中一条;

步骤 4 将步骤 3 得到的平面图任意进行三角化;

步骤 5 将步骤 3 中删除的边重新添加到图中.

注意到 G_T 的关联平面图 G_T^\times 是 G^\times 的一个特殊的三角化, 于是 G_T^\times 中的每个点 v 都关联 $d_{G_T^\times}(v)$ 个 3- 面. 记 v 在 G_T^\times 的邻点 (按照一个圆圈的顺序排列) 为 v_1, \dots, v_d , 令 $v_i^+ = v_{i+1}$, $v_i^- = v_{i-1}$, 其中 $d = d_{G_T^\times}(v)$, i 取模 d 的同余. 用 $c(v)$ 表示在 G_T^\times 中与 v 相邻的交叉点的个数. 则有下面一个结论. 由于它的证明非常简单, 故本文将其省略.

性质 1 对于任何一个 1- 平面图 G 的正规三角化 G_T^\times , 任取 $v \in V(G_T^\times)$ 并记 $n = d_{G_T^\times}(v)$, 则有如下结论:

- (1) 任何两个交叉点不相邻;
- (2) 若 $n = 3$, 则 $c(v) = 0$;
- (3) 若 $n = 4$ 且 v 不是一个交叉点, 则 $c(v) \leq 1$;
- (4) 若 $n \geq 5$, 则 $c(v) \leq \frac{n}{2}$.

取 $v \in V(G_T)$ 和一个 v 在 G_T^\times 中的不是交叉点的邻点 u . 由 u^+ 与 u^- 的定义可知, $vu^+, vu^- \in E(G_T^\times)$, 且 G_T^\times 中的一条路 u^-uu^+ 对应着 G_T 中含有交叉点 u 的一条边 u^-u^+ . 令 w 为 v 在 G_T 中的一个邻点使得 vw 与 u^-u^+ 在 G_T 中交叉于 u . 由 G_T^\times 的定义可知 $wu^-, wu^+ \in E(G_T^\times)$. 这里称满足此条件的 w 为 v 在 G_T 中的**主邻点**, u^-, u^+ 为 v 在 G_T 中的**次邻点**, 不满足该条件的其他 v 在 G_T 中的邻点称为 v 在 G_T 中的**常邻点**. G_T 中的三角形 u^-wu^+ 称为与 v 关联的**主三角**. 下文中当提到主点、次点与常点的时候, 通常指的是 v 的主邻点、次邻点与常邻点. 由于 v 在 G_T^\times 中的邻点可以按照一个圆圈的顺序排列, 那么将其中的每个交叉点用与之相邻的主点替换, 则 v 在 G_T 中的邻点也可以按照一个圆圈的顺序排列. 由于 G 中不含有重边, 不同的交叉点与不同的主点所相邻. 令 $v_1, \dots, v_{d_{G_T}(v)}$ 为 v 在 G_T 中按圆圈顺序排列的所有邻点. 定义 $\Omega(v_i v_j) = \{v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j\}$, $v_i^< = v_{i+1}$ 与 $v_i^> = v_{i-1}$, 其中 i 取模 $d_{G_T}(v)$ 的同余. 由于 G_T 是 G 的一个正规三角化, 则 $v_1 v_2 \cdots v_{d_{G_T}(v)} v_1$ 在 G_T 中形成一个圈 C , 称为 v 的**关联圈**. 称一条路 $P_i = v_1^i v_2^i \cdots v_{2t_i}^i v_{2t_i+1}^i$ 是 C 的一个**片段**, 如果 (a) $\bigcup_{k=0}^{t_i} \{v_{2k+1}^i\}$ 中的元素为 v 的次邻点; (b) $\bigcup_{k=1}^{t_i} \{v_{2k}^i\}$ 中的元素为 v 的主邻点; (c) G_T 中形式为 $v_{2k-1}^i v_{2k}^i v_{2k+1}^i$ (其中 $1 \leq k \leq t_i$) 的三角形为与 v 关联的主三角; (d) $v_1^{i<} < v_{2t_i+1}^i >$ 不是 v 的主邻点. 片段 P_i 的**规模**指的是在 $V(P_i)$ 中与 v 关联的主三角的个数, 记为 $S(P_i)$. 从而有 $S(P_i) = t_i$.

通过上述定义, 下面将证明本节中一个主要的定理.

定理 2 设 G 是一个简单的 1- 平面图, 则在 G 中必存在一个 k 度点 v (其邻点记为 v_1, v_2, \dots, v_k , 其中 $d(v_1) \leq d(v_2) \leq \dots \leq d(v_k)$), 满足如下某一个条件:

- (C1) $k \leq 2$;
- (C2) $k = 3$ 且 $d(v_1) \leq 35$;

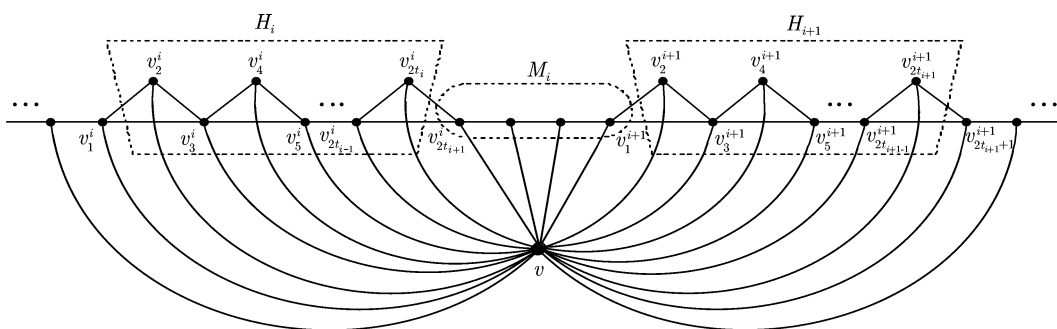


图 1 定理 2 的证明中子图 H_i 与 M_i 的定义示意图

- (C3) $k = 4$ 且 $d(v_1) \leq 19, d(v_2) \leq 35$;
- (C4) $k = 5$ 且 $d(v_1) \leq 14, d(v_2) \leq 19, d(v_3) \leq 35$;
- (C5) $k = 6$ 且 $d(v_1) \leq 11, d(v_2) \leq 14, d(v_3) \leq 19, d(v_4) \leq 35$;
- (C6) $k = 7$ 且 $d(v_1) \leq 8, d(v_2) \leq 11, d(v_3) \leq 14, d(v_4) \leq 19, d(v_5) \leq 35$.

证明 该定理的证明采用反证法. 设 G 是一个反例. 如果在 G 中两个不相邻的点之间加一条边 e 可使得 $G + e$ 仍然是 1- 平面图, 那么 $G + e$ 依然是定理的一个反例. 因此我们可以不妨假设 G 是 2- 连通的且 $G = G_T$, 其中 G_T 是 G 的一个正规三角化. 换句话说, G 就是其自身的三角化. 所以后文中将不区分 G 与 G_T 这两个记号, 并且当提到 G^\times 的时候, 也即是 G_T^\times . 另一方面, 由关联平面图的定义, 当 v 不是一个交叉点的时候, 有 $d_{G^\times}(v) = d_G(v)$. 因此在下面的证明中, 当 v 是 G 中的点时, 也不再区分 $d_{G^\times}(v)$ 与 $d_G(v)$. 此时用 $d(v)$ 同时代表 $d_{G^\times}(v)$ 与 $d_G(v)$.

对于 G 中的一个点 v , 令 $n_i(v)$ (简记为 n_i) 为 v 在 G 中度数为 i 的邻点的个数. 对于点集 $S \subseteq V(G)$, 令 $n_i(S) = \sum_{v \in S} n_i(v)$. 记 $n_i^+(v) = \sum_{k=i}^{\Delta(G)} n_k(v)$, $d = d(v)$. 对于 G 的一个子图 H , 用 $n_i(H)$ 表示 H 中包含的 i 度点的个数. 设 C 是 v 的关联圈且其含有 n 个片段, 按顺序排列记为 P_1, \dots, P_n . 令 $t = \sum_{k=1}^n S(P_k)$, $M_i = \Omega(v_{2t_i+1}^i v_1^{i+1})$ ($i = 1, 2, \dots, n$). 称点集 $\bigcup_{k=1}^n \{M_k \setminus \{v_{2t_k+1}^k, v_1^{k+1}\}\}$ 为关联圈 C 的区间点. 对每个片段 P_i , 定义图 G_i 使得 $V(G_i) = V(P_i)$ 与 $E(G_i) = \bigcup_{k=1}^{t_i} \{v_{2k-1}^i v_{2k+1}^i\} \cup E(P_i)$. 记 $H_i = G_i \setminus \{v_1^i, v_{2t_i+1}^i\}$. 则由 P_i 的定义有 $H_i \subseteq G_i \subseteq G$.

G 中的一个三角形 abc 称为是轻的, 如果 $\max\{d(a), d(b), d(c)\} \leq 7$, 否则称 abc 为重的. 对于如上描述的点 v , 它关联 t 个主三角. 现假设其中的 $t - x$ 个为重的, x 个为轻的. 下面将与 v 关联的所有主三角分为三类:

- 第 1 类 诸如 abc 形式的三角形, 其中 a 是主点, b, c 是次点且 $d(a) \leq 5, \min\{d(b), d(c)\} \geq 6$;
- 第 2 类 诸如 abc 形式的三角形, 其中 a 是主点, b, c 是次点且 $\min\{d(b), d(c)\} \leq 5$;
- 第 3 类 诸如 abc 形式的三角形, 其中 $\min\{d(a), d(b), d(c)\} \geq 6$.

记属于以上三类的主三角的个数分别为 i, j 与 x_2 , 其中 $i + j = x_1, x_1 + x_2 = x$.

断言 1 $n_8^+ \geq \lceil \frac{t-x}{2} \rceil + \lfloor \frac{j}{2} \rfloor$.

由于与 v 关联的每个重的主三角都包含至少一个 8^+ 点, 从而至少有 $\lceil \frac{t-x}{2} \rceil$ 个 8^+ 点是包含于重的主三角中. 并且当这个下界被取到时, 每个重的主三角包含恰好一个 8^+ 点并且每对相互关联的主三角包含一个共有的 8^+ 点.

对于每个属于第 2 类的轻的主三角 abc , 其中 a 是主点, b, c 是次点且 $d(b) \leq 5$, 由于结构 (C1)–(C4) 在 G 中不存在, 有 $d(b) = 5$ 并且 b 的其它三个邻点均为 36^+ 点. 记 C 为 v 的关联圈, 则 $1 \leq |N_C(b) - \{a, c\}| \leq 2$. 如果 $|N_C(b) - \{a, c\}| = 1$, 令 $p \in N_C(b) - \{a, c\}$, 则 p 是一个常点. 因此 p 最

多相邻两个度数不超过 5 的次点. 如果 $|N_C(b) - \{a, c\}| = 2$, 令 $N_C(b) - \{a, c\} = \{p, q\}$, 则 bpq 是一个重的主三角并包含两个 8^+ 点. 无论哪种情况都将找到至少 $\lceil \frac{j}{2} \rceil$ 个在前一步没有统计到的新 8^+ 点.

因此, $n_8^+ \geq \lceil \frac{t-x}{2} \rceil + \lceil \frac{j}{2} \rceil$.

断言 2 存在一个整数 $\mu \geq 0$ 使得 $n_6 + n_7 = x + x_2 - j + \mu$.

由于每个属于第 1 类的轻的主三角包含两个 6 度或 7 度的点, 每个属于第 3 类的轻的主三角包含三个 6 度或 7 度的点, 则有 $n_6 + n_7 \geq i + 2x_2 = x + x_2 - j$.

断言 3 $n_5 \leq d - \frac{t+x-j}{2} - x_2 - \mu - n_3 - n_4$.

由于结构 (C1) 不存在, 有 $\delta(G) \geq 3$, $n_5 = d - n_3 - n_4 - n_6 - n_7 - n_8^+$. 注意到 $i + j + x_2 = x$, 则由断言 1 与断言 2 可推得 $n_5 \leq d - \frac{t+x-j}{2} - x_2 - \mu - n_3 - n_4$.

断言 4 $2n_3 + n_4 + t + x \leq d$.

由 G_i, H_i 与 $M_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的定义知, 每个 G_i 包含 t_i 个与 v 关联的主三角. 假设其中 α_i 个是轻的, β_i 个是重的. 即 $\alpha_i + \beta_i = t_i$. 由于结构 (C3) 不存在, 任何一个轻的主三角都不含 4 度点. 所以 v 在 G 中的 4 度邻点要么包含在重的主三角中, 要么包含在 C 的区间点中. 注意到 H_i 中包含的所有次点都是 5^+ 点, 因此如果在 H_i 中包含一个 4 度点, 其必是一个主点. 故 H_i 最多包含 β_i 个 4 度点. 并且如果 $|M_i| = 2$, $d(v_1^{i+1}) = 4$, $d(v_{2t_i+1}^i) = 4$, 则 $v_{2t_i}^i, v_{2t_i-1}^i, v_2^{i+1}, v_3^{i+1}$ 都是 36^+ 点 (因为结构 (C3) 不存在). 所以 G 中的三角形 $v_{2t_i-1}^i v_{2t_i}^i v_{2t_i+1}^i$ 和 $v_1^{i+1} v_2^{i+1} v_3^{i+1}$ 都是重的. 类似可证 H_j 至多包含 $\beta_j - 1$ 个 4 度点, 其中 $j = i$ 或 $i + 1$.

由性质 1 (2) 与 G_i 的定义知, 如果 C 中含有 3 度点, 则它们均是 C 的区间点. 设在 M_i 中有 γ_i 个 3 度点 ($\gamma_i \geq 0$). 如果 $|M_i| \geq 3$, 则因为结构 (C2) 与 (C3) 在 G 中不存在且由性质 1 (2) 知 $v_{2t_i+1}^i$ 与 v_1^{i+1} 都不可能是 3 度点, M_i 包含至少 $2\gamma_i + 1$ 个非 4 度点. 如果 $|M_i| \geq 3$, 则 $n_4(M_i) \leq |M_i| - (2\gamma_i + 1)$. 如果 $|M_i| = 2$, 则 $\gamma_i = 0$, 故之前这个关于 $n_4(M_i)$ 的不等式依然成立, 除非 $d(v_1^{i+1}) = 4$, $d(v_{2t_i+1}^i) = 4$. 对于这个特殊情况, 不等式实际上将变为 $n_4(M_i) \leq |M_i| - (2\gamma_i + 1) + 1$. 但是从另一方面, 根据之前的讨论有 $n_4(H_i) \leq \beta_i - 1$, $n_4(H_{i+1}) \leq \beta_{i+1} - 1$. 由于

$$\begin{aligned}
 N_G(v) = V(C) &= \bigcup_{i=1}^n (V(H_i) \cup V(M_i)), \\
 \left| \bigcup_{k=1}^n M_k \right| &= d - \sum_{k=1}^n (2t_k - 1) \\
 &= d + n - 2 \sum_{k=1}^n (\alpha_k + \beta_k) \\
 &= d + n - 2x - 2(t - x) \\
 &= d + n - 2t,
 \end{aligned}$$

可以推得

$$\begin{aligned}
 n_4 &= \sum_{k=1}^n n_4(H_k) + \sum_{k=1}^n n_4(M_k) \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \beta_k + \sum_{k=1}^n |M_k| - \sum_{k=1}^n (2\gamma_k + 1) \\
 &= (t - x) + (d + n - 2t) - (2n_3 + n)
 \end{aligned}$$

$$= d - x - t - 2n_3.$$

因此 $2n_3 + n_4 + t + x \leq d$.

下面将权转移方法用在 G 的关联平面图 G^\times 上以完成定理的证明. 由于 G^\times 是一个平面图且

$$\sum_{v \in V(G^\times)} (d_{G^\times}(v) - 4) = \sum_{v \in V(G)} (d_{G^\times}(v) - 4) + \sum_{v \in C(G^\times)} (d_{G^\times}(v) - 4) = \sum_{v \in V(G)} (d_G(v) - 4).$$

则由 Euler 公式有

$$\sum_{v \in V(G)} (d_G(v) - 4) + \sum_{f \in F(G^\times)} (d_{G^\times}(f) - 4) = -8.$$

对于 $x \in V(G) \cup F(G^\times)$, 定义权如下: 对于任意的 $x \in V(G)$, 令 $ch(x) = d_G(x) - 4$; 对于任意的 $f \in F(G^\times)$, 令 $ch(f) = d_{G^\times}(f) - 4$. 则 $\sum_{x \in V(G) \cup F(G^\times)} ch(x) = -8$. 下面对 $x \in V(G) \cup F(G^\times)$ 中各元素的权值进行调整, 记调整后的权值为 $ch'(x)$. 由于权只是在各元素内部进行转移, 从而权的加和保持不变, 即 $\sum_{x \in V(G) \cup F(G^\times)} ch'(x) = \sum_{x \in V(G) \cup F(G^\times)} ch(x) < 0$. 下面定义权转移规则. 如果 G^\times 中的一个 3-面恰好关联一个交叉点, 则称为是特殊的.

- (R1) G^\times 中每个非特殊的 3-面从它关联的每个顶点获取权值 $\frac{1}{3}$;
- (R2) G^\times 中每个特殊的 3-面从它关联的每个非交叉点获取权值 $\frac{1}{2}$;
- (R3) G 中每个度数在 9 到 11 之间的点向它在 G 中相邻的每个 7 度点转移权值 $\frac{1}{21}$;
- (R4) G 中每个度数在 12 到 14 之间的点向它在 G 中相邻的每个 7 度点转移权值 $\frac{1}{18}$, 每个 6 度点转移权值 $\frac{1}{6}$;
- (R5) G 中每个度数在 15 到 19 之间的点向它在 G 中相邻的每个 7 度点转移权值 $\frac{1}{15}$, 每个 6 度点转移权值 $\frac{1}{5}$, 每个 5 度点转移权值 $\frac{4}{15}$;
- (R6) G 中每个度数在 20 到 35 之间的点向它在 G 中相邻的每个 7 度点转移权值 $\frac{1}{12}$, 每个 6 度点转移权值 $\frac{1}{4}$, 每个 5 度点转移权值 $\frac{1}{3}$, 每个 4 度点转移权值 $\frac{5}{12}$;
- (R7) G 中每个度数不小于 36 的点向它在 G 中相邻的每个 7 度点转移权值 $\frac{1}{9}$, 每个 6 度点转移权值 $\frac{1}{3}$, 每个 5 度点转移权值 $\frac{4}{9}$, 每个 4 度点转移权值 $\frac{5}{9}$, 每个 3 度点转移权值 $\frac{2}{3}$.

设 f 是 G^\times 中的一个面, 则必有 $d_{G^\times}(f) = 3$. 如果 f 不是特殊的, 则由 (R1) 知 $ch'(f) = ch(f) + 3 \times \frac{1}{3} = 0$. 如果 f 是特殊的, 则由 (R2) 知 $ch'(f) = ch(f) + 2 \times \frac{1}{2} = 0$.

设 v 是 G 中的一个点. 由于结构 (C1) 不存在, 有 $d(v) \geq 3$. 假设 v 是一个 d 度点, 其 d 个邻点分别为 v_1, \dots, v_d , 其中 $d(v_1) \leq \dots \leq d(v_d)$. 下面将证明对于每个这样的点 v 均满足 $ch'(v) \geq 0$.

假设 $d = 3$. 由于结构 (C2) 不存在, v 必相邻三个 36^+ -点. 由性质 1 (2) 知, v 不关联特殊的 3-面. 故由 (R1) 与 (R7) 有 $ch'(v) \geq ch(v) - 3 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{2}{3} = 0$.

假设 $d = 4$. 由性质 1 (3) 知, $c(v) \leq 1$. 因此 v 最多关联两个特殊 3-面. 如果 $d(v_1) \geq 20$, 则由 (R1), (R2) 与 (R6) 有 $ch'(v) \geq ch(v) - 2 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{5}{12} = 0$. 如果 $d(v_1) \leq 19$, 则由于结构 (C3) 不存在有 $d(v_2) \geq 36$. 故由 (R7) 有 $ch'(v) \geq ch(v) - 2 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{5}{9} = 0$.

假设 $d = 5$. 如果 $d(v_1) \geq 15$, 则由 (R1), (R2), (R5) 与性质 1 (4) 有 $ch'(v) \geq ch(v) - 4 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 5 \times \frac{4}{15} = 0$. 故假设 $d(v_1) \leq 14$. 如果 $d(v_2) \geq 20$, 则由 (R1), (R2) 与 (R6) 有 $ch'(v) \geq ch(v) - 4 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{3} = 0$. 故假设 $d(v_2) \leq 19$. 这时由于结构 (C4) 不存在必有 $d(v_3) \geq 36$, 因此由 (R1), (R2) 与 (R7), 依然有 $ch'(v) \geq ch(v) - 4 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 3 \times \frac{4}{9} = 0$.

假设 $d = 6$. 如果 $d(v_1) \geq 12$, 则由 (R1), (R2) 与 (R4) 有 $ch'(v) \geq ch(v) - 6 \times \frac{1}{2} + 6 \times \frac{1}{6} = 0$. 故假设 $d(v_1) \leq 11$. 如果 $d(v_2) \geq 15$, 则由 (R1), (R2) 与 (R5) 有 $ch'(v) \geq ch(v) - 6 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{5} = 0$. 故

假设 $d(v_2) \leq 14$. 如果 $d(v_3) \geq 20$, 则由 (R1), (R2) 与 (R6) 有 $ch'(v) \geq ch(v) - 6 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} = 0$. 故假设 $d(v_3) \leq 19$. 这时由于结构 (C5) 不存在必有 $d(v_4) \geq 36$, 因此由 (R1), (R2) 与 (R7), 依然有 $ch'(v) \geq ch(v) - 6 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} = 0$.

假设 $d = 7$. 如果 $d(v_1) \geq 9$, 则由 (R1), (R2), (R5) 与性质 1 (4) 有 $ch'(v) \geq ch(v) - 6 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 7 \times \frac{1}{21} = 0$. 故假设 $d(v_1) \leq 8$. 如果 $d(v_2) \geq 12$, 则由 (R1), (R2) 与 (R4) 有 $ch'(v) \geq ch(v) - 6 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 6 \times \frac{1}{18} = 0$. 故假设 $d(v_2) \leq 11$. 如果 $d(v_3) \geq 15$, 则由 (R1), (R2) 与 (R5) 有 $ch'(v) \geq ch(v) - 6 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{15} = 0$. 故假设 $d(v_3) \leq 14$. 如果 $d(v_4) \geq 20$, 则由 (R1), (R2) 与 (R6) 有 $ch'(v) \geq ch(v) - 6 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{12} = 0$. 故假设 $d(v_4) \leq 19$. 这时由于结构 (C6) 不存在必有 $d(v_5) \geq 36$, 因此由 (R1), (R2) 与 (R7), 依然有 $ch'(v) \geq ch(v) - 6 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{9} = 0$.

假设 $d = 8$. 则由 (R1)–(R8) 有 $ch'(v) \geq ch(v) - 8 \times \frac{1}{2} = 0$.

假设 $9 \leq d \leq 11$. 注意到 t 是与 v 关联的主三角的个数, 故有 $c(v) = t$. 由于 $t \leq \frac{d}{2}$, $n_7 \leq d$, 则根据 (R1), (R2) 与 (R3) 有 $ch'(v) \geq ch(v) - \frac{2t}{2} - \frac{d-2t}{3} - \frac{n_7}{21} \geq \frac{19}{42}d - 4 > 0$.

假设 $12 \leq d \leq 14$. 由于 $t \leq \frac{d}{2}$, $n_6 + n_7 \leq d$, 则根据 (R1), (R2) 与 (R4) 有 $ch'(v) \geq ch(v) - \frac{2t}{2} - \frac{d-2t}{3} - \frac{n_6}{6} - \frac{n_7}{18} \geq \frac{1}{3}d - 4 \geq 0$.

假设 $15 \leq d \leq 19$. 由于 $t \leq \frac{d}{2}$, 则根据 (R1), (R2), (R5) 与断言 2, 3, 有 $ch'(v) = ch(v) - \frac{2t}{2} - \frac{d-2t}{3} - \frac{4n_5}{15} - \frac{n_6}{5} - \frac{n_7}{15} \geq \frac{2}{3}d - 4 - \frac{1}{3}t - \frac{1}{5}(x + x_2 - j + \mu) - \frac{4}{15}(d - \frac{t+x-j}{2} - x_2 - \mu - n_3 - n_4) = \frac{2}{5}d - 4 - \frac{1}{5}t - \frac{1}{15}x + \frac{1}{15}(x_2 + j + \mu + 4n_3 + 4n_4) \geq \frac{2}{5}d - 4 - \frac{4}{15}t \geq \frac{4}{15}d - 4 \geq 0$.

假设 $20 \leq d \leq 35$. 由于 $t \leq \frac{d}{2}$, 则根据 (R1), (R2), (R6) 与断言 2, 3, 4 有 $ch'(v) = ch(v) - \frac{2t}{2} - \frac{d-2t}{3} - \frac{n_7}{12} - \frac{n_6}{4} - \frac{n_5}{3} - \frac{5n_4}{12} \geq \frac{2}{3}d - 4 - \frac{1}{3}t - \frac{1}{4}(x + x_2 - j + \mu) - \frac{1}{3}(d - \frac{t+x-j}{2} - x_2 - \mu - n_3 - n_4) - \frac{5n_4}{12} \geq \frac{1}{3}d - 4 - \frac{1}{12}(2t + x + n_4) + \frac{1}{3}n_3 \geq \frac{1}{3}d - 4 - \frac{1}{12}(d - 2n_3 + t) + \frac{1}{3}n_3 \geq \frac{1}{4}d - 4 - \frac{1}{12}t \geq \frac{5}{24}d - 4 > 0$.

假设 $d \geq 36$. 由于 $t \leq \frac{d}{2}$, 则根据 (R1), (R2), (R7) 与断言 2, 3, 4 有 $ch'(v) = ch(v) - \frac{2t}{2} - \frac{d-2t}{3} - \frac{n_7}{9} - \frac{n_6}{3} - \frac{4n_5}{9} - \frac{5n_4}{9} - \frac{2n_3}{3} \geq \frac{2}{3}d - 4 - \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}(x + x_2 - j + \mu) - \frac{4}{9}(d - \frac{t+x-j}{2} - x_2 - \mu - n_3 - n_4) - \frac{5n_4}{9} - \frac{2n_3}{3} = \frac{2}{9}d - 4 - \frac{1}{9}(2n_3 + n_4 + t + x) + \frac{1}{9}(x_2 + j + \mu) \geq \frac{1}{9}d - 4 \geq 0$.

至此, 通过以上讨论, 证明了 $\sum_{x \in V(G) \cup F(G^*)} ch'(x) \geq 0$. 因此, 这个矛盾证明了定理的正确性.

3 1-平面图图类中的轻图

设 \mathcal{H} 是一个图类, H 是一个连通图. 定义 $\phi(H, \mathcal{H})$ 为使得每个 \mathcal{H} 中的图 G 都包含一个同构于 H 的子图 K 并满足 $\max_{x \in V(K)} \{d_G(x)\} \leq \phi(H, \mathcal{H})$ 的最小整数. 如果这个整数不存在, 令 $\phi(H, \mathcal{H}) = +\infty$. 对于一个图 H , 如果 $\phi(H, \mathcal{H}) < +\infty$, 则称它在图类 \mathcal{H} 中是轻的. 图类 \mathcal{H} 中轻图集合用 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 表示.

下面用 P_k 表示具有 k 个顶点的路. \mathcal{P}_δ^1 表示所有的最小度至少为 δ 的 1-平面图. 在文献 [5] 中, Fabrici 与 Madaras 证明了 $\{P_1, P_2\} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{P}_4^1) \subseteq \{P_1, P_2, P_3\}$, $\{P_1, P_2, P_3\} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{P}_5^1) \subseteq \{P_1, P_2, P_3, P_4, K_{1,3}\}$ 并提出了以下两个问题:

- (1) P_3 是否属于 $\mathcal{L}(\mathcal{P}_4^1)$?
- (2) P_4 与 $K_{1,3}$ 是否属于 $\mathcal{L}(\mathcal{P}_5^1)$?

本节将利用第 2 节所描述的结构性质部分回答以上两个问题.

定理 3 设 G 是一个最小度 $\delta \geq 4$ 的简单 1-平面图, 则 G 包含一条路 uvw 使得 $\max\{d(u), d(v), d(w)\} \leq 35$.

证明 由定理 2, G 包含 (C3)–(C6) 中某个结构. 无论它包含哪个, 总能在 G 中找到一条路 uvw 满足 $\max\{d(u), d(v), d(w)\} \leq 35$.

类似地可以证明:

定理 4 设 G 是一个最小度 $\delta \geq 5$ 的简单 1- 平面图, 则 G 包含一个二分图 $[x; u, v, w]$ 使得 $\max\{d(x), d(u), d(v), d(w)\} \leq 35$.

由以上两个定理, 可得到如下几个推论:

推论 1 $P_3 \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_4^1)$.

推论 2 $K_{1,3} \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_5^1)$.

推论 3 $\mathcal{L}(\mathcal{P}_4^1) = \{P_1, P_2, P_3\}$.

4 1- 平面图的无圈边染色

一个从 $E(G)$ 到颜色集 $\{1, \dots, k\}$ 的映射 c 称为是 G 的一个正常 k - 边染色, 如果任何两条相关联的边得到不同的颜色. 一个正常的 k - 边染色 c 称为是无圈的, 如果 G 在染色 c 下不含双色圈. 在给 G 进行无圈边染色时所用的最少颜色数称为 G 的无圈边色数, 记为 $\chi'_a(G)$. 无圈边染色问题由 Alon 等在 [7] 中提出, 他们给出了 $\chi'_a(G)$ 的一个线性的上界: 证明了对任何图均有 $\chi'_a(G) \leq 64\Delta(G)$. 这个上界后来被 Molloy 与 Reed 在 [8] 中改进到 $16\Delta(G)$. 对于一个平面图 G , Fiedorowicz 等在 [9] 中证明了 $\chi'_a(G) \leq 2\Delta(G) + 29$. 最近, 这个界被 Hou 等在 [10] 中改进到 $\max\{2\Delta(G) - 2, \Delta(G) + 22\}$. 本节将考虑 1- 平面图的无圈边染色. 设 ϕ 是 G 的一个边染色, 对于任何的点 $v \in V(G)$, 定义 $\phi(v) = \{\phi(uv) | u \in N(v)\}$.

定理 5 设 G 是一个简单 1- 平面图, 则 $\chi'_a(G) \leq \max\{2\Delta(G) - 2, \Delta(G) + 83\}$.

证明 该定理的证明采用反证法. 令 $L = \max\{2\Delta(G) - 2, \Delta(G) + 83\}$. 设 G 是定理的一个极小反例. 则 G 是 2- 连通的并且 $\delta(G) \geq 2$.

情况 1: $\delta(G) = 2$

令 $d(v) = 2, N(v) = \{v_1, v_2\}$. 假设 $v_1v_2 \notin E(G)$. 则由 G 的极小性, 图 $G' = (G \setminus v) \cup \{v_1v_2\}$ 有一个无圈 L - 边染色 ϕ . 记其所用的颜色集合为 C . 现取 $\tau(vv_1) = \phi(v_1v_2), \tau(vv_2) \in C \setminus \{\phi(v_2) \cup \tau(vv_1)\}$. 对于边 $e \in E(G') - \{v_1v_2\}$, 保持 $\tau(e) = \phi(e)$. 由于 $|C \setminus \{\phi(v_2) \cup \tau(vv_1)\}| > 0$, 则 τ 是 G 的一个无圈 L - 边染色, 矛盾. 故 $v_1v_2 \in E(G)$. 令 $G' = G \setminus v$. 则 G' 有一个无圈 L - 边染色 ϕ . 仍记其所用的颜色集合为 C . 现取 $\tau(vv_2) \in S_2 = C \setminus \{\phi(v_2) \cup \tau(vv_1)\}$. 容易证明 $|S_2| > 0$. 对于边 $e \in E(G')$, 依然保持 $\tau(e) = \phi(e)$. 则 τ 是 G 的一个无圈 L - 边染色, 矛盾.

情况 2: $\delta(G) \geq 3$

对于这种情况, 由定理 2 知 G 至少包含 (C2)–(C6) 中某种结构. 令 $c_1 = 8, c_2 = 11, c_3 = 14, c_4 = 19$ 和 $c_5 = 35$. 现假设 G 包含第 $d - 1$ 个结构, 其中 $d \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

如果 $v_{d-1}v_d \notin E(G)$, 则令 $G' = (G \setminus v) \cup \{v_{d-1}v_d\}$. 否则令 $G' = G \setminus v$. 那么 G' 有一个无圈 L - 边染色 ϕ . 记其所用的颜色集合为 C . 如果 $v_{d-1}v_d \notin E(G)$, 取 $\tau(vv_{d-1}) = \phi(v_{d-1}v_d)$. 否则令 $S_{d-1} = \phi(v_{d-1}) \cup \phi(v_d)$, 取 $\tau(vv_{d-1}) \in C \setminus S_{d-1}$. 由于 $|C| \geq 2\Delta(G) - 2, S_{d-1} \leq 2\Delta(G) - 3$, 有 $|C \setminus S_{d-1}| > 0$. 令 $S_d = \phi(v_1) \cup \dots \cup \phi(v_{d-2}) \cup \phi(v_d), S_i = \bigcup_{k=i}^{d-1} \phi(v_k) (1 \leq i \leq d-2)$. 然后依次给 $vv_d, vv_1, vv_2, \dots, vv_{d-2}$ 进行如下染色. 取 $\tau(vv_d) \in T_d = C \setminus \{S_d \cup \tau(vv_{d-1})\}$. 如果 $\tau(vv_{d-1}) \notin \phi(v_1)$, 取 $\tau(vv_1) \in T'_1 = C \setminus \{(S_1 \setminus \tau(vv_{d-1})) \cup \{\tau(vv_{d-1}), \tau(vv_d)\}\}$. 否则取 $\tau(vv_1) \in T_1 = C \setminus \{S_1 \cup \{\tau(vv_{d-1}), \tau(vv_d)\}\}$. 最后, 对于每个 $2 \leq i \leq d-2$, 取 $\tau(vv_i) \in T_i = C \setminus \{S_i \cup \{\tau(vv_1), \dots, \tau(vv_{i-1}), \tau(vv_{d-1}), \tau(vv_d)\}\}$. 对于每条边 $e \in E(G')$, 保持 $\tau(e) = \phi(e)$. 由于 $|T_{d-2}| \geq \dots \geq |T_1|, |T'_1| \geq |T_1|, \min\{|T_1|, |T_d|\} \geq$

$L - (\sum_{k=1}^{d-2} (c_k - 1) + \Delta(G)) > 0$, 可知染色 τ 必然存在且是无圈的. 因此得到了 G 的一个无圈 L -边染色 τ , 矛盾. 证毕.

注 定理 5 的证明没有用到重新染色的技巧, 因此根据这个证明还可以得到一个更广泛的结果.

定理 6 每个简单 1-平面图 G 都是无圈 $\max\{2\Delta(G) - 2, \Delta(G) + 83\}$ -边可选的.

参考文献

- 1 Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications. New York: North-Holland, 1976
- 2 Ringel G. Ein sechsfarbenproblem auf der Kugel. Abh Math Sem Univ Hamburg, 1965, 29: 107-117
- 3 Borodin O V. Solution of Ringel's problems on the vertex-face coloring of plane graphs and on the coloring of 1-planar graphs (in Russian). Diskret Anal, 1984, 41: 12-26
- 4 Albertson M O, Mohar B. Coloring vertices and faces of locally planar graphs. Graphs Combin, 2006, 22: 289-295
- 5 Fabrici I, Madaras T. The structure of 1-planar graphs. Discrete Math, 2007, 307: 854-865
- 6 Borodin O V, Kostochka A V, Raspaud A, et al. Acyclic colouring of 1-planar graphs. Discrete Appl Math, 2001, 114: 29-41
- 7 Alon N, McDiarmid C J H, Reed B A. Acyclic coloring of graphs. Random Structures Algorithms, 1991, 2: 277-288
- 8 Molloy M, Reed B. Further algorithmic aspects of the local lemma. In: Proceedings of the 30th Annual ACM Symposium in Theory of Computing. New York: ACM Press, 1998, 524-529
- 9 Fiedorowicz A, Halszczak M, Narayanan N. About acyclic edge colourings of planar graphs. Inform Process Lett, 2008, 108: 412-417
- 10 侯建锋, 吴建良, 刘桂真, 等. 平面图和系列平行图的无圈边染色. 中国科学 A 辑, 2008, 38: 1335-1346

Structural properties of 1-planar graphs and an application to acyclic edge coloring

ZHANG Xin, LIU GuiZhen & WU JianLiang

Abstract A graph is called 1-planar if it can be drawn in the plane so that each edge is crossed by at most one other edge. In this paper, we establish a local property of 1-planar graphs which describes the structure in the neighborhood of small vertices (i.e., vertices of degree no more than seven). Meanwhile, some new classes of light subgraphs in 1-planar graphs with the bounded degree are found. Therefore, two open problems presented by Fabrici and Madaras are solved. Furthermore, we prove that each 1-planar graph G with maximum degree Δ is acyclically edge L -colorable, where $L = \max\{2\Delta - 2, \Delta + 83\}$.

Keywords: 1-planar graph, light graph, acyclic edge coloring, list coloring

MSC(2000): 05C10, 05C15