西 安 电 子 科 技 大 学

考试时间 120 分钟

试　　题

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
分数								

1. 考试形式：闭卷；2. 本试卷共七大题，满分 100 分。

班级______________学号____________姓名______________任课教师_________

一．　填空题（每小题 **4** 分，共 **24** 分）

1. 设 $f(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$，则 $gradf=$______.

2. 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为______.

3. 设 $f(u)$ 为连续函数，D 是由 $y=1$，$x^2-y^2=1$ 及 $y=0$ 所围成的平面闭域，则二重积分 $\iint\limits_D xf(y^2)d\sigma=$______.

4. 设 L 是按顺时针方向绕行的椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，$f(x,y)$ 在圆域 $x^2+y^2\le 25$ 上具有二阶连续偏导数，则 $\oint\limits_L [y+f_x(x,y)]dx+f_y(x,y)dy=$______.

5. 微分方程 $y''+4y'+5y=1$ 的通解是______.

6. 设 $f(x)=x^2(0<x<1)$，而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$， $x\in(-\infty,+\infty)$，

   其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi xdx$， $n=1,2,\cdots$，则 $S\left(-\dfrac{1}{2}\right)=$______.

二．解答下列各题（每小题 **6** 分，共 **36** 分）

1. 设函数 $u=f(x,z)$，而 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z=x+y\varphi(z)$ 确定的隐函数，其中 f，φ 可微，且 $\varphi'(z)\neq\dfrac{1}{y}$，求 du.

2. 求函数 $z=xy$ 在满足条件 $x+y=1$ 下的极大值.

3. 验证力 $\overrightarrow{F}=(x+y^2,2xy-8)$ 所作的功与路径无关，并求质点从点 $A(1,1)$ 沿直线移到点 $B(2,2)$ 时 $\overrightarrow{F}$ 所作的功.

4. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz+zdxdy$，其中 Σ 是抛物面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于 $z=0$ 及 $z=2$ 之间部分的下侧.

5. 将函数 $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$ 展开为 x 的幂级数.

6. 验证方程 $\left[\cos(x+y^2)+3y\right]dx+\left[2y\cos(x+y^2)+3x\right]dy=0$ 是全微分方程，并求其通解.

三.（**8** 分）在拉普拉斯方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 中，假设函数 u 仅与 r 有关，即 $u=f(r)$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，验证对于这样的 u，方程可简化为常微分方程 $\dfrac{d^2u}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{du}{dr}=0$，并求出该常微分方程的通解.

四.（**8** 分）一物体占有的闭区域 Ω 由不等式 $x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2 (a>0)$ 和 $x^2+y^2\le z^2$ 所确定，它在任意一点处的密度的大小等于该点到坐标原点距离的平方，试求该物体的质量.

五．（**8** 分）已知 $y_1=x$，$y_2=x+e^x$，$y_3=1+x+e^x$ 为线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的解，求该方程的通解及满足 $y(0)=1$，$y'(0)=0$ 的特解.

六.（**8** 分）借助于幂级数求数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}$ 的和.

七.（**8** 分）设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 收敛，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 是收敛的正项级数，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.