参考解答及评分标准

一．填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. $\left(\frac{z}{y}(\frac{x}{y})^{z-1}, -\frac{z}{y}(\frac{x}{y})^{z}, (\frac{x}{y})^{z}\ln\frac{x}{y}\right)$

2. $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z=1$

3. 0

4. 6π

5. $e^{-2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)+\frac{1}{5}$

6. $-\frac{1}{4}$

二．解答下列各题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 解：$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial z}dz$，（2 分）

而 $dz=dx+\varphi(z)dy+y\varphi'(z)dz$，

由此解得 $dz=\frac{dx+\varphi(z)dy}{1-y\varphi'(y)}$（4 分）

代入前式得 $du=(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{1-y\varphi'(z)}\frac{\partial f}{\partial z})dx+\frac{\varphi(z)}{1-y\varphi'(z)}\frac{\partial f}{\partial z}dy$（6 分）

2. 解：该问题可转化为求 $z=x(1-x)$ 的无条件极值.

因为 $\frac{dz}{dx}=1-2x$，$\frac{d^2z}{dx^2}=-2$，令 $\frac{dz}{dx}=0$，得驻点 $x=\frac{1}{2}$.（3 分）

又因为 $\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=\frac{1}{2}}=-2<0$，

所以 $x=\frac{1}{2}$ 为极大值点，且极大值为 $z=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$.（6 分）

3. 解：$\overrightarrow{F}$ 所作的功 $W=\int_{AB}(x+y^2)dx+(2xy-8)dy$，因为 $\frac{\partial(x+y^2)}{\partial y}=2y=\frac{\partial(2xy-8)}{\partial x}$，

故 $\overrightarrow{F}$ 所作的功与路径无关.（3 分）

所求的功为 $W=\int_{(1,1)}^{(2,2)}(x+y^2)dx+(2xy-8)dy$

$$=\int_1^2(x+1^2)dx+\int_1^2(2\cdot 2y-8)dy=\frac{1}{2}$$ （6 分）

4. 解：以 $\Sigma_1: z=2$ 且 $x^2+y^2\le 4$ 之上侧封闭 Σ，记 Σ 与 Σ_1 所围闭域为 Ω，Σ_1 在 xoy 面上的投影域为 $D_{xy}: x^2+y^2\le 4$.

利用高斯公式得 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz+zdxdy=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(1+1)dV-\iint\limits_{\Sigma_1}zdxdy=2\iiint\limits_{\Omega}dV-\iint\limits_{D_{xy}}2dxdy$$ （3 分）

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\frac{1}{2}\rho^2}^2dz-8\pi=8\pi-8\pi=0$$ （6 分）

5. 解：由于 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$，$x\in(-\infty,+\infty)$

故有 $f(x)=\int_0^x\left(1-t^2+\dfrac{t^4}{2!}-\dfrac{t^6}{3!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{t^{2n}}{n!}+\cdots\right)dt$ （3 分）

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!},\ x\in(-\infty,+\infty)$$ （6 分）

6. 解：因为 $\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\cos(x+y^2)+3y\right]=-2y\sin(x+y^2)+3=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[2y\cos(x+y^2)+3x\right]$

故方程是全微分方程. （3 分）

方程左端可写成 $\cos(x+y^2)(dx+2ydy)+(3ydx+3xdy)$

$$=\cos(x+y^2)d(x+y^2)+d(3xy)$$

$$=d\sin(x+y^2)+d(3xy)$$

$$=d\left[\sin(x+y^2)+3xy\right]$$

故方程的通解为 $\sin(x+y^2)+3xy=C$，其中 C 为任意常数. （6 分）

注：本题用线积分或不定积分法求出通解者，可相应给分.

三．解：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{du}{dr}\frac{x}{r}$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{d^2u}{dr^2}\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{x}{r}+\frac{du}{dr}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{r})$$

$$=\frac{d^2u}{dr^2}\frac{x^2}{r^2}+\frac{du}{dr}\frac{r-\frac{x^2}{r}}{r^2}$$

$$=\frac{d^2u}{dr^2}\frac{x^2}{r^2}+\frac{du}{dr}\frac{r^2-x^2}{r^3}$$

同理可得 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{d^2u}{dr^2}\frac{y^2}{r^2}+\frac{du}{dr}\frac{r^2-y^2}{r^3}$

于是，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{du}{dr}\cdot\frac{2r^2-r^2}{r^3}=\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}$

从而，拉普拉斯方程简化为常微分方程 $\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}=0$ （4 分）

令 $\frac{du}{dr}=V$，得 $\frac{dV}{dr}+\frac{1}{r}V=0$，即 $\frac{dV}{V}=-\frac{dr}{r}$，

两端积分得 $V=\frac{c_1}{r}$，即 $\frac{du}{dr}=\frac{c_1}{r}$，

从而 $u=\int\frac{c_1}{r}dr=c_1\ln r+c_2$，$c_1$，$c_2$ 为任意常数. （8 分）

四．解：所求物体的质量为 $M=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV$，其中 Ω 在球面坐标系中可用不等式

$0\le r\le 2a\cos\varphi$，$0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$，$0\le\theta\le 2\pi$ 来表示， （4 分）

所以 $M=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_o^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{28}{15}\pi a^5$$ （8 分）

五．解：因为 $y_3-y_2=1$，$y_2-y_1=e^x$ 是对应齐次方程的特解且线性无关，所以对应齐次线性方程的通解为 $Y=c_1+c_2e^x$，c_1，c_2 为任意常数.

而 $y*=x$ 是非齐次线性方程的一个特解，故所求通解为 $y=c_1+c_2e^x+x$. （6 分）

由 $y(0)=1$，$y'(0)=0$ 得 $\begin{cases}c_1+c_2=1\\c_2+1=0\end{cases}$，解得 $c_1=2$，$c_2=-1$.

所求特解为 $y=2-e^{x}+x$.

（8 分）

六．解：设 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$，

则 $s(x)=(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!})'$ （4 分）

$$=\left[x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}\right]'=(xe^{x^2})'=e^{x^2}(1+2x^2)$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}=s(1)=3e$ （8 分）

七．证明：因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 的前 n 项和为 $S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=a_n-a_0$，

所以 $a_n=S_n+a_0$， $n=1,2\cdots$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 收敛，故 S_n 有极限，于是 a_n 有界，即存在常数 $M>0$，

使 $|a_n|\le M$，故有 $|a_nb_n|\le Mb_n$， $n=1,2\cdots$ （4 分）

已知 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，故由正项级数比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛. （8 分）