参考答案

一、单项选择题（每小题 4 分，共 20 分）

B，D，A，C，A

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y-8z+8\pi=0$.
2. $\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$.
3. $\frac{4}{15}\pi abc^3$.
4. $2\pi a^3$
5. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+x$.

三、（10 分）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $f(y-x,yz)=0$ 所确定的隐函数，其中 f 对各变量有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 方程两边对 x 求偏导数，得 $-f_1+yf_2\frac{\partial z}{\partial x}=0$，所以，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f_1}{yf_2}$

方程 $-f_1+yf_2\frac{\partial z}{\partial x}=0$ 两边再对 x 求偏导数，得

$$f_{11}-yf_{12}\frac{\partial z}{\partial x}-yf_{21}\frac{\partial z}{\partial x}+y^2f_{22}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+yf_2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

由上式解得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{yf_2}\left[f_{11}-yf_{12}\frac{\partial z}{\partial x}-yf_{21}\frac{\partial z}{\partial x}+y^2f_{22}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$=-\frac{1}{yf_2^{\ 3}}(f_1^2f_{22}-2f_1f_2f_{21}+f_2^2f_{11}).$$

四、（8 分）求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=Rx\ (R>0)$ 内部的那部分的面积.

解 含在圆柱面 $x^2+y^2=Rx\ (R>0)$ 内部位于 xoy 平面上方的曲面方

程为：$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

则 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

设 $D:x^2+y^2\le Rx$，则所求面积为

$$S=2\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=2R\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}dr=2R^2(\pi-2).$$

五、（10 分）在变力 $\boldsymbol{F}=(e^x\sin y-x-y)\boldsymbol{i}+(e^x\cos y-ax)\boldsymbol{j}\ \ (a>0)$ **的作用下，质点由点** $A(2a,0)$ **沿曲线** $y=\sqrt{2ax-x^2}$ **运动到点** $O(0,0)$**，求变力** $\boldsymbol{F}$ **所作的功.**

解 设 $L:y=\sqrt{2ax-x^2}$，$L_1:y=0\ \ (0\le x\le 2a)$，故变力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 W 为

$$W=\int_L(e^x\sin y-x-y)dx+(e^x\cos y-ax)dy$$

$$=\oint_{L+L_1}-\int_{L_1}=\iint_D(1-a)dxdy+\int_0^{2a}xdx,$$

其中 D 由 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 与 $y=0$ 围成.

从而 $$W=\frac{\pi}{2}a^2(1-a)+2a^2=\left(\frac{\pi}{2}+2\right)a^2-\frac{\pi}{2}a^3.$$

六、（8 分）求向量 $\boldsymbol{A}=\dfrac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ **穿过上半球面** $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ **上侧的通量.**

解 设 $\Sigma:z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 上侧，$\Sigma_1:z=0\ \ (x^2+y^2=R^2)$ 下侧.

则通量

$$\Phi=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$=\iint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{R}=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$$

$$=\frac{1}{R}\iiint_{\Omega}3dxdydz=2\pi R^2.$$

七、（10 分）求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的收敛半径，收敛域及和函数.

解　由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\right|=1$ 得，收敛半径 $R=1$.

在 $x=-1$ 处，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛，在 $x=1$ 处，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，

因此收敛域为 $[-1,1)$.

设和函数为 $s(x)$，即 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\quad(-1\le x<1)$

于是　$xs(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$，所以 $[xs(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$，

从而　$xs(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)\quad(-1\le x<1)$

于是，当 $x\ne0$ 时，有 $s(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)$，而 $s(0)=1$，故

$$s(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1)\\ 1 & , x=0\end{cases}$$

八、（7 分）设曲线积分 $\int_L[f'(x)+2f(x)+e^x]ydx+f'(x)dy$ 与路径无关，$f(0)=0$，$f'(0)=1$. 计算曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}[f'(x)+2f(x)+e^x]ydx+f'(x)dy$ 的值.

解　因为曲线积分与路径无关，所以

$f'(x)+2f(x)+e^{x} = f''(x)$，即 $f''(x)-f'(x)-2f(x)=e^{x}$

解之得 $f(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-\dfrac{1}{2}e^{x}$.

由 $f(0)=0$， $f'(0)=1$，得 $C_1=-\dfrac{1}{6}, C_2=\dfrac{2}{3}$，故

$$f(x)=-\frac{1}{6}e^{-x}+\frac{2}{3}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{x}.$$

而 $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,1)}[f'(x)+2f(x)+e^{x}]ydx+f'(x)dy$

$$=\int_0^1 f'(1)dy = f'(1)=\frac{1}{6}e^{-1}+\frac{4}{3}e^{2}-\frac{1}{2}e.$$

九、（7 分）证明：若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 也收敛。若去掉前提中的 “正项”二字，则结论不成立，请举出反例。

证明 因正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，所以正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 也收敛，由级数收敛的必要条件知，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$.

从而，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，有 $0<a_n+b_n<1$. 故当 $n>N$ 时，有, $0<(a_n+b_n)^2<a_n+b_n$.

根据正项级数的比较判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 收敛.

若去掉题设中的 “正项”二字，取 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散.