第 5 章 AWGN 信道下的数字解调

主要内容

- 数字信号基带解调及符号判决
- 无记忆调制的误码特性
- 数字调制的性能比较
- CPM 信号的解调与检测

5.1 数字解调的分解描述

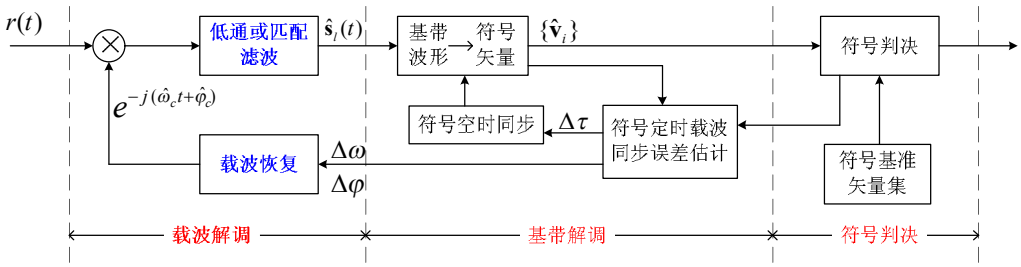


图 5-1-1 数字解调的基本结构框图

5.1.1 载波解调

设数字调制信号通过 AWGN 信道后带通形式的接收信号 $r(t)$ 与发送信号 $s(t)$ 的关系：

$$r(t)=s(t)+\eta(t)=\mathrm{Re}[\mathbf{s}_l(t).e^{j(\omega_c t+\phi_c)}]+\eta(t) \qquad \textbf{(5-1-1a)}$$

其中 ω_c 和 φ_c 分别为调制载波的角频率与初始相位；$\eta(t)$ 为信道引入的带限高斯白噪声；

(1) 载波解调

所谓载波解调，就是采用与接收信号 $\mathbf{r}(t)$ 中的载波**近似同频同相**的正弦波 $e^{j(\hat{\omega}_c t+\hat{\phi}_c)}$ 作为本地振荡，对接收信号进行正交下变频，以得到发射信号等效低通信号 $\mathbf{s}_l(t)$ 的估计 $\hat{\mathbf{s}}_l(t)$：

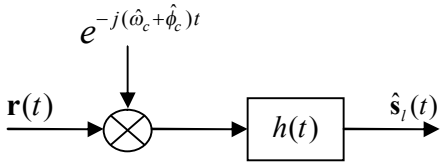
$$\hat{\mathbf{s}}_l(t)=[\mathbf{r}(t).e^{-j(\hat{\omega}_c t+\hat{\phi}_c)}]*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{r}(\tau).e^{-j(\hat{\omega}_c\tau+\hat{\phi}_c)}.h(\tau-t)\,d\tau \qquad \textbf{(5-1-2)}$$

- $h(t)$ 是一个低通滤波器的单位冲激响应，其带宽稍宽于 $\mathbf{s}_l(t)$ 的正频率频带，以确保滤波时不使有用信号失真，同时滤除带外的噪声；

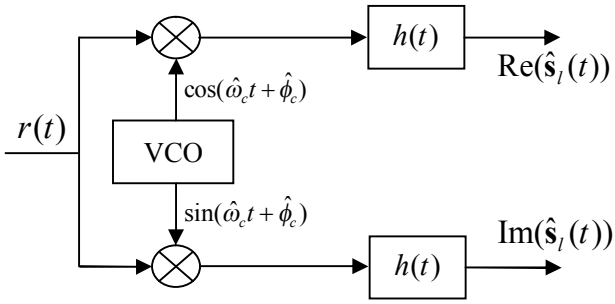
- $h(t)$ 也可采用匹配滤波器，以便使输出信号的信噪比提高。

- 本地振荡 $e^{-j(\hat{\omega}_c\tau+\hat{\phi}_c)}$ 中的角频率估值 $\hat{\omega}_c$ 与初始相位 $\hat{\phi}_c$，一般采用下章介绍的载波同步跟踪技术从接收信号中恢复得到。

- 当本地振荡的瞬时相位完全跟踪调制信号中隐含载波的瞬时相位时，二者发生同频同相的相干现象而能实现完全的载波解调； 其输出信号是发送信号等效低通信号(即复包络)的无偏估计 $\hat{\mathbf{s}}_l(t)$，它是排除了载波频偏与相偏的影响的正确估计。这就是所谓相干载波解调。



(a) 复数形式



(b)实数形式

图 5-1-2 正交下变频器

(2) 零中频信号

如果将正交下变频器中的本地振荡 $e^{j(\hat{\omega}_c t+\hat{\phi})}$ 改为 $e^{j(\omega_0 t+\phi_0)}$，其中的 ω_0 只是标称值等于 ω_c，而实际上存在频率偏差 $\omega_\Delta=\omega_c-\omega_0$（简称频偏）和相位偏差 $\varphi_\Delta=\phi_c-\phi_0$（简称相偏）；那么正交下变频器的输出就不是 $\mathbf{s}_l(t)$ 的正确估值，而被称为零中频信号，表示为 $\mathbf{r}_0(t)$，即

$$\mathbf{r}_0(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{r}(\tau).e^{-j(\omega_0\tau+\phi_0)}h(\tau-t)d\tau \tag{5-1-3}$$

这时正交下变频实现的就不是完全的载波解调。

若要实现完全的载波解调，还需要进一步纠正频偏与相偏，即

$$\hat{\mathbf{s}}_l(t)=\mathbf{r}_0(t)\ e^{-j(\omega_\Delta t+\varphi_\Delta)} \tag{5-1-4}$$

- 可以看出，在通过正交下变频估计基带复信号 $\hat{\mathbf{s}}_l(t)$ 时，载波的相位偏差 φ_Δ 以及因载波的频偏随时间推移而积累的相位移 $\omega_\Delta t$，都直接加入到基带复信号的相角值之中了，必须纠正这两种偏差才能得到 $\hat{\mathbf{s}}_l(t)$ 的正确相位角值。

- 零中频信号可以采用较低的采样率离散化和数字化，因而有利于降低计算和处理设备的复杂度；处理零中频信号可以达到与直接处理非零中频信号相似的效果，载波同步跟踪也可以基于零中频接收信号进行。

(3) 正交下变频等价于正交投影

对于实的接收信号 $r(t)$，正交下变频器在 t' 时刻输出的等效低通信号估值为：

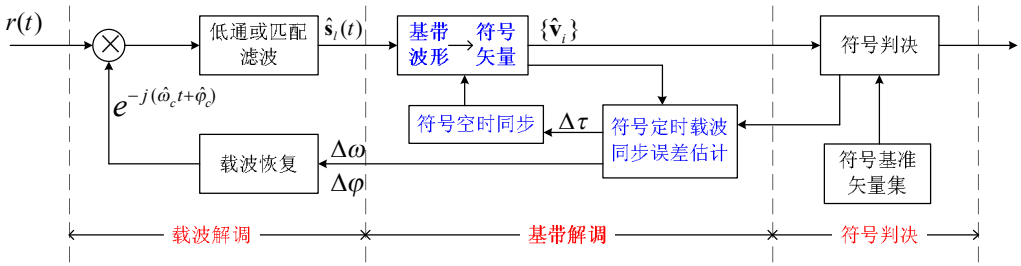
$$\hat{\mathbf{s}}_l(t') = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{r}(t).[f_1^{(t')}(t) + jf_2^{(t')}(t)]dt \qquad \textbf{(5-1-5)}$$

其中 $f_1^{(t')}(t) = \cos(\hat{\omega}_c t).h(t-t')$、$f_1^{(t')}(t) = \sin(\hat{\omega}_c t)h(t-t')$ 是相互正交的两个波形函数。因此，上述正交下变频可以看作是将接收信号 $\mathbf{r}(t)$ 向这个正交基函数族 $\{f_1^{(t')}(t)；f_2^{(t')}(t)\}$ 的投影。

5.1.2 基带解调

- 基带解调就是将载波解调所得等效低通信号的估计 $\hat{\mathbf{s}}_l(t)$ 映射为符号矢量序列的过程。

- 对于无记忆调制基带调制，因波形成形方法不同，有以下三种不同的基带解调方法。



(1) 符号间隔抽样法

如果发射端采用的是符合奈奎斯特第一准则的成形波 $g(t)$，那么基带信号波形 $\hat{\mathbf{s}}_l(t)$ 向符号矢量的映射方法是，在每个符号间隔中点处对它抽样，即

$$\hat{\mathbf{v}}_i = \hat{\mathbf{s}}_l(t)|_{t=iT} \qquad i = \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{(5-1-6a)}$$

就完成了基带解调。所得特征矢量 $\hat{\mathbf{v}}_i$ 其实只是一个复数值，看作是二维矢量，它是与第 i 个发送符号星座点相对应的。

(2) 符号间隔积分法

■ 如果发射端采用的是符合奈奎斯特第三准则的成形波 $g(t)$，那么基带信号波形 $\hat{\mathbf{s}}_l(t)$ 向符号矢量的映射方法是，在每个符号间隔分别对其实部和虚部进行积分：

$$\hat{\mathbf{v}}_i = \int_{iT-T/2}^{iT+T/2} \hat{\mathbf{s}}_l(t)dt = \int_{iT-T/2}^{iT+T/2} \hat{I}_l(t)dt + j\int_{iT-T/2}^{iT+T/2} \hat{Q}_l(t)dt \qquad \textbf{(5-1-7)}$$

即就完成了基带解调。

■ 如果成形波 $g(t)$ 是属于奈奎斯特第二准则的，那么先要分别对 $\hat{\mathbf{s}}_l(t)$ 的实部和虚部进行基于限幅电平 A 的矩形脉冲化处理，再进行符号间隔积分，即

$$\hat{\mathbf{v}}_i = \int_{iT-T/2}^{iT+T/2} \bar{I}_l(t)dt + j\int_{iT-T/2}^{iT+T/2} \bar{Q}_l(t)dt \qquad \text{(5-1-8a)}$$

其中

$$\bar{I}_l(t) = \begin{cases} sgn(\hat{I}_l(t))A & (|\hat{I}_l(t)| \geq A) \\ 0 & (|\hat{I}_l(t)| < A) \end{cases} \qquad \bar{Q}_l(t) = \begin{cases} sgn(\hat{Q}_l(t))A & (|\hat{Q}_l(t)| \geq A) \\ 0 & (|\hat{Q}_l(t)| < A) \end{cases} \qquad \text{(5-1-8b)}$$

(3) 相关解调法

● **基于单一成形波调制信号的相关解调**

如果发射端的调制方式是基于单个成形波 $g(t)$ 的，并且 $g(t)$ 是平移正交的，即 $\{g(t-iT)\,;\, i=\ldots,-1,0,1,2,\ldots\}$ 是一个正交基函数族，例如 $g(t)$ 为平方根升余弦谱特性的；那么这种实现基带解调的映射就是内积空间的投影(即相关)运算，第 i 个符号矢量的估计为：

$$\hat{\mathbf{v}}_i = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{s}}_l(t).g(t-iT)dt \qquad i=\ldots,-1,0,1,2,\ldots \qquad \textbf{(5-1-9)}$$

◆ 这种相关运算可以在基于(5-1-2）式的正交下变频器中直接实现；将其中的低通滤波器 $h(t)$ 取代为匹配滤波器 $g(t)$，然后将其输出信号 $\hat{\mathbf{s}}_l(t)$ 在每个符号间隔中点抽一个样点，即实现了基带解调。

● **M 元正交波形调制信号的相关解调**

①非相干解调

将 $\mathbf{r}_0(t)$ 分别与 $\{f_m(t)\}$ 中各个波形进行相关(即内积)运算得到 M 个相关量；即

$$\hat{\mathbf{v}}(m) = \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{r}_0(t+iT).f_m(t)dt \qquad m=0,1,2,\ldots,M-1 \qquad \textbf{(5-1-10a)}$$

这些相关量都是复数，可以取其幅度作为符号判决量，即

$$\hat{R}_0 = |\sqrt{E_s} + \boldsymbol{\eta}_0|;\quad \hat{R}_m = |\boldsymbol{\eta}_m|;\quad m = 1,2,\ldots,M-1 \tag{5-1-10c}$$

其中$\{\boldsymbol{\eta}_m\}$是一个实部虚部的均值都为 0，实部虚部的方差都为 $N_0/2$ 的复高斯随机变量。

判决时比较这 M 个相关幅度值的大小，如果其中 $\hat{R}_{\hat{m}}$ 的值最大就判为第 $\hat{m}$ 种符号，即

$$\hat{m} = \underset{m=0,1,2,\ldots M-1}{Arg\max} \quad |\hat{\mathbf{v}}(m)| \tag{5-1-10d}$$

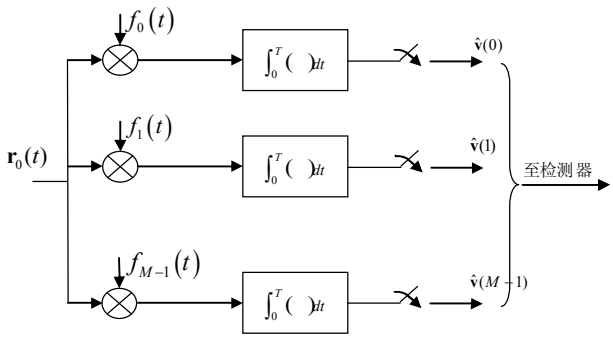


图 5-1-3 M 元正交调制信号的相关解调

②相干解调

当然，M 元正交波形调制也是可以利用相位信息来改善误码特性的，但这时必须采用相干载波解调所得等效低通信号 $\hat{\mathbf{s}}_l(t)$ 代替零中频信号 $\mathbf{r}_0(t)$ 进行基带解调，即

$$\hat{\mathbf{v}}(m) = \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{s}_l(t+iT).f_m(t)dt \qquad m = 0,1,2,\ldots,M-1 \tag{5-1-11a}$$

并取相关量的实部而不是幅度作为符号判决量，即

$$\hat{x}_m = \mathrm{Re}[\hat{\mathbf{v}}(m)] \qquad m = 0,1,2,\ldots,M-1 \tag{5-1-11b}$$

判决时只要这 M 个相关量实部值的大小，如果其中 $\hat{x}_{\hat{m}}$ 的值最大，就将它判为第 $\hat{m}$ 种符号；其数学表达就是

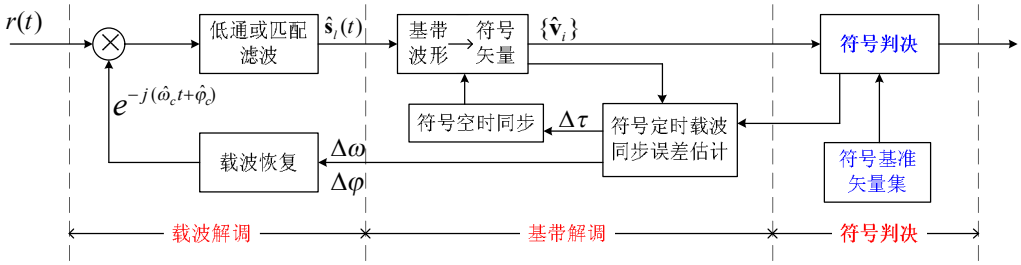
$$\hat{m} = \underset{m=0,1,2,\ldots M-1}{Arg\max} \quad \mathrm{Re}[\hat{\mathbf{v}}(m)] \tag{5-1-11d}$$

本例中 $\hat{m}$ =0。这就是 M 元正交波形调制信号的相干解调判决。

- 这里取相关量的实部作为判决量，是因为发送端进行 M 元正交波形基带调制时所产生的预包络信号 $\mathbf{s}_l(t)$ 只有实部，没有虚部；接收端基于相干载波解调所得 $\hat{\mathbf{s}}_l(t)$ 中的有用信号部分也应该只有实部，因此取相关量的实部不降低有用信号功率却甩掉了虚部噪声，使其信噪比提高一倍，误码特性可改善 3dB；这就是相干解调利用相位信

息带来的效益。

5.1.3 符号判决



- 符号判决原理上属于特征空间中模式识别的范畴；不同调制方式所采用的特征空间和模式分类方法不同。
- 符号判决的关键是如何定义两个矢量(例如 $\hat{\mathbf{v}}_i$ 与 $\mathbf{v}^{(m)}$)的差异大小或相似度，也就是采用什么准则进行判决。
- 当输入的符号特征矢量（即被检测量）的概率密度函数已知时，采用最大后验概率（MAP）准则进行符号判决，其错误概率是最低的，因而称为最佳检测；
- 在发送符号等概率分布时 MAP 判决准则可以简化为最大似然（ML）准则。
- 当符号判决时需要利用符号矢量的相位信息时，应该采用相干解调所得符号矢量，否则采用非相干解调所得符号矢量；前者的误码特性显著优于后者。
- 此外，对于有记忆调制，因前后符号相关联而不能各个符号独立判决，最佳检测方法也不相同。

(1) 最大后验概率(MAP)检测

先考虑基于单一成形波无记忆调制信号的相干解调 MAP 检测。

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\eta} = \mathbf{v}^{(m)} + \boldsymbol{\eta} \qquad m = 0,1,2,\ldots,M-1 \tag{5-1-12}$$

$\tilde{\mathbf{v}}$ 的条件 PDF 为：

$$p(\tilde{\mathbf{v}} \mid \mathbf{v}^{(m)}) = \frac{1}{\pi N_0}\exp[-\frac{(\tilde{x}-x^{(m)})^2+(\tilde{y}-y^{(m)})^2}{N_0}] \qquad m = 0,1,2,\ldots,M-1 \tag{5-1-13a}$$

或表示为

$$p(\tilde{\mathbf{v}} \mid \mathbf{v}^{(m)}) = \frac{1}{\pi N_0}\exp[-\frac{|\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v}^{(m)}|^2}{N_0}] \qquad m = 0,1,2,\ldots,M-1 \tag{5-1-13b}$$

根据贝叶斯公式计算在 $\tilde{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}}$ 已知的条件下各种符号的后验概率：

$$p(\mathbf{v}^{(m)} \mid \tilde{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}}) = \frac{p(\tilde{\mathbf{v}} \mid \mathbf{v}^{(m)}).P(\mathbf{v}^{(m)})}{p(\tilde{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}})} \qquad m = 0,1,2,\ldots,M-1 \tag{5-1-14}$$

$$PM(\mathbf{v}^{(m)} \mid \hat{\mathbf{v}}) = p(\hat{\mathbf{v}} \mid \mathbf{v}^{(m)}).P(\mathbf{v}^{(m)}) \qquad m = 0,1,2,\ldots,M-1 \tag{5-1-15a}$$

MAP 判决可表示为

$$\hat{m} = \underset{m=0,1,2,\ldots M-1}{Arg\max} \quad [PM(\mathbf{v}^{(m)} \mid \hat{\mathbf{v}})] \tag{5-1-15b}$$

其意思是：当 $PM(\mathbf{v}^{(m)} \mid \hat{\mathbf{v}})|_{m=\hat{m}} > PM(\mathbf{v}^{(\hat{m})} \mid \hat{\mathbf{v}})|_{m\neq\hat{m}(\forall m)}$ 时 $\hat{\mathbf{v}}$ 判为第 $\hat{m}$ 种符号。

【例】以 BPSK 调制信号为例，设发送信号符号 $\mathbf{v}^{(1)} = -\mathbf{v}^{(0)} = \sqrt{E_b}$，若先验概率 $P(\mathbf{v}^{(0)}) = p$， $P(\mathbf{v}^{(1)}) = 1-p$，则接收信号的某个符号的特征矢量是 $\tilde{\mathbf{v}} = \sqrt{E_b} + \boldsymbol{\eta}$ 或 $\tilde{\mathbf{v}} = -\sqrt{E_b} + \boldsymbol{\eta}$，其中 $\boldsymbol{\eta}$ 是方差为 $N_0/2$ 的高斯随机变量。因此条件 PDF 为：

$$p(\tilde{\mathbf{v}} \mid \mathbf{v}^{(0)}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left[-\frac{|\tilde{\mathbf{v}} + \sqrt{E_b}|^2}{N_0}\right] \tag{5-1-16a}$$

$$p(\tilde{\mathbf{v}} \mid \mathbf{v}^{(1)}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left[-\frac{|\tilde{\mathbf{v}} - \sqrt{E_b}|^2}{N_0}\right] \tag{5-1-16b}$$

得到最佳 MAP 检测度量为：

$$PM(\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{v}^{(0)}) = p.p(\tilde{\mathbf{v}} \mid \mathbf{v}^{(0)}) = \frac{p}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left[-\frac{|\tilde{\mathbf{v}} + \sqrt{E_b}|^2}{N_0}\right] \tag{5-1-17a}$$

$$PM(\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{v}^{(1)}) = (1-p).p(\tilde{\mathbf{v}} \mid \mathbf{v}^{(1)}) = \frac{1-p}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left[-\frac{|\tilde{\mathbf{v}} - \sqrt{E_b}|^2}{N_0}\right] \tag{5-1-17b}$$

于是，对于接收符号矢量 $\tilde{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}}$，MAP 判决规则为：

$$\begin{aligned} &\text{当 } PM(\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{v}^{(0)}) > PM(\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{v}^{(1)}) \text{ 时判为 } \mathbf{v}^{(0)} \\ &\text{当 } PM(\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{v}^{(0)}) \le PM(\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{v}^{(1)}) \text{ 时判为 } \mathbf{v}^{(1)} \end{aligned} \tag{5-1-18c}$$

(2) 基于相干解调的最大似然(ML)检测-

- 基于单一成形波无记忆调制信号的相干解调 ML 检测

如果令 $\tilde{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}}$，并将它看作已知量，将 $\mathbf{v}^{(m)}$ 看作是变量，则(5-1-13)式所示的条件 PDF $p(\tilde{\mathbf{v}} \mid \mathbf{v}^{(m)})$ 就变成似然函数了，再取对数并忽略常数因子，即得到对数似然函数：

$$\Lambda_L(\mathbf{v}^{(m)}) = -|\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^{(m)}|^2 / N_0 \tag{5-1-19}$$

- ML 检测就是从 M 种符号的基准矢量 $\{\mathbf{v}^{(m)},\ m=0,1,2,\ldots,M-1\}$ 中寻找一个能使对数似然值 $\Lambda_L(\mathbf{v}^{(m)})$ 最大的符号 $\mathbf{v}^{(\hat{m})}$。

- 对数似然值 $\Lambda_L(\mathbf{v}^{(m)})$ 最大的准则，等价于欧几里德距离 $D(\hat{\mathbf{v}},\mathbf{v}^{(m)})$ 最小的准则，即

$$\hat{m}=\underset{m=0,1,2,\ldots,M-1}{Arg\min}\ D(\hat{\mathbf{v}},\mathbf{v}^{(m)}) \tag{5-1-20a}$$

其中欧氏距离定义为

$$D(\hat{\mathbf{v}},\mathbf{v}^{(m)})=|\hat{\mathbf{v}}-\mathbf{v}^{(m)}| \tag{5-1-20b}$$

- **M 元正交波形调制信号的相干解调 ML 检测**

$\tilde{\mathbf{V}}$ 的条件 PDF 应为 M 维高斯随机矢量的 PDF,即

$$\begin{aligned}p(\tilde{\mathbf{V}}\,|\,\mathbf{V})&=\frac{1}{(\pi N_0)^{M/2}}\exp[-\frac{[\tilde{\mathbf{V}}-\mathbf{V}]^H[\tilde{\mathbf{V}}-\mathbf{V}]}{N_0}]\\&=\frac{1}{(\pi N_0)^{M/2}}\exp[-\sum_{m=0}^{M-1}\frac{|\tilde{x}_m-x_m|^2}{N_0}]\end{aligned} \tag{5-1-22a}$$

取自然对数就得到对数似然函数，忽略其中的常数因子，有

$$\Lambda_L(\mathbf{V})=-[\hat{\mathbf{V}}-\mathbf{V}]^T[\hat{\mathbf{V}}-\mathbf{V}]=-\sum_{m=0}^{M-1}[\hat{x}_m-x_m]^2 \tag{5-1-22b}$$

ML 检测就是从 M 种矢量中选择一种矢量 $\mathbf{V}=[x_0x_1\ldots x_{M-1}]^T$，使 $\Lambda_L(\mathbf{V})$ 最大。注意到这里 $\hat{x}_m=\mathrm{Re}[\hat{\mathbf{v}}(m)]$ 就是第 m 中符号波形与接收信号波形的互相关值的实部，而上式可展开为

$$-\sum_{m=0}^{M-1}[\hat{x}_m-x_m]^2=2\sum_{m=0}^{M-1}\hat{x}_m x_m-\sum_{m=0}^{M-1}(\hat{x}_m^2+x_m^2)$$

其中后一项与 $[x_0x_1\ldots x_{M-1}]^T$ 的选择无关；从 M 种符号矢量 $\mathbf{V}=[x_0x_1\ldots x_{M-1}]^T$ 选择一个使前一项最大，等价于从 $\{\hat{x}_0,\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{M-1}\}$ 中挑选最大者；如果 $\hat{x}_m$ 最大，就判为第 $\hat{m}$ 种符号。

(3) 基于非相干解调的判决准则

前面介绍的 M 元正交波形调制的解调常常采用非相干解调，输出的判决量是互相关量的幅度值，即采用如(5-1-10)式所描述的最大相关幅度准则进行符号判决。这种不利用相位信息的判决方法，其误码特性比基于相干解调判决方法的要差 3dB；

但是判决量不用相位信息有时可带来重要好处，例如解调时不需锁相环，这就能解决快速跳频信号的解调判决无法进行锁相的困难。

5.1.4 有记忆线性调制信号的解调和最佳检测

- 与无记忆调制信号的解调检测相比，其不同之处主要是一般需要进行多个符号联合判决，而不是逐个符号独立判决，因为符号序列前后存在关联性。

(1) M 进制有记忆调制的最大似然序列检测

这里以编码调制为例介绍有记忆调制的 ML 序列检测。

- **对于记忆长度为 L 的 M 进制调制信号，其记忆关联性表现为状态矢量的函数关系 $\boldsymbol{\theta}_i = f(\boldsymbol{\theta}_{i-1}, \boldsymbol{\theta}_{i-2}, \ldots, \boldsymbol{\theta}_{i-L})$ 所描述的状态转移规则。**

- **于是根据状态转移约束图和状态转移函数关系,可以给出一个状态转移网格图。**

图 5-1-4 是 $N = M = 4$ 的一种无状态转移约束的网格图，例如 M 进制差分编码调制可用这种网格图表示。

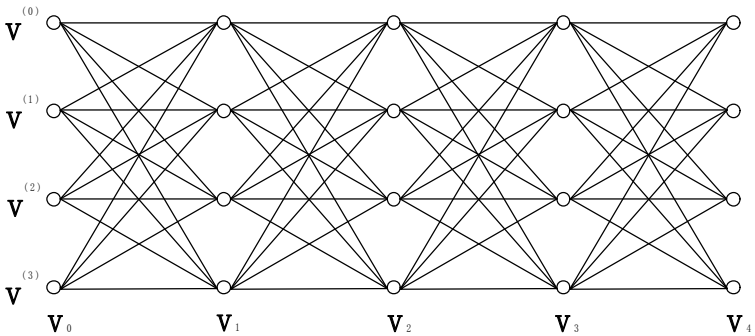


图 5-1-4 ML 序列检测的状态转移网格图

$L+1$ 个符号的联合条件 PDF 为：

$$p(\tilde{\mathbf{v}}_{i-L}, \tilde{\mathbf{v}}_{i-L+1}, \ldots, \tilde{\mathbf{v}}_{i-1}, \tilde{\mathbf{v}}_i \mid \mathbf{v}_{i-L} = \boldsymbol{\theta}^{(n_{i-L})}, \mathbf{v}_{i-L+1} = \boldsymbol{\theta}^{(n_{i-L+1})}, \ldots, \mathbf{v}_i = \boldsymbol{\theta}^{(n_i)})$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{L+1} \exp\left[-\sum_{k=i}^{i-L} \frac{|\tilde{\mathbf{v}}_k - \boldsymbol{\theta}^{(n_k)}|^2}{2\sigma^2}\right] \tag{5-1-23}$$

如果将已经接收到的矢量序列 $\{\hat{\mathbf{v}}_0, \hat{\mathbf{v}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{v}}_i, \ldots\}$ 看作已知量代入上式，而把 Θ $\{\boldsymbol{\theta}^{(n_k)}, k = i-L, i-l+1, \ldots, i\}$ 看作未知变量，那么上述 PDF 就变成似然函数 $\Lambda(\Theta)$ 了；再取对数便得到对数似然函数，再忽略常数因子，去掉负号，就得到欧氏距离的平方，即

$$d(\Theta)=\sum_{k=i}^{i-L}|\tilde{\mathbf{v}}_k-\boldsymbol{\theta}^{(n_k)}|^2 \tag{5-1-24}$$

注意到可能的状态共有 M^{L+1} 种，每种用上式计算一个欧氏距离，比较这些距离的大小；

- 如果体现记忆性的编码规则是分组码的形式或块传输方式，各个 $L+1$ 长的码组是相互独立的，那么按照(5-2-24)式计算欧氏距离，则可根据欧氏距离最小准则同时对这 $L+1$ 个符号进行判决；
- 这时类似于无记忆调制，因为符号组之间不存在记忆关联性，只是组内相互关联，而将每组符号矢量看作一个高维的大符号矢量。
- 上述有记忆调制的 ML 检测，都涉及 M^{L+1} 数量级次数的欧氏距离计算，当 L 较大时，例如 $L\geq 3$，其计算量就增大到实际上无法进行计算。
- 解决 L 较大时全路径搜索计算复杂度太高的有效办法是采用 Viterbi 算法。该算法在每个节点处计算前面的各种可能到达路径的累积欧氏距离时，只保留累积距离最小的一条，而逐步裁剪去掉累积距离较大的路径；在逐步向前推进中采用延迟回溯的办法对前面的符号逐个进行判决，可使计算复杂度大幅度降低；
- 经验证明只要延迟回溯的长度大于 $3L$ ~$5L$ 时，因路径裁剪引起误判的概率便小到可以忽略不计。关于 Viterbi 算法后面还有介绍。

(2)最大后验概率(MAP)序列检测

对于由接收信号估计出的符号矢量序列$\{\hat{\mathbf{v}}_i,\hat{\mathbf{v}}_{i-1},...,\hat{\mathbf{v}}_{i-L}\}$，将它看作是随机矢量序列$\{\tilde{\mathbf{v}}_i,\tilde{\mathbf{v}}_{i-1},...,\tilde{\mathbf{v}}_{i-L}\}$的一个现实，要判断 $\hat{\mathbf{v}}_i$ 是属于哪种符号，即估计 $\hat{\mathbf{v}}_i=\mathbf{v}_i+\boldsymbol{\eta}_i=\mathbf{v}^{(c_i)}+\boldsymbol{\eta}_i$ 中的 c_i，必须从联合概率密度函数 $p(\tilde{\mathbf{v}}_i,\tilde{\mathbf{v}}_{i-1},...,\tilde{\mathbf{v}}_{i-L})$ 出发推导出后验概率公式；

根据贝叶斯公式得到的后验概率为：

$$p(\mathbf{v}_i=\mathbf{v}^{(\hat{c}_i)}\,|\,\tilde{\mathbf{v}}_i,\tilde{\mathbf{v}}_{i-1},...,\tilde{\mathbf{v}}_{i-L})=\frac{p(\tilde{\mathbf{v}}_i,\tilde{\mathbf{v}}_{i-1},...,\tilde{\mathbf{v}}_{i-L}\,|\,\mathbf{v}_i=\mathbf{v}^{(\hat{c}_i)}).p(\mathbf{v}_i=\mathbf{v}^{(\hat{c}_i)})}{p(\tilde{\mathbf{v}}_i,\tilde{\mathbf{v}}_{i-1},...,\tilde{\mathbf{v}}_{i-L})} \tag{5-1-25}$$

对于一个由接收信号经解调得到的符号矢量序列$\{\hat{\mathbf{v}}_i,\hat{\mathbf{v}}_{i-1},...,\hat{\mathbf{v}}_{i-L}\}$，对于 $\hat{\mathbf{v}}_i$ 进行符号判决的 MAP 准则就是

$$\mathbf{v}^{(\hat{c}_i)}=\underset{\mathbf{v}^{(c_i)}\in \mathrm{S}}{\arg\max}\ p(\mathbf{v}_i=\mathbf{v}^{(c_i)}\,|\,\tilde{\mathbf{v}}_i=\hat{\mathbf{v}}_i,\tilde{\mathbf{v}}_{i-1}=\hat{\mathbf{v}}_{i-1},...,\tilde{\mathbf{v}}_{i-L}=\hat{\mathbf{v}}_{i-L}) \tag{5-1-26}$$

5.2 各种无记忆调制的误码特性

5.2.1 计算相干解调器误码特性的一种通用算法

为导出一种计算相干解调器误码特性的通用算法，先讨论 BPSK 调制的误码率特性。

(1) BPSK 信号的解调 ML 判决及其误码特性

假定两种符号等概出现，采用相干解调器输出的符号矢量分别为：$\tilde{\mathbf{v}} = \sqrt{E_b} + \eta$ 或 $-\sqrt{E_b} + \eta$；则随机变量 $\tilde{\mathbf{v}}$ 的条件 PDF 为：

$$p(\tilde{\mathbf{v}} \mid \mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp[-\frac{|\tilde{\mathbf{v}} + \sqrt{E_b}|^2}{N_0}] \qquad \textbf{(5-2-1a)}$$

$$p(\tilde{\mathbf{v}} \mid \mathbf{v} = \mathbf{v}^{(1)}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp[-\frac{|\tilde{\mathbf{v}} - \sqrt{E_b}|^2}{N_0}] \qquad \textbf{(5-2-1b)}$$

该 PDF 的形状如图 5-2-2 所示。

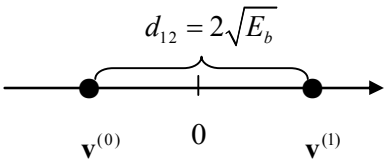


图 5-2-1 BPSK 的符号星座点

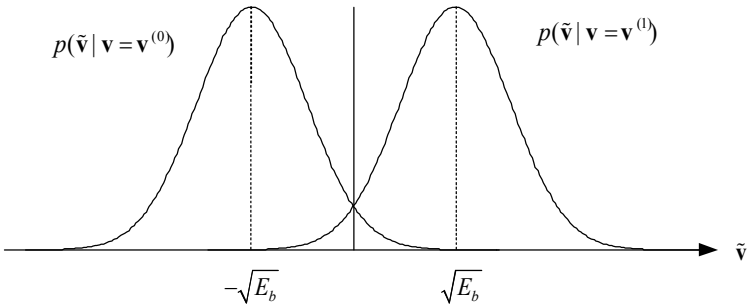


图 5-2-2　BPSK 接收符号矢量的 PDF

- 对于一个接收符号矢量 $\hat{\mathbf{v}}$，令 $\tilde{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}}$ 代入上式，可知基于 ML 准则的符号判决规则可简化为：当 $\hat{\mathbf{v}} > 0$ 时，判为 $\mathbf{v}^{(1)}$；当 $\hat{\mathbf{v}} < 0$ 时，判为 $\mathbf{v}^{(0)}$。
- 这个判决准则，本质上也是二维空间中的欧氏距离最小准则，只不过是因为星座点都在实轴上而只取 $\hat{\mathbf{v}}$ 实部的值。在发送 $\mathbf{v}^{(1)}$ 时，错误概率就是 $\tilde{\mathbf{v}} < 0$ 的概率，即：

$$P(e \mid \mathbf{v}^{(1)}) = \int_{-\infty}^{0} p(\tilde{\mathbf{v}} \mid \mathbf{v}^{(1)}) d\tilde{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^{0} \exp[-\frac{(\tilde{\mathbf{v}} - \sqrt{E_b})^2}{N_0}] d\tilde{\mathbf{v}} \qquad \text{(5-2-2a)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2E_b/N_0}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \quad = Q(\sqrt{2E_b/N_0})$$

其中 $Q(x)$ 为标准高斯的截尾误差函数。同理在发送 $\mathbf{v}^{(0)}$ 时的错误概率就是 $\hat{\mathbf{v}} > 0$ 的概率为：

$$P(e \mid \mathbf{v}^{(0)}) \quad = Q(\sqrt{2E_b/N_0}) \tag{5-2-2b}$$

因为 $\mathbf{v}^{(1)}$ 和 $\mathbf{v}^{(0)}$ 是等概发送的，因此平均错误概率为：

$$P_b = P(e \mid \mathbf{v}^{(1)})/2 + P(e \mid \mathbf{v}^{(0)})/2 \quad = Q(\sqrt{2E_b/N_0}) \tag{5-2-3a}$$

错误概率只与解调器输出的比特信噪比 E_b/N_0 有关，而与信号和噪声的其他细节特征无关。上式错误概率也可用信号的欧氏距离($d_{0,1} = 2\sqrt{E_b}$)表示为：

$$P_b = Q\left(\sqrt{d_{0,1}^2/(2N_0)}\right) \tag{5-2-3b}$$

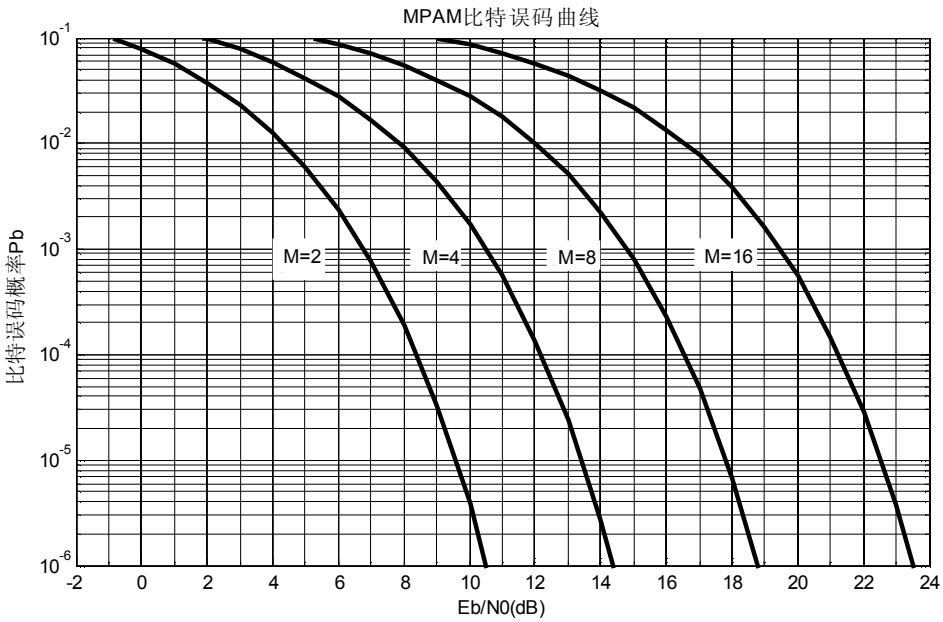


图 5-2-3　MPAM 调制的比特误码特性

- **BPSK 可看作是 M=2 的 MPAM，其误码特性如图 5-2-3 中 M =2 的曲线所示。**
- **BPSK 相干解调中存在 $0/\pi$ 相位模糊的问题，即输出的特征矢量 $\hat{\mathbf{v}}$ 中是否因载波相偏引入了 π 的相位移而使 $\hat{\mathbf{v}}$ 出现正负值反转的现象，而反转前后的值都是 BPSK 符号的有效取值，因而不能对是否有反转做出识别。**

◆ 相位模糊的问题一般可采用差分编码的办法解决，发送端先将信息比特流 $\{a_k\}$ 进行差分编码，得到 $b_k = a_k \oplus b_{k-1}$，再进行调制和发送；接收端采用相干解调器得到 $\{\hat{b}_k\}$，然后进行差分译码得到 $\hat{a}_k = \hat{a}_{k-1} \oplus \hat{b}_k$。

◆ 但是，差分译码因存在误差传播的现象而使误码特性中 E_b / N_0 产生 0.6dB 的损失。此外还可采用延迟差分相干解调的办法解决相位模糊问题，将在 5.2.3 小节中介绍。

(2) 相干解调最佳检测误码率特性的通用计算方法

■ 注意到(5-2-3b)式中的欧氏距离 $d_{0,1}$ 是实轴上两点之间的距离，实际上即使是复数平面上任意两点之间的欧氏距离，也仍然可以采用与此式类似的公式来计算误码概率。这是因为复平面上任意两点连线可以旋转到与实轴重合，以至这两个二维高斯随机变量都变为一维高斯随机变量了。

◆ 设某种 M 进制调制的星座点集为 S：$\{\mathbf{v}^{(m)} \quad m = 0,1,2,\ldots,M-1\}$，其中 M 种符号的基准矢量 $\mathbf{v}^{(m)}$ 都是一个复数，$K = L\log_2 M$，即每个符号含 K 比特，E_s 和 E_b 分别表示平均每符号和平均每比特的能量，并有 $E_s = KE_b$。

设发送第 m 种符号时，有信道噪声接收时所得符号矢量为 $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^{(m)} + \boldsymbol{\eta}$。设每个基准矢量 $\mathbf{v}^{(m)}$ 的能量为 $E^{(m)} = \alpha_m E_s$，$\mathbf{v}^{(m_1)}$ 和 $\mathbf{v}^{(m_2)}$ 之间的欧氏距离为 $d_{m_1,m_2} = \sqrt{\beta_{m_1,m_2} E_s}$。那么据(5-2-3)式可以推知，当发送第 m_1 种符号时因存在信道噪声而被误判为第 m_2 种符号，其错误概率是

$$P_{m_2/m_1} = Q\left(\sqrt{d_{m_1,m_2}^2/(2N_0)}\right) = Q\left(\sqrt{\beta_{m_1,m_2} E_s / N_0}\right) \qquad m_1, m_2 = 0,1,2,\ldots,M-1 \qquad \textbf{(5-2-4)}$$

➢ 对于 M 进制调制信号的一个接收符号矢量 $\tilde{\mathbf{v}}$ 进行符号判决，先计算 $\tilde{\mathbf{v}}$ 与 S 中 M 个基准矢量的欧氏距离，然后进行 $M-1$ 次距离值大小的比较判决，即 $M-1$ 次二分类判决，如果这 $M-1$ 次判决实验是相互独立的，那么发送第 m_1 种符号时而能得到正确判决的概率应为

$$P_{C(m_1)} = \prod_{\substack{m_2=0 \\ m_2 \neq m_1}}^{M-1} (1 - P_{m_2/m_1}) \qquad m_1 = 0,1,2,\ldots,M-1 \qquad \textbf{(5-2-5)}$$

$P_{C(m_1)}$ 表示所进行的 $M-1$ 次欧氏距离比较判别都正确的概率，于是发送第 m_1 种符号而被误判的概率为 $P_{m_1}=1-P_{C(m_1)}$。

- 设第 m_1 种与第 m_2 种符号之间的汉明距离为 D_{m_1,m_2}，即第 m_1 种符号误判为第 m_2 种符号时将产生 D_{m_1,m_2} 比特错误；于是由(5-2-5)式可进一步推得总的平均比特错误概率公式：

$$P_b=\frac{1}{M}\sum_{m_1=0}^{M-1}\left[1-\prod_{\substack{m_2=0\\m_2\neq m_1}}^{M-1}\left(1-\frac{D_{m_1,m_2}}{K}P_{m_2/m_1}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{M}\sum_{m_1=0}^{M-1}\left\{1-\prod_{\substack{m_2=0\\m_2\neq m_1}}^{M-1}\left[1-\frac{D_{m_1,m_2}}{K}Q\left(\sqrt{\beta_{m_1,m_2}KE_b/N_0}\right)\right]\right\} \tag{5-2-6}$$

(5-2-5)式是否精确地成立，关键在于这 M-1 次二分类判决的事件是否是相互独立的；如果确实相互独立，那么该式完全正确；如果只是近似地相互独立，该式就只是一个近似表达式。

5.2.2 M 元 PAM 调制及其误码特性

设 M 元 PAM 调制符号的星座点为实轴上等距离对称分布的 M 个点，如图 5-2-4 所示，相邻两星座点之间的距离都为 d，即

$$\mathbf{v}^{(m)}=(2m+1-M)d/2 \qquad m=0,1,2,\ldots,M-1 \tag{5-2-7a}$$

即 $\{\mathbf{v}^{(m)}\}=\{(1-M)d/2,(3-M)d/2,\ldots,-3d/2,-d/2,d/2,3d/2,\ldots,(M-1)d/2\}$。

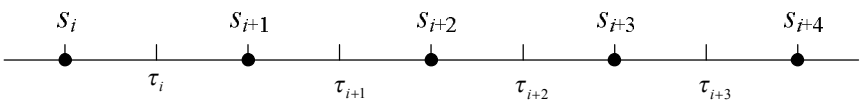


图 5-2-4 阈值位于相邻幅度电平的中间

平均每个符号的能量 E_s 应为

$$E_s=\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}|\mathbf{v}^{(m)}|^2=\frac{2d^2}{2^2M}[1^2+3^2+\ldots+(M-3)^2+(M-1)^2]$$
$$=(M^2-1)d^2/12 \tag{5-2-7b}$$

于是欧氏距离与符号能量、比特能量的关系式为

$$d^2 = 12E_s/(M^2-1) = 12KE_b/(M^2-1) \tag{5-2-7c}$$

◆ **当第 m_1 种符号的星座点不是两端的星座点时**，错误概率为：

$$P_{ei} = \mathrm{P}\left[|n| > \frac{1}{2}d_{\min}\right] = 2Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) \tag{5-2-8}$$

◆ **对于星座点处于两端的第 0 和第 $M-1$ 种符号，只有一个方向的错判，其判决错误概率应为**

$$P_{eo} = \frac{1}{2}P_{ei} = Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

◆ **于是总的平均符号错误概率应为**

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\mathrm{P}\,[\text{error}\,|m\text{ sent}] \\ &= \frac{1}{M}\left[2(M-2)Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) + 2Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right)\right] \\ &= \frac{2(M-1)}{M}Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) \end{aligned} \tag{5-2-9a}$$

将(5-2-7b)式代入上式，得

$$P_M \approx \frac{2M-2}{M}Q\left(\sqrt{\frac{6KE_b}{(M^2-1)N_0}}\right) \tag{5-2-9b}$$

■ 由于 $d^2 = 12E_s/(M^2-1)$，因此 M 增大 1 倍要求平均符号能量增大近似 4 倍，即 6dB，才能达到相同的误码率。

■ 为了将符号错误概率换算成比特错误概率，我们将符号判决错误的样本分为两类：**一类是错判为相邻符号的，这类错误每个符号错误只引起 1/K 比特错误**，因为采用 Gray 编码很容易实现相邻符号之间的汉明距离等于 1；

■ **另一类符号错误是被误判为更远的符号，这类错误每个符号误判可能引起 1~K 比特的错误**；因它们的欧氏距离都大于等于 $2d$，因此其符号概率值至少比 $P_{(m_1+1)/m_1}$ 或 $P_{(m_1-1)/m_1}$ 小一个数量级；例如 $Q(1.28)$ =0.1003，$Q(2.32)$ =0.01017，$Q(3.09)$=0.001，$Q(3.71)$=0.0001，$Q(4.26)$=0.00001。

- 因此只需要考虑距离为 $2d$ 的符号就可足够精确地给出 P_M 和 P_b 之间的关系式；可以近似认为在符号被误判的样本中有 90%的样本是误判为相邻符号，每个符号误判只引起 $1/K$ 比特的错误；而 10%的样本是误判为更远的符号，每个符号误判引起 1/2 的比特错误；二者平均为 0.9×$1/K$ +0.1×1/2=于是其平均值为

$$P_b \approx (0.05+0.9/K)P_M \tag{5-2-10}$$

当信噪比较高时也可近似为：$P_b = \dfrac{1}{\log M} P_s$

5.2.3 MPSK 调制的误码特性

MPSK 调制信号的星座点集为 S：$\{\mathbf{v}^{(m)} \quad m=0,1,2,\ldots,M-1\}$，其中 M 种符号的基准矢量可以表示为：

$$\mathbf{v}^{(m)} = \sqrt{E_s}e^{j2\pi m/M} \qquad m=0,1,2,\ldots,M-1 \tag{5-2-11}$$

其中 $E_s = KE_b$ 表示每个符号的能量，$K = L\mathrm{og}_2 M$ 表示每个符号的比特数。

- 为了尽量降低平均误比特概率，在安排符号星座点与符号信息比特之间的对应关系时，应该使汉明距离较大的两个符号所对应的符号基准矢量的欧氏距离也较大；一般是按照 Gray 码的顺序排列这 M 种符号的序号就可基本实现这个目标。

(1) QPSK 的比特错误概率

M =4 的 MPSK 称为 QPSK。在载波跟踪和正交载波解调做到很理想的情况下，一个 QPSK 调制信道等价于两个独立的 BPSK 信道，因为它可以看作是由两个相互正交的载波调制的 BPSK 调制信号在同一频带 AWGN 信道中独立传输；因此 QPSK 的比特错误特性与 BPSK 的完全相同，即

$$P_b = \ = Q(\sqrt{2E_b/N_0}) \tag{5-2-12}$$

(2) MPSK 比特错误概率公式

- **只要保证了欧氏距离最小的相邻两种符号之间的汉明距离最小(即等于 1)，其误码特性就可近似达到最好；**这是因为欧氏距离最小的相邻两个码之间的误码是错误概率的最主要贡献者，随着到较远的各星座点的距离成倍增长，误码概率相应地按数量级规律减小。

- 当发送符号是第 m 种符号时，将接收符号矢量 $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^{(m)} + \boldsymbol{\eta}$ 与 $\mathbf{v}^{(m+1)}$ 和 $\mathbf{v}^{(m-1)}$ 进行距离计算得到误码率公式时，两次符号判决事件是几乎相互独立的；因此两次判决都正确的概率为 $P_{C(m)} = (1-P_{(m+1)/m})(1-P_{(m-1)/m})$；而根据(5-2-4)式可知

$$P_{(m+1)/m}=Q\left(\sqrt{d_{m,m+1}^2/(2N_0)}\right)=Q\left(\sqrt{\beta_{m,m+1}E_s/N_0}\right)$$

其中 $d_{m,m+1}=|\mathbf{v}^{(m+1)}-\mathbf{v}^{(m)}|=2\sqrt{E_s}\ \sin(\pi/M)$，即 $\beta_{m,m+1}=2\sin^2(\pi/M)$；$P_{(m-1)/m}$ 也是同样的表达式。由于 M 种符号的情况都相同，因此不必对它们进行平均所得 P_m 就是平均符号错误概率，即

$$\begin{aligned}P_M=P_m&=1-P_{C(m)}=1-\left[1-Q\left(\sin(\pi/M)\sqrt{2E_s/N_0}\right)\right]^2\\&\approx 2Q\left(\sin(\pi/M)\sqrt{2KE_b/N_0}\right)\end{aligned}\qquad\textbf{(5-2-13a)}$$

同理可采用(5-2-10)式计算比特错误概率，即

$$P_b\approx(0.05+0.9/K)P_M\approx(0.1+1.8/K)Q\left(\sin(\pi/M)\sqrt{2KE_b/N_0}\right)\qquad\textbf{(5-2-13b)}$$

或者 $P_b\approx\frac{1}{k}P_e$

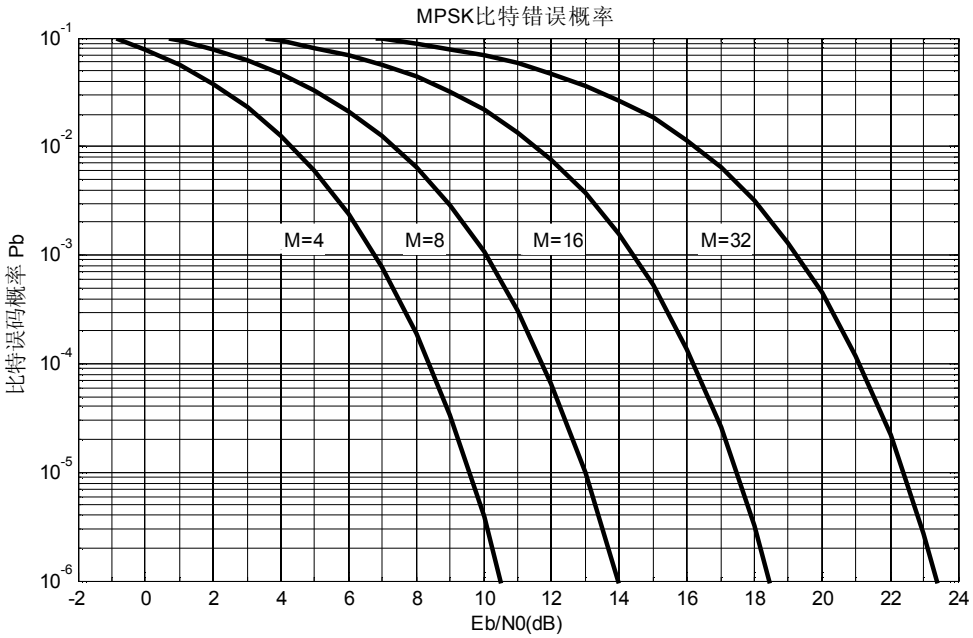


图 5-2-5　MPSK 调制的比特误码特性

5.2.4 DPSK 调制信号的解调及其误码特性

- 差分 PSK(即 DPSK)调制和延迟差分相干解调的办法可以解决相位模糊问题；发送端采用相邻两个符号的相位差表示符号星座点值的相位，接收端采用延迟差分相干解调法检出差分相位；这就是 DPSK。
- M 进制 DPSK 调制简称 M-DPSK，其调制、解调的基本原理可分两种情况来描述。

(1) 基于 T 长度的矩形脉冲成形波 $g(t)$ 的 M-DPSK

◆ 设 M 种符号的相位分别为 $\varphi^{(m)}=2\pi m/M$ ， $m=1,2,...,M$ ；发送信号可表示为

$$s(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}A\cos[\omega_c t-\omega_c iT+\varphi_i]g(t-iT)$$

◆ 其中利用 $\{\varphi_i\}$ 的差分携带符号信息，当第 i 个符号属于第 m_i 种符号时，令 $\varphi_i-\varphi_{i-1}=\varphi^{(m)}$。对于接收信号 $r(t)=s(t)+\eta(t)$，采用延迟相干法检测差分相位，就是进行互相关运算：

$$\mathbf{R}_i=\int_{iT}^{iT+T}r(t+iT)r(t+iT-T)dt \tag{5-2-14}$$

显然 $$\mathbf{R}_i\approx\int_{iT}^{iT+T}s(t+iT)s(t+iT-T)dt=\int_{iT}^{iT+T}A^2\cos[\omega_c t+\varphi_i].\cos[\omega_c t+\varphi_{i-1}]dt$$

$$\approx\frac{1}{2}A^2\cos(\varphi_i-\varphi_{i-1})$$

可见 $\mathbf{R}_i$ 的相位角就是我们希望得到的差分相位 $\varphi_i-\varphi_{i-1}$，即可用于第 i 个符号的判决。

◆ **这种基于延迟相干的差分相位检测法，既不要锁相环，也不要采用正交解调器进行载波解调，还不需要通过差分编译码解决相位模糊问题；实现复杂度异常的低。**

(2) 基于奈奎斯特第一准则成形波 $g(t)$ 的 M-DPSK

当调制信号是基于奈奎斯特第一准则成形波 $g(t)$ 实现基带调制时，设第 i 个符号矢量为 $\mathbf{v}_i=e^{j\varphi_i}$， $\varphi_i\in\{\varphi^{(m)}=2\pi m/M$ ， $m=1,2,...,M\}$，则 M-DPSK 调制的发送信号可表示为

$$s(t)=\mathrm{Re}\{\mathbf{s}_l(t)e^{j\omega_c t}\}=\mathrm{Re}\{[\sum_{i=-\infty}^{\infty}e^{j\varphi_i}g(t-iT)]e^{j\omega_c t}\}$$

差分相位的检测则可采用下式实现：

$$\Delta\hat{\varphi}_i=\hat{\varphi}_i-\hat{\varphi}_{i-1}=\mathrm{Im}[\ln(\hat{\mathbf{v}}_i\hat{\mathbf{v}}_{i-1}^*)] \tag{5-2-15}$$

此式取自然对数再求虚部，就是求 $\hat{\mathbf{v}}_i\hat{\mathbf{v}}_{i-1}^*$ 的相位。符号判决就是：如果

$$\hat{m}=\underset{m=1,2,...,M}{Arg\min}\quad\{|\Delta\hat{\varphi}_i-\varphi^{(m)}|\} \tag{5-2-16}$$

则第 i 个符号便判决为第 $\hat{m}$ 种符号。

◆ **这种 M-DPSK 解调方法仍需要采用正交解调器进行载波解调，并使解调所得**

$\hat{\mathbf{s}}_l(t)$ 中的频偏足够小，但不须相位跟踪，也不须采用差分译码解决相位模糊问题。

(3) M-DPSK 调制方式的误码特性

设输入特征矢量为 $\hat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\eta}_i$，其信噪比为 $\gamma_0 = |\mathbf{v}_i|^2 / |\boldsymbol{\eta}_i|^2$，而

$$\hat{\mathbf{v}}_i \hat{\mathbf{v}}_{i-1}^* = (\mathbf{v}_i + \boldsymbol{\eta}_i)(\mathbf{v}_{i-1} + \boldsymbol{\eta}_{i-1}) \approx \mathbf{v}_i^2 + \mathbf{v}_i \boldsymbol{\eta}_{i-1} + \mathbf{v}_{i-1} \boldsymbol{\eta}_i + \boldsymbol{\eta}_i \boldsymbol{\eta}_{i-1}$$

其信噪比为 $\gamma \approx |\mathbf{v}|^4 / (2|\mathbf{v}\boldsymbol{\eta}|^2) \approx \gamma_0 / 2$；可见这种相位差分运算所得 $\hat{\mathbf{v}}_i \hat{\mathbf{v}}_{i-1}^*$ 的信噪比降低了 3dB；而 $\hat{\mathbf{v}}_i \hat{\mathbf{v}}_{i-1}^*$ 本质上是一个用于符号判决的判决量。

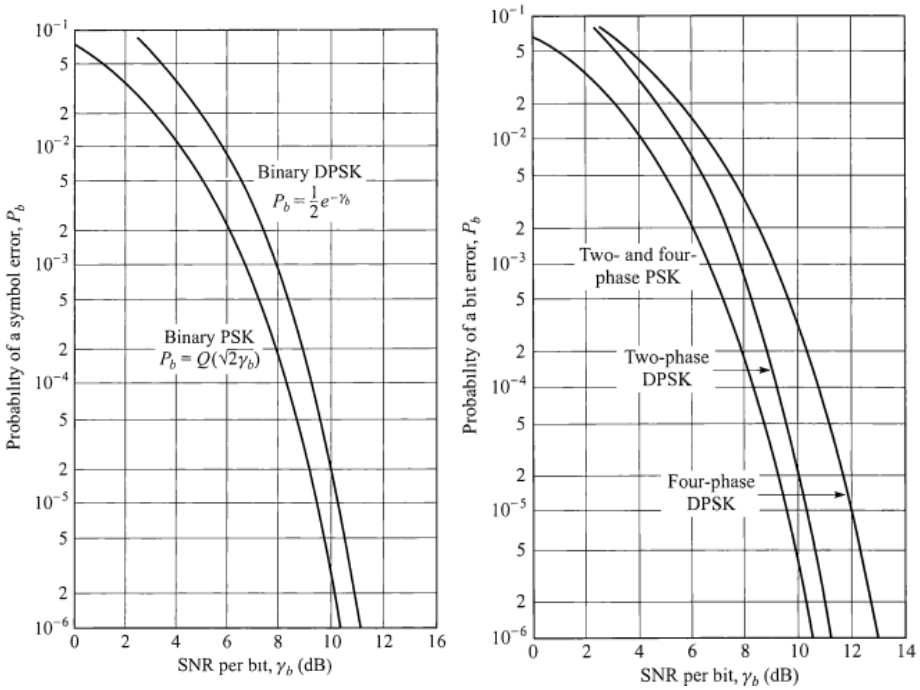
对于 2-DPSK，由于相邻符号相位相差 0° 或 180°，因此符号可表示为

$$\mathbf{s}_{1l} = \left(\sqrt{2\mathcal{E}_s} \quad \sqrt{2\mathcal{E}_s}\right)$$
$$\mathbf{s}_{2l} = \left(\sqrt{2\mathcal{E}_s} \quad -\sqrt{2\mathcal{E}_s}\right)$$

可推导得到 2-DPSK 错误概率为：

$$P_b = \frac{1}{2} e^{-E_b / N_0} \tag{5-2-17}$$

- 4-DPSK 延迟差分相干解调的误码特性比常规 QPSK 相干解调的误码特性差 2.3dB 左右；这是因为它不需要采用差分编译码解决相位模糊问题；差分译码引起的误码传递还将使误码特性劣化 0.6dB，而它不需付出此代价。4-DPSK 延迟差分相干解调的优点是在载波解调时不必进行载波相位锁定，而只要进行载波频率跟踪；同时还不需进行差分编译码，总的复杂度较低；在应用中是可以权衡利弊来选择的。



5.2.5 M 元正交波形调制的误码特性

- M-QWM 信号的解调所得判决量的相互独立性。
- 第 m_1 种符号被正确判决的概率为

$$P_{C(m_1)} = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq m_1}}^{M-1} (1 - P_{m/m_1})$$

其中 P_{m/m_1} 表示将第 m_1 种符号错判为第 m 种符号的概率；

- 对于基于相干解调的判决和基于非相干的判决时 P_{m/m_1} 的表达式各不相同；

(1) M-QWM 信号的相干解调最佳检测的比特错误概率

对于基于相干解调的判决，是取 $\tilde{\mathbf{v}}(m)$ 的实部作为判决量进行最大相关判决，其误码概率公式可参考(5-2-4)式推得，但情况有所不同。

当发送任意种符号(例如第 m_1 种)符号，对它的相关量进行 M-1 次比较判决时每次发生的错误概率 P_{m/m_1} 都相同，因此不必平均，即第 m_1 种符号误判为其它符号的平均错误概率为

$$P_{m_1}=P_{m/m_1}=Q\left(\sqrt{d_{m_1,m}^2/N_0}\right)=Q\left(\sqrt{E_s/N_0}\right) \tag{5-2-18}$$

$$m_1,m=0,1,2,\ldots,M-1 \quad (m\neq m_1)$$

各种符号的情况相同，但是每个符号错误所引起的比特错误数不同，因此基于相干解调的 M-QWM 总的平均比特错误概率应为

$$P_b=\frac{1}{M}\sum_{m_1=0}^{M-1}\left\{1-\prod_{\substack{m=0\\m\neq m_1}}^{M-1}\left[1-\frac{D_{m_1,m}}{K}P_{m/m_1}\right]\right\}=\frac{1}{M}\sum_{m_1=0}^{M-1}\left\{1-\prod_{\substack{m=0\\m\neq m_1}}^{M-1}\left[1-\frac{D_{m_1,m}}{K}Q\left(\sqrt{KE_b/N_0}\right)\right]\right\} \tag{5-2-19}$$

其中 $D_{m_1,m}$ 表示第 m_1 种符号与第 m 种符号之间的汉明距离，即误码引起的错误比特数。

上式可以进一步近似而简化，为此先给出平均符号错误概率，即

$$P_M=1-\left[1-Q\left(\sqrt{KE_b/N_0}\right)\right]^{M-1} \tag{5-2-20}$$

再将符号错误率换算成比特错误率。假定各种符号是等概率发送的，每个符号误判为其它符号可能性有 $1/(M-1)=1/(2^K-1)$；K 比特中出现 k 比特$(1\le k\le K)$的情况共有 $\binom{K}{k}$ 种；平均每错一个符号的比特差错数为 $\sum_{k=1}^{K}\binom{K}{k}k/(2^K-1)=K2^{K-1}/(2^K-1)$，比特概率则还应除以 K，因为每个符号有 K 比特。于是平均比特错误概率是

$$P_b=\frac{2^{K-1}}{2^K-1}P_M=\frac{2^{K-1}}{2^K-1}\left\{1-\left[1-Q\left(\sqrt{KE_b/N_0}\right)\right]^{M-1}\right\} \tag{5-2-21}$$

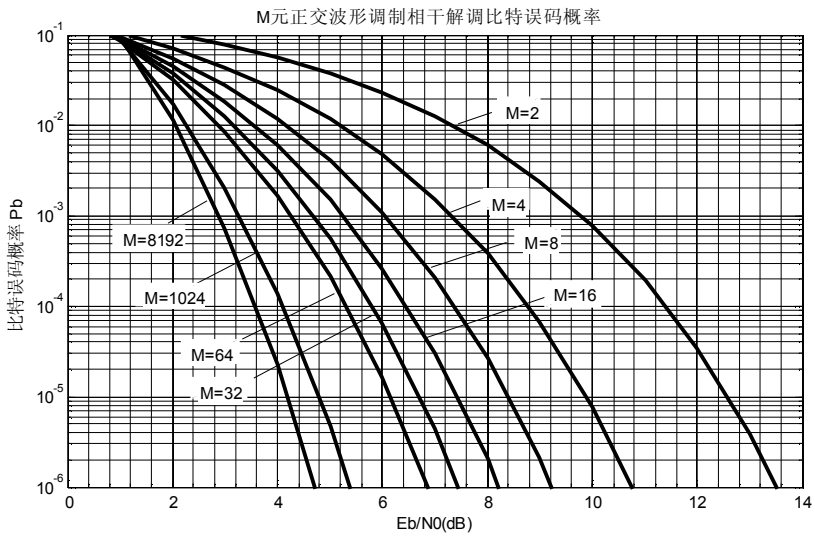


图 5-2-6 M 元正交波形调制(M-QWM)相干解调的比特误码率特性

图 5-2-6 是由此式得出的 M-QWM 相干解调 M=4,8,16,32,1024,8192 时的误比特率特性曲线。从图中可见，当 M 增加时误比特率性能逐步改善；可以证明当 $M \to \infty$ 时即可逼近香农极限；此时只要 $E_b / N_0 > -1.6dB$，P_b 就可以任意小，当然其频带效率也会非常低。

(2)基于非相干解调 M-QWM 的误码特性

设某个符号发送是能量为 E_s 的第 0 种符号，有信道噪声时相应的 M 个互相关幅度 $\tilde{R}_0 = |\sqrt{E_s} + \boldsymbol{\eta}_0|$，$\tilde{R}_m = |\boldsymbol{\eta}_m|$ ($m = 1, 2, ..., M-1$)；

那么 $\tilde{R}_0$ 是一个两自由度、$s^2 = E_s$ 的赖斯分布随机变量，用 r 表示，则其条件 PDF 为

$$p(\tilde{R}_0 \mid R_0 = \sqrt{E_s}) = p_{\text{Rice}}(r) = \frac{2r}{N_0} e^{-(r^2+E_s)/N_0} I_0(2r\sqrt{E_s}/N_0) \tag{5-2-22}$$

而 $\tilde{R}_m$ 是一个两自由度的瑞利分布随机变量，用 r 表示，其条件 PDF 为

$$p(\tilde{R}_m \mid R_0 = \sqrt{E_s}) = p_{\text{Rayleigh}}(r) = \frac{2r}{N_0} e^{-r^2/N_0} \tag{5-2-23}$$

图 5-2-7 给出在 E_s =10、N_0 =1 时这两种 PDF 曲线的形状。

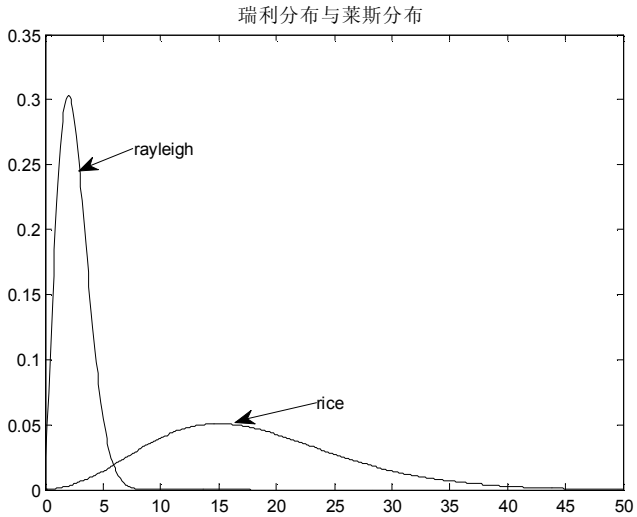


图 5-2-7 赖斯分布和瑞利分布 PDF

假如 R1 为期望接收信号，则正确接收的概率为：

$$
\begin{aligned}
P_c &= \mathrm{P}[R_2 < R_1, R_3 < R_1, \ldots, R_M < R_1] \\
&= \int_0^{\infty} \mathrm{P}[R_2 < r_1, R_3 < r_1, \ldots, R_M < r_1 \,|\, R_1 = r_1]\, p_{R_1}(r_1)\, dr_1 \\
&= \int_0^{\infty} (\mathrm{P}[R_2 < r_1])^{M-1}\, p_{R_1}(r_1)\, dr_1
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}[R_2 < r_1] &= \int_0^{r_1} p_{R_2}(r_2)\, dr_2 \\
&= 1 - e^{-\frac{r_1^2}{2\sigma^2}}
\end{aligned}
$$

利用

$$
\left(1 - e^{-\frac{r_1^2}{2\sigma^2}}\right)^{M-1} = \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n \binom{M-1}{n} e^{-\frac{n r_1^2}{2\sigma^2}}
$$

可得

$$
\begin{aligned}
P_c &= \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n \binom{M-1}{n} \int_0^{\infty} e^{-\frac{n r_1^2}{2\sigma^2}} \frac{r_1}{\sigma^2} I_0\left(\frac{s r_1}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{r_1^2 + s^2}{2\sigma^2}}\, dr_1 \\
&= \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n \binom{M-1}{n} \int_0^{\infty} \frac{r_1}{\sigma^2} I_0\left(\frac{s r_1}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{(n+1) r_1^2 + s^2}{2\sigma^2}}\, dr_1 \\
&= \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n \binom{M-1}{n} e^{-\frac{n s^2}{2(n+1)\sigma^2}} \int_0^{\infty} \frac{r_1}{\sigma^2} I_0\left(\frac{s r_1}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{(n+1) r_1^2 + \frac{s^2}{n+1}}{2\sigma^2}}\, dr_1
\end{aligned}
$$

做如下变换

$$
\begin{aligned}
s' &= \frac{s}{\sqrt{n+1}} \\
r' &= r_1 \sqrt{n+1}
\end{aligned}
$$

得

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{r_1}{\sigma^2} I_0\left(\frac{s r_1}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{(n+1) r_1^2 + \frac{s^2}{n+1}}{2\sigma^2}}\, dr_1 &= \frac{1}{n+1} \int_0^{\infty} \frac{r'}{\sigma^2} I_0\left(\frac{r' s'}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{s'^2 + r'^2}{2\sigma^2}}\, dr' \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
P_c = \sum_{n=0}^{M-1} \frac{(-1)^n}{n+1} \binom{M-1}{n} e^{-\frac{n}{n+1} \frac{\mathcal{E}_s}{N_0}}
$$

相应的错误概率为：

$$
P_e = \sum_{n=1}^{M-1} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \binom{M-1}{n} e^{-\frac{n \log_2 M}{n+1} \frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}
$$

误比特率为：

$$P_b = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} P_e$$

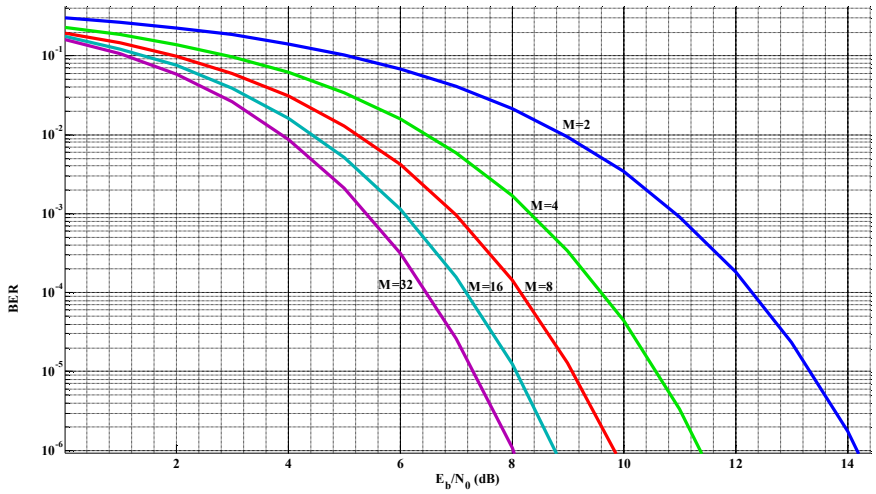


图 5-2-8 M 元正交波形调制(M-QWM)非相干解调的比特误码特性

(3) 关于 M 元双正交波形调制

- 如果 M 种调制波形是采用 M /2 个相互正交的波形{ $f_m(t)$ $m = 1,2,...,M/2$ }与它们的反向波形{- $f_m(t)$ $m = 0,1,2,...,M/2-1$ }一起构成的，这就是所谓双正交波形调制。
- 由于每对正负波形的欧氏距离最大，用它们来表示汉明距离最大的两种符号，使之出现 K 比特信息错误的概率大大降低，因而能改善误码特性。
- 不过它只能在 M 值不大时能明显改善误码特性，而当 M 较大时的改善效果就很不明显了；这是因为汉明距离等于 K 的符号种类总共只有 K 对，当 M 增大时这样的符号对所占比例 $2K/M$ 便变得很小了。这种调制方式必须采用相干解调，而且还必须采用特殊措施解决 $0/\pi$ 相位模糊问题。

【例】M =4 时 M 元双正交码波形扩频调制，虽有两对码的汉明距离等于 2，但对于每种符号只有一个符号与它的汉明距离等于 2，因此根据(5-2-19)式推得的比特误码率为：

$$P_b = 1 - \left[1 - \frac{2}{2} Q\left(\sqrt{4E_b/N_0}\right)\right] \cdot \left[1 - \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{2E_b/N_0}\right)\right]^2 \qquad \text{(5-2-26a)}$$

同理 M =8 时根据(5-2-19)式推得的比特误码概率公式为：

$$P_b = 1 - \left[1 - \frac{3}{3} Q\left(\sqrt{6E_b/N_0}\right)\right] \cdot \left[1 - \frac{1}{3} Q\left(\sqrt{3E_b/N_0}\right)\right]^3 \cdot \left[1 - \frac{2}{3} Q\left(\sqrt{3E_b/N_0}\right)\right]^3 \qquad \text{(5-2-26b)}$$

M≥16 以上时的比特误码率公式采用通式(5-2-21)计算，因为此时双正交的改善已不明显了。

- 另一种 M 元双正交码波形扩频调制是，除了利用基带波形的正交性之外，还利用载波调制的正交性实现 M 元扩频调制；即 M 种正交码波形中有 $M/2$ 种波形调制到 $\cos(2\pi f_c t)$，而另外 $M/2$ 种波形调制到 $\sin(2\pi f_c t)$；接收端利用相干解调法分别进行解扩解调；显然其频带效率比常规 M-QWM 提高一倍，而其比特误码特性等价于基于相干解调的常规 $M/2$ 元正交波形调制。

5.2.6 QAM 调制的误码特性

- QAM 调制是 PAM 调制与 PSK 调制相结合形成的一种调制方式，其星座点较均匀地分布在符号特征空间的矩形、正方形或其它形状的区域中。相对于 PAM 或 PSK 调制，当进制数 M 较大时，可以获得最佳的误码特性。

QAM 的误码特性主要取决于星座点之间的最小距离。星座设计的准则是：
(1)在保证相同空间距离的条件下，平均功率最小（误码性能最好）；
(2)在给定峰值功率的前提下，保证最小的空间距离最大和峰平比最小；
(3)兼顾实现难易程度。

- $M=2^K$ 的 M 元 QAM 调制，K 一般为偶数，其星座点可设计为:

$$\mathbf{v}^{(k_1,k_2)}=\frac{\sqrt{E_M/2}}{K-1}[\pm(2k_1-1)\pm j(2k_2-1)] \qquad k_1,k_2=1,2,\ldots,K/2 \tag{5-2-27}$$

- M 元 QAM 信号可等效为在两个正交载波上的两路 $\sqrt{M}$ 进制的 PAM 信号；因此 M 元 QAM 系统正确判决概率是

$$P_c=(1-P_{\sqrt{M}})^2 \tag{5-2-28}$$

设 $\sqrt{M}$ 进制的 PAM 信号平均每个符号的能量是 MQAM 信号平均每个符号能量 E_s 的一半；因此根据(5-2-9）式，有

$$P_{\sqrt{M}}\approx\frac{2\sqrt{M}-2}{\sqrt{M}}Q\left(\sqrt{\frac{3KE_b}{(M-1)N_0}}\right) \tag{5-2-29}$$

于是 M-QAM 的符号错误概率为

$$P_M=1-(1-P_{\sqrt{M}})^2\approx 2P_{\sqrt{M}}=\frac{4(\sqrt{M}-1)}{\sqrt{M}}Q\left(\sqrt{\frac{3KE_b}{(M-1)N_0}}\right) \tag{5-2-30}$$

其误码特性比 MPSK 和 PAM 都有较大的改善。比特错误概率也可用(5-2-10)式计算，$P_b\approx(0.05+0.9/K)\,P_M$，即

$$P_b \approx \frac{(0.2+3.6/K)(\sqrt{M}-1)}{\sqrt{M}} Q\left(\sqrt{\frac{3KE_b}{(M-1)N_0}}\right) \qquad \textbf{(5-2-31)}$$

表 5-2-2 MQAM 相对于 MPSK 的 E_b/N_0 改善量

M	改善量 $10\mathrm{Lg}\left(\frac{3}{2(M-1)\sin^2(\pi/M)}\right)$
8	1.65
16	4.20
32	7.02
64	9.95

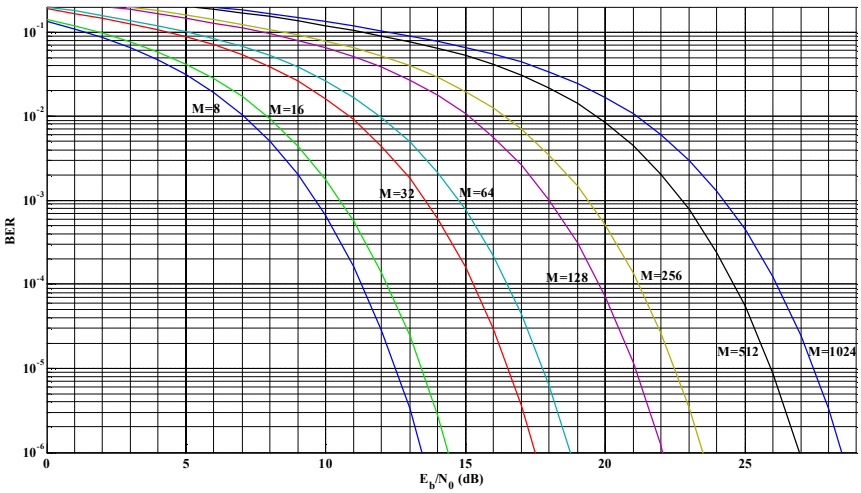


图 5-2-10 MQAM 的比特误码率特性

5.2.7 APSK 调制的误码特性

- APSK 调制是 PAM 调制与 PSK 调制相结合的另一种方式，它的星座点呈圆形分布，其中幅度信息和相位信息是变量可分离的函数，能在一定程度上容忍信道的非线性。

当 K 为偶数，$M=2^K$ 的 M 元 APSK 调制，其星座点可设计为

$$\mathbf{v}^{(k_1,k_2)} = \frac{k_1\sqrt{E_M}}{K_1}\exp[2\pi k_2/(2^{K_2})] \qquad k_1=1,2,\ldots,K_1;\ k_2=1,2,\ldots,K_2 \qquad (5\text{-}2\text{-}32)$$

其中 $K_1+K_2=K$；$\sqrt{E_M}$ 为符号波形的最大幅度。

- 一种如图 4-4-3 所示的 16-APSK 星座点，与 16QAM 的星座点相比，在平均功率相同的情况下其最小欧氏距离平方值减小一倍，因而其比特误码率特性要差 3dB。如果改进为如图 5-2-11 所示，内外两圈星座点错开一个角度使最小欧氏距离增大，可改善误码率特性。

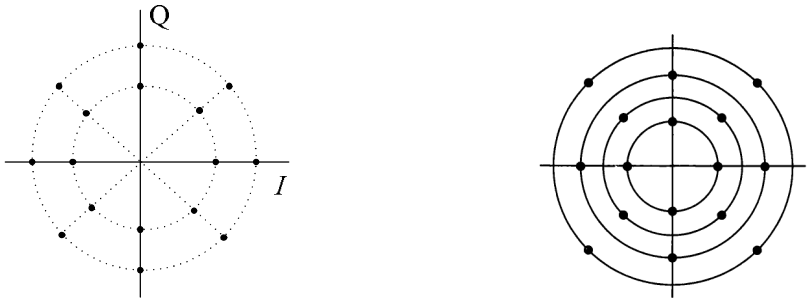
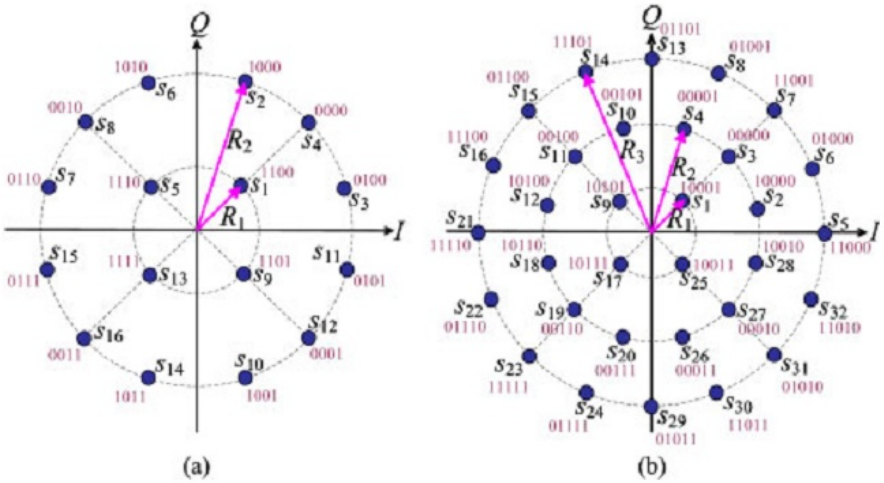
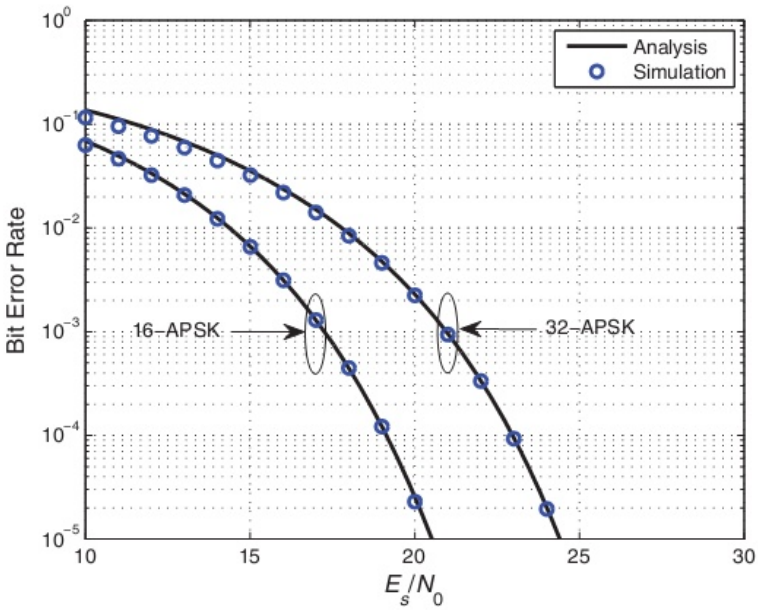


图 5-2-11 一种改进的 16APSK 的星座点





5.2.8 各种数字调制方式的性能比较

(1)数字调制的频带效率

数字调制的频带效率是指所传输信息的速率 R_b 与调制信号带宽 B 之比，即

$$\eta_B = R_b / B \quad \textbf{(bps/Hz)} \qquad \textbf{(5-2-33a)}$$

频带效率 η_B 与基带调制所用成形波的频带效率 η_g 有关，也与所用调制进制 M 及其传输方式所能达到的最高频带效率 $\eta_{\max}$ 有关，即

$$\eta_B = \eta_g \cdot \eta_{\max} \qquad (5\text{-}2\text{-}33b)$$

①一般 M 进制调制的频带效率：

对于 M 进制调制，如果采用**基带传输**方式（例如 M-PAM 调制传输）能达到的最高频带效率为

$$\eta_{\max} = 2\ (\text{波特/Hz}) = 2\log_2 M \quad (\text{bps/Hz}); \qquad \textbf{(5-2-34a)}$$

而若采用**载波调制**传输方式，能达到的最高频带效率为

$$\eta_{\max} = 1(\text{波特/Hz}) = \log_2 M\ (\text{bps/Hz}) \qquad \textbf{(5-2-34b)}$$

这是因为载波调制都是基于双边带的平衡调幅方式实现的。

② M 进制正交波形调制的频带效率：

对于 M -QWM 调制来说，所用的 M 种正交波形就可看作是各个符号的成形波，其频带效率 $\eta_g \le 1/M$，因此

$$\eta_B \le (\mathrm{Log}_2 M)/M \quad (\text{bps/Hz}) \qquad (5\text{-}2\text{-}35a)$$

这是因为要构造出 M 种相互正交的波形，每个波形的时长 T_s 不能小于 M/B，即 $T_s \geqslant M/B$。当 $T_s = M/B$ 时，那么按照奈奎斯特临界采样率 $f_s = 1/B$ 对这 M 个复信号波形分别进行采样时，每个波形正好表示为 M 个样点，也就是每种波形表示为 M 维正交空间中的一个矢量，而这个 M 维空间中最多只能找到 M 个互不相关的矢量；可见如果 $T_s < M/B$，就不能构造 M 种相互正交的波形，可见其信号带宽 $B \geqslant \log_2 M$，因而有(5-2-35)式。

③ M 进制双正交波形调制的频带效率：

前述两种双正交 M-QWM 调制的频带效率都比常规 M-QWM 调制的提高一倍，即

$$\eta_B \le (2\mathrm{Log}_2 M)/M \quad (\text{bps/Hz}) \qquad (5\text{-}2\text{-}35b)$$

(2) 数字调制的功率利用率

- **功率利用率定义为在一定的误码率下(例如 10^{-5})接收端所需要的信噪比 E_b/N_0。**

  调制方式的功率利用率越高，其相应的抗噪性能越好。

- 在 AWGN 信道下，调制方式星座点间的最小欧式距离越大，其功率利用率越高。因此，低阶调制方式的功率利用率高于高阶调制方式。

- 在阶数相同的情况下，MQAM 的功率利用率高于 MPSK 与 MPAM；而 MPSK 功率利用率高于 MPAM。正交波形调制方式的功率利用率要高于非正交波形调制方式。

综合考虑频带效率和误码特性，具有以下规律：

① MPAM, MQAM, MPSK 调制，增加 M 会提高频带效率 R/W，但是达到同样的误码率所需的 E_b/N_0 值也要相应地提高，特别是 MPAM 和 MPSK 的 E_b/N_0 提高很大。

② M 元正交波形调制，增加 M 会降低频带效率 R/W，但达到同样的误码率所需的 E_b/N_0 值也相应地减少；当 $M\to\infty$ 时，E_b/N_0 可趋近香农极限-1.6dB，但是它逼近香农极限的速度越来越慢，而频带效率的降低却越来越快。

③ 香农容量限是任何类型调制的带宽效率的上边界。

5.3 CPM 调制信号的解调与检测

5.3.1 CPM 调制信号的特点

- 对于记忆长度为 L 的 CPM，当前符号处于何种状态是由前 L 个符号所处状态决定的。因此 CPM 调制信号的基带解调，一般都要考虑前后符号的关联而进行多个符号联合判决。

- CPM 调制方式有许多种，但存在一些共同的特点，那就是采用有限个可能的状态来描述信号空间轨迹的。

5.3.2 CPM 调制信号解调检测过程的分解描述

- 对于记忆长度为 L 的 M 进制 CPM 调制接收信号的解调，先给出 N 种基准状态矢量 $\{\boldsymbol{\theta}^{(0)}\ \boldsymbol{\theta}^{(1)}\ldots\boldsymbol{\theta}^{(N-1)}\}$，同时给出状态转移规则，当前状态 $\boldsymbol{\theta}_i$ 与前 L 个状态的函数关系，即 $\boldsymbol{\theta}_i=f(\boldsymbol{\theta}_{i-1},\boldsymbol{\theta}_{i-2},\ldots,\boldsymbol{\theta}_{i-L})$ 据此即可给出状态转移网格图。

- 给出 M 种符号所对应的状态转移轨迹，即：$\mathbf{V}^{(m)}_{\boldsymbol{\theta}_{i-1}\boldsymbol{\theta}_i}(t)$，$m=0,1,2,\ldots,M-1$；

$\boldsymbol{\theta}_{i-1},\boldsymbol{\theta}_i\in\{\boldsymbol{\theta}^{(0)}\ \boldsymbol{\theta}^{(1)}\ldots\boldsymbol{\theta}^{(N-1)}\}$，其中 $\boldsymbol{\theta}_{i-1}$ 和 $\boldsymbol{\theta}_i$ 分别表示符号起始点和终止点所处状态；

CPM 信号的解调过程可分解描述如下：

(1) 载波解调：

与无记忆调制相同，通过基于载波同步跟踪的正交下变频，消除频偏相偏，得到发送

信号等效低通信号$\mathbf{s}_l(t)$的估计$\hat{\mathbf{s}}_l(t)$，以每个符号$\ddot{T}$个样点的速率采样，所得离散信号形式为$\{\hat{\mathbf{s}}_l(n)\}$；

(2) 基带解调：

通过符号定时同步环路，使离散信号$\{\hat{\mathbf{s}}_l(n)\}$的采样位置与每个符号间隔端点对准，即可得到每个符号终止时刻所处状态的估计，例如第i个符号的$\hat{\boldsymbol{\theta}}_i=\hat{\mathbf{s}}_l(i\ddot{T})$；

(3) 符号判决：

由于存在L长度的记忆性，对第i个符号进行判决，不仅与当前符号终止时所处状态有关，还其前L个状态状态有关，应该将$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-L}$、$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-L+1}$、…、$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-1}$、$\hat{\boldsymbol{\theta}}_i$个状态联合起来进行判决；因为$L+1$个$M$进制符号，本来总共有$M^{L+1}$种可能的组合，相应的状态链也就有$M^{L+1}$种，但因状态转移关系函数的约束，实际可能的状态链总数为M_{L+1}种，$M_{L+1}<M^{L+1}$；假定它们是等概率出现的，则可进行 ML 序列检测，或等价地基于最小欧氏距离准则进行判决；即根据下式将第i个符号判为第$\hat{m}_i$种符号：

$$\mathbf{v}^{(\hat{m}_i)}=\underset{\forall\{\mathbf{v}^{(m_i)}\mathbf{v}^{(m_{i-1})}\ldots\mathbf{v}^{(m_{i-L})}\}}{\arg\min}\quad D(\hat{\mathbf{s}}_l(n),\tilde{\mathbf{s}}_l(n)) \tag{5-3-1a}$$

其中$\{\tilde{\mathbf{s}}_l(n)\}$是基于状态转移轨迹$\{\mathbf{V}^{(m)}_{\boldsymbol{\theta}_{i-1}\boldsymbol{\theta}_i}(n)\}$，由$M_{L+1}$种可能状态链中某一种重构而成的基带信号，上述欧氏距离为：

$$D(\hat{\mathbf{s}}_l(n),\tilde{\mathbf{s}}_l(n))=\sum_n|\hat{\mathbf{s}}_l(n)-\tilde{\mathbf{s}}_l(n)|^2 \tag{5-3-1b}$$

5.3.3 CPM 调制信号解调判决的 Viterbi 算法

上述 ML 序列检测在原理上每次判决一个符号就需要计算M_{L+1}次很长序列的欧氏距离，M_{L+1}的大小与M^{L+1}是同样的数量级，因此当$L>2$后就会因复杂度太高而无法进行这种全搜索的 ML 序列检测；采用 Viterbi 算法可大幅度降低其计算复杂度。

以调制指数周期性地改变的二进制 CPFSK 为例，设h_i=1/2、1/4、1/2、1/4、1/2、1/4、……，那么它的记忆长度L=2、状态数N=8，符号种类M=2，即m=0，1；它的 8 种状态矢量为：$\boldsymbol{\theta}^{(k)}=e^{j\pi k/4}$，$k=0,1,2,\ldots,7$；设初始状态$\boldsymbol{\theta}_0$=1，$h_1$=1/2，那么可给出状态转移网格图如图 5-3-1 所示；其中实线所示的路径表示所发送符号序列为 000010。

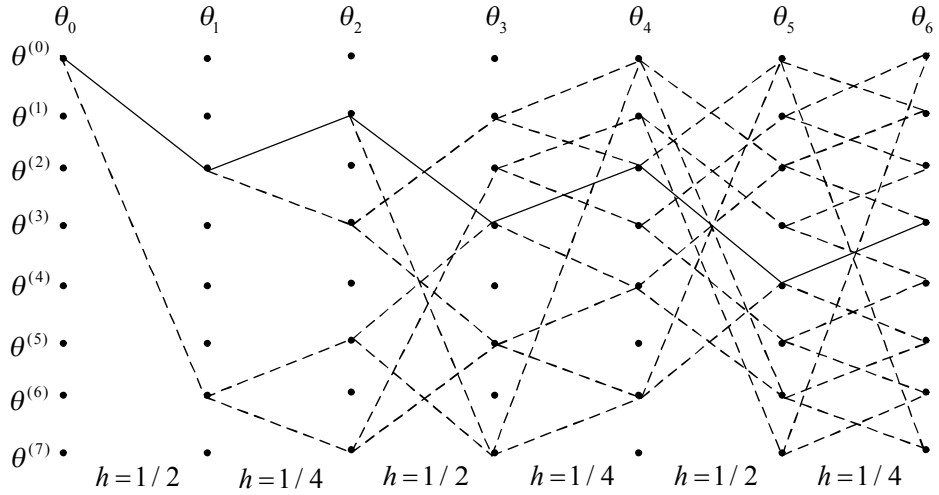


图 5-3-1 多重调制二进制 CPFSK 的状态转移网格图

采用接收信号经载波相干解调后所估计出的基带信号样点序列$\{\hat{\mathbf{s}}_l(n)\}$，逐个符号地进行判决，必须考虑长度为 L 的关联性。采用 Viterbi 算法进行判决的具体步骤如下：

(1) 设初始状态$\hat{\boldsymbol{\theta}}_0=\hat{\mathbf{s}}_l(0)$已确定为第$k_0$种状态，即$\boldsymbol{\theta}_0=\boldsymbol{\theta}^{(0)}=1$;

(2) 第 1 个符号结束时刻接收信号矢量$\hat{\boldsymbol{\theta}}_1=\hat{\mathbf{s}}_l(\ddot{T})$，其可能属于的状态$\boldsymbol{\theta}_1$有 2 种($M$=2)，相应的符号结束点处的状态序号有 2 种可能，即$\boldsymbol{\theta}_1=\boldsymbol{\theta}^{(2)}$或$\boldsymbol{\theta}^{(6)}$，这取决于第 1 个发送符号的种类号$m_1=0$还是$m_1=1$。计算这两种可能的状态转移轨迹的欧氏距离：

$$d(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\theta}_1)=\sum_{n=1}^{\ddot{T}}|\hat{\mathbf{s}}_l(n)-\mathbf{V}_{\boldsymbol{\theta}_0\boldsymbol{\theta}_1}^{(m_1)}(n)|^2 \quad ; \qquad \boldsymbol{\theta}_1=\boldsymbol{\theta}^{(k_1(m_1))}, \quad m_1=0,1 \quad , \quad k_1(m_1)=2,6;$$

并计算第 1 步的累积距离：$D_1(\boldsymbol{\theta}^{(k_1(m_1))})=d(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\theta}_1)$ ($\boldsymbol{\theta}_1=\boldsymbol{\theta}^{(2)}$，$\boldsymbol{\theta}^{(6)}$)；其余 6 种状态的距离不必计算；将在第 1 步转移到第k个状态时前一状态的状态序号记为$\psi_1(k)$, k=2,6。

(3) 第 2 个符号结束时刻接收信号矢量$\hat{\boldsymbol{\theta}}_2=\hat{\mathbf{s}}_l(2\ddot{T})$，其可能属于的状态$\boldsymbol{\theta}_2$的值有 4 种可能，$\boldsymbol{\theta}_2=\boldsymbol{\theta}^{(1)}$、$\boldsymbol{\theta}^{(3)}$、$\boldsymbol{\theta}^{(5)}$或$\boldsymbol{\theta}^{(7)}$，这取决于第 1、2 个发送符号($m_1$, m_2)的 4 种可能性。计算这 4 种可能状态转移轨迹的欧氏距离：

$$d(\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\theta}_2)=\sum_{n=1}^{\ddot{T}}|\hat{\mathbf{s}}_l(n)-\mathbf{V}_{\boldsymbol{\theta}_1\boldsymbol{\theta}_2}^{(m_2)}(n)|^2 \quad ; \quad \boldsymbol{\theta}_2=\boldsymbol{\theta}^{(k_2(m_2))}, \quad m_2=0,1, k_2(m_2)=1,3,5,7;$$

分别计算第 2 步到达状态 $\boldsymbol{\theta}_2=\boldsymbol{\theta}^{(1)}$、$\boldsymbol{\theta}^{(3)}$、$\boldsymbol{\theta}^{(5)}$ 或 $\boldsymbol{\theta}^{(7)}$ 中每个状态的两条支路的累

计距离：$D_2(\boldsymbol{\theta}^{(k_2(m_2))})=D_1(\boldsymbol{\theta}^{(k_1(m_1))})+d(\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\theta}_2)$，并比较这两个累计距离的大小，裁剪累计距离较大的那条支路，只留下累计距离较小的那个累计距离值 $D_2(\boldsymbol{\theta}^{(k_2(m_2))})$；并将在第 2 步转移到第 k 个状态时前一状态的状态序号记为 $\psi_2(k)$，k=1，3，5，7。

(4) 按照上述方法，每步计算欧氏距离和累计距离，并裁剪去累计距离较大的到达支路，第 i 步每个状态只留下残留路径的累计距离 $D_i(\boldsymbol{\theta}^{(k_i(m_i))})$，并将在第 i 步转移到第 k 个状态时前一状态的状态序号记为 $\psi_i(k)$，k=0,1,2,…,7。

(5) 当如此递推到 i=5 L 步后，比较各状态累计距离 $D_i(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$ (k=0,1,2,…,7) 的大小，以累计距离最小的节点为起点，利用 $\{\psi_i(k)\}$ 为引导向前回溯，回溯到第 1 个状态，即判定这一步 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$ 所属的状态 $\boldsymbol{\theta}^{(k_1)}$；同时根据 $(\boldsymbol{\theta}^{(0)},\boldsymbol{\theta}^{(k_1)})$ 判决第 1 个符号。

(6) 以后每次向前推进一步，便向前回溯判决一个符号。

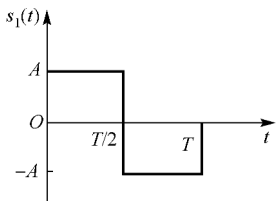
5.3.4 CPM 调制的性能

- **部分响应 CPM 信号的 ML 序列检测可以获得较大性能增益。例如：采用升余弦部分响应的 CPM，M =4 相对于 MSK 具有 3~4dB 的性能增益，而带宽不增加。采用卷积码与 CPM 的结合方式，相对于相同带宽的未编码 MSK 可获得 4~6dB 的性能增益。**

习　题

5-1　设匹配滤波器的频率响应 $H(f)=(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fT})/(\mathrm{j}2\pi f)$

(1) 与 $H(f)$ 对应的冲激响应 $h(t)$；(2) 该滤波器特性所匹配的信号波形。



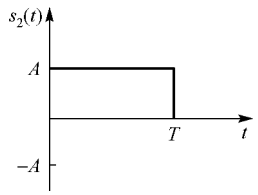
5-2　二进制数字通信系统采用以下信号发送信息：

$$s_0(t)=0\ \ (0\leqslant t\leqslant T)\,;\qquad s_1(t)=A\ \ (0\leqslant t\leqslant T)$$

这叫做启闭信号传输。在解调器将接收信号 $r(t)$ 与 $s(t)$ 进行互相关运算，并且在 $t=T$ 时刻对相关器的输出进行抽样。

(1) 假设信号是等概的，试求 AWGN 信道的最佳检测器和最佳门限；

(2) 试求以比特信噪比 γ_{E_b/N_0} 为变量的错误概率函数；比较启闭信号传输与双极性信号传输的性能。



5-3　利用下图所示的两个等效低通信号在 AWGN 信道上传输二进制序列。接收信号 $r_i(t)=s_i(t)+z(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T,i=1,2)$，其中 $z(t)$ 为零均值高斯白噪声过程，其自相关函数为 $\phi_{zz}(\tau)=1/2E\ \ [z*(t)z(t+\tau)]=N_0\delta(t)$。

(1) 试求 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 的发送能量及互相关系数。

(2) 假设接收机采用两个匹配滤波器的相干检测的方法实现，一个匹配于 $s_1(t)$，另一个匹配于 $s_2(t)$，绘出这两个匹配滤波器的无噪声响应。

(3) 假设接收机由两个并列的互相关器的方法实现，当发送信号 $s_2(t)$ 时，画出在 $0 \le t \le T$ 区间作为时间函数的每一个积分器的输出。

5-4 假设用二进制 PSK 在功率谱密度为 $N_0/2 = 10^{-10}\,\mathrm{W/Hz}$ 的 AWGN 信道上传输信息；发送信号的能量为 $E_b = A^2T/2$，T 为比特间隔，A 为信号幅度。当数据速率为下列值时，试求达到错误概率为 10^{-6} 时所需的信号幅度：(1) 10kbps；(2) 100kbps；(3) 1Mbps。

5-5 MSK 可以表示为四相偏移 PSK 调制，其等效低通形式为

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [I_k u(t-2kT_b) + \mathrm{j}J_k u(t-2kT_b-T_b]$$

其中 $\{I_k\}$ 和 $\{J_k\}$ 是信息符号 ±1 的序列，$u(t) = \begin{cases} \sin(\pi t/(2T_b)), & 0 \leqslant t \leqslant 2T_b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$。

(1) 画出对偏移 QPSK 的 MSK 解调器的方框图；

(2) 若不考虑调制的记忆特性，试针对 AWGN 求四相解调器的性能。

5-6 假设将波形 $\cos(2\pi f_1 t + \phi)$ 和 $\cos(2\pi f_2 t)$ 用于非相干 FSK 信号，其中 $f_1 > f_2$。码元周期为 T，ϕ 为常数，且 $\phi \in [0,\ 2\pi]$。

(1) 证明非相干检测正交 FSK 信号的最小频率间隔为 1/T；

(2) 求相干检测正交 FSK 信号的最小频率间隔。

5-7 给出相关接收与匹配滤波接收的原理框图及相关表达式，并说明在什么情况下相关接收与匹配滤波接收等价。

5-8 给出在误比特率为 10^{-5} 条件下采用用下面调制方式所需的最小 E_b/N_0。

(1) BSPK；(2) FSK；(3) DPSK；(4) QPSK；(5) 4QAM。

5-9 在一双极性通信系统中，信号 $s_0 = +A$，$s_1 = -A$，信道中的噪声服从拉普拉斯分布:

$p(n) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}|n|/\sigma}$，其中 σ 为噪声的均方根值

(1) 当信号服从等概分布时，求作为 A/σ 的函数的误码率 P_e 表达式及最佳门限 γ；

(2) 画出以 A/σ 为变量的误码曲线，并同高斯白噪声下的误码进行比较。

5-10 比较以下调制方式的优缺点：

(1) 恒包络与非恒包络；(2) 连续相位与非连续相位；(3) 有记忆调制与无记忆调制。

5-11 假设某一通信系统有 M 个信号 $s_0(t)$，$s_1(t)$，…，$s_{M-1}(t)$，$0 \le t \le T$，其中每一信号与其他信号在一小区间 $[t_1, t_2]$（$0 < t_1 < t_2 < T$）内相同。

(1) 说明对于最佳接收来说可以忽略这一小区间，或者说，如果 $s_0(t)$，$s_1(t)$，…，$s_{M-1}(t)$ 在某一维有相同的投影，那这一维可以忽略，假设信道噪声为高斯白噪声；

(2) 如果信道噪声为高斯分布且为色噪声，上面的结论是否依然成立？