

## 第2章 数字通信的数学基础

### 2.1 信号

#### 2.1.1 信号的基本特性

信号就是一个以时间作为自变量的函数，例如  $x(t)$ ，或一个离散时间序列，例如  $\{x(n)\}$ ，其取值一般是实数或复数；如果是  $N$  维函数，可表示为矢量函数  $[x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_N(t)]^T$ ，它在任一时刻都是一个  $N$  维矢量。

##### ● 确知信号与随机信号

如果  $x(t)$  或  $\{x(n)\}$  在任一时刻的值都是确知量，那么这个信号就是确知信号；如果  $x(t)$  或  $\{x(n)\}$  在任一时刻的值是随机变量或随机向量，那么这个信号就是随机信号；随机信号是一种随机过程，离散随机过程也称随机序列。

如果某个函数中的参数都是已知的，例如函数  $a \sin(\omega t + \varphi)$  中  $a$ 、 $\omega$  和  $\varphi$  都已知，那么它所表示的信号就是确知信号。从一个随机过程中获取一个现实，例如记录得到的一段信号波形，也是一个确知信号，尽管它因各态历经性而可能隐含了该随机过程的一些统计特性。

##### ● 周期性信号和非周期性信号

如果对于任意整数  $k$ ，信号  $x(t)$  或  $\{x(n)\}$  满足关系式  $x(t) = x(t + kT)$  或  $x(n) = x(n + kT)$ ，那么它们是周期性信号，其周期分别为时间  $T$  或  $T$  个样点。如果信号没有周期性地重复的现象，便属于非周期信号。

#### 2.1.2 几种常见的特殊信号

##### (1) 门函数或矩形函数

$$\text{连续形式} \quad g_{\tau}(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad \text{离散形式} \quad R_N(n) = \begin{cases} 1 & n \in \{0, 1, \dots, N-1\} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

##### (2) 单位阶跃函数

$$\text{连续形式:} \quad u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \text{离散形式:} \quad u(n) = \begin{cases} 1 & n \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

##### (3) 单位冲激函数( $\delta$ 函数)

$$\text{Dirac 函数: } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1; \delta(t) \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad \text{Kronecker 函数: } \delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

三者之间的关系为:

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{g_{\tau}(t)}{\tau} = \frac{du(t)}{dt} \quad u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\xi) d\xi \quad (2-1-1)$$

Dirac- $\delta$  函数的主要特性有:

$$\begin{aligned} a) \quad & x(t)\delta(t-\tau) = x(\tau)\delta(t-\tau) \\ b) \quad & x(t) * \delta(t-\tau) = x(t-\tau) \\ c) \quad & \delta(t) = \delta(-t) \end{aligned} \quad (2-1-2)$$

Kronecker- $\delta$  函数的主要特性有:

$$\begin{aligned} a) \quad & x(n)\delta(n-m) = x(m) \\ b) \quad & x(n) * \delta(n-m) = x(n-m) \\ c) \quad & \delta(n) = \delta(-n) \end{aligned} \quad (2-1-3)$$

## 2.2 信号的空间表示

### 2.2.1 信号的复数形式表示

本书所讨论的通信系统，主要是基于载波调制的通信系统，其通信信号和通信系统都是带通型的，而带通信号或系统与它们的复包络，具有最简单的线性频移关系。将带通信号及其线性系统的描述，等效为等效低通基带信号和等效低通线性系统来描述，基于复数的表示形式不仅简明而直观，而且与基于数字信号处理的实现过程相对应，有助于应用和理解。

信号的复数形式表示是一种空间表示法，因为复数域本身就是一种二维正交空间。

#### (1) 复数

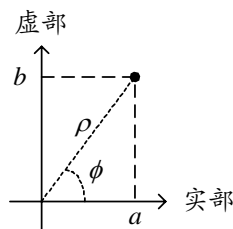
任一复数  $c$ ，可以采用以下两种常用形式表示:

直角坐标形式:  $c = a + jb$        $a$  和  $b$  分别为实部和虚部;

极坐标形式:  $c = \rho e^{j\phi}$        $\rho$  称为模,  $\phi$  称为相角;

其中  $j = \sqrt{-1}$ ;  $e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$ 。这两种表示方式等价，其相互转换公式及几何关系如下:

$$\begin{aligned} \rho &= |c| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \phi &= \arg[c] = \arctan(b/a) \\ a &= \text{Re}[c] = \rho \cos(\phi) \\ b &= \text{Im}[c] = \rho \sin(\phi) \end{aligned}$$



## (2) 实信号的复数形式表示

实信号  $s(t)$  的频谱  $S(f)$  具有共轭对称性，即  $S(f) = S^*(-f)$ ；幅度谱关于纵坐标轴对称而相位谱关于纵坐标轴反对称，即  $|S(f)| = |S(-f)|$ ， $\text{Arg}[S(f)] = -\text{Arg}[S(-f)]$ ；实际频谱是正频率一侧的，负频率频谱是实际频谱的镜像。

实信号  $s(t)$  的复解析信号  $\mathbf{s}(t)$  定义为

$$\mathbf{s}(t) = s(t) + j\tilde{s}(t) \quad (2-2-1a)$$

其中  $\tilde{s}(t)$  为  $s(t)$  的 Hilbert 变换，即

$$\tilde{s}(t) = s(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (2-2-1b)$$

$\tilde{s}(t)$  的频谱函数为

$$\tilde{S}(f) = -j \text{sgn}(f) \cdot S(f) = \begin{cases} -jS(f) & f > 0 \\ jS(f) & f < 0 \end{cases} \quad (2-2-2)$$

因此， $s(t)$  的频谱  $S(f)$  与其复解析信号  $\mathbf{s}(t)$  的频谱  $\mathbf{S}(f)$  的关系式为

$$\mathbf{S}(f) = \begin{cases} 2S(f) & f > 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases} \quad (2-2-3)$$

可见实信号的复解析信号的频谱只有正频率部分，而没有负频率镜像频谱。

如果  $s(t)$  是能量有限信号，其复解析信号  $\mathbf{s}(t)$  的能量等于  $s(t)$  能量的 2 倍，即

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{s}(t)|^2 dt = 2 \int_{-\infty}^{\infty} [s(t)]^2 dt = 2 E_x \quad (2-2-4)$$

从(2-2-2)式所示的 Hilbert 变换的频谱函数的特点可以看出，要想求一个离散信号  $\{s(n)\}$  的 Hilbert 变换  $\{\tilde{s}(n)\}$ ，只要将  $\{s(n)\}$  通过一个频率响应特性如(2-2-2)式所示的离散线性系统就可以得到；该线性系统称为 Hilbert 变换器，它既可以是 FIR 形式的，也可以是 IIR 形式的，它是一种实现 90 度相移的全通型滤波器；它能使一个低通型信号中所有频率成分同时移相 90 度，这是采用模拟电路无法直接实现的。

## (3) 实信号的复指数形式表示

根据正弦模型理论，任一实信号  $s(t)$  都可以表示为幅度、相位随时间而变的正弦函数：

$$s(t) = A(t) \sin[2\pi f_c t + \varphi(t) + \pi/2] = \text{Re}\{[A(t)e^{j\varphi(t)}]e^{j2\pi f_c t}\} \quad (2-2-5)$$

其中的复信号  $[A(t)e^{j\varphi(t)}]e^{j2\pi f_c t}$  就是  $s(t)$  的复指数表示形式，即

$$\tilde{\mathbf{s}}(t) = A(t) \cdot e^{j[2\pi f_c t + \varphi(t)]} = [a(t) + jb(t)]e^{j2\pi f_c t} \quad (2-2-6)$$

其中  $a(t) + jb(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}$ 。显然有

$$s(t) = [\tilde{\mathbf{s}}(t) + \tilde{\mathbf{s}}^*(t)]/2 \quad (2-2-7)$$

注意  $s(t)$  的复指数信号  $\tilde{s}(t)$  不一定等价于  $s(t)$  的解析信号  $s(t)$ ；但是，如果  $f_c$  大于  $s(t)$  带宽度的  $1/2$ ，那么其复指数信号  $\tilde{s}(t)$  便精确地等于其解析信号  $s(t)$ 。否则，因零频附近的频谱分量存在混叠现象而使二者之间存在误差；该误差信号  $e(t) = \tilde{s}(t) - s(t)$  可由二者频谱函数之差的反傅里叶变换得到。

带通实信号  $s(t)$  的解析信号  $s(t) = [A(t)e^{j\phi(t)}] e^{j2\pi f_c t}$ ，那么定义

$$s_l(t) = A(t)e^{j\phi(t)} = a(t) + jb(t) \quad (2-2-8)$$

那么  $s_l(t)$  就是  $s(t)$  的等效低通信号(复包络)。带通信号  $s(t)$  可看作是  $s_l(t)$  经正交载波调制后得到的结果，即  $s(t) = \text{Re}[s_l(t) e^{j2\pi f_c t}]$ ；解析信号  $s(t)$  就是  $s_l(t)$  频移  $f_c$  所得结果，即

$$s(t) = s_l(t) e^{j2\pi f_c t} \quad (2-2-9a)$$

相应的频谱函数  $S(f)$  和  $S_l(f)$  的关系是

$$S(f) = S_l(f - f_c) \quad (2-2-9b)$$

#### (4) 带通实信号的频谱

设带通实信号  $s(t)$  的等效低通信号  $s_l(t)$  的频谱为  $S_l(f)$ ，那么根据正交调制模型可推出  $s(t)$  的频谱函数  $S(f)$  为：

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}[s_l(t) e^{j2\pi f_c t}] e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} [s_l(t) e^{j2\pi f_c t} + s_l^*(t) e^{-j2\pi f_c t}] e^{-j2\pi ft} dt \\ &= [S_l(f - f_c) + S_l^*(-f - f_c)] / 2 \end{aligned} \quad (2-2-10)$$

带通实信号  $s(t)$  的能量

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \{\text{Re}[s_l(t) e^{-j2\pi f_c t}]\}^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |s_l(t)|^2 dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |s_l(t)|^2 \cos[4\pi f_c t + 2\phi(t)] dt \\ &\approx \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |s_l(t)|^2 dt \end{aligned} \quad (2-2-11)$$

### 2.2.2 带通线性系统的复数形式描述

设带通线性系统的单位冲激响应为  $h(t)$ ，其频率响应为  $H(f)$ ；设  $h(t)$  的复包络为  $h_l(t)$ ，相应的频率响应为  $H_l(f)$ ；则有关系式：

$$h(t) = h_l(t) e^{j2\pi f_c t} \quad (2-2-12a)$$

$$H(f) = H_l(f - f_c) \quad (2-2-12b)$$

设带通实信号及其频谱分别为  $s(t)$  和  $S(f)$ ，相应的解析信号及其频谱分别为  $s(t)$  和  $S(f)$ 。那么， $s(t)$  通过这个带通线性系统  $h(t)$  所产生的输出  $r(t)$  为：

$$\mathbf{r}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{s}(\tau) \mathbf{h}(t-\tau) d\tau \quad (2-2-13a)$$

相应的频谱关系为

$$\mathbf{R}(f) = \mathbf{S}(f) \mathbf{H}(f) \quad (2-2-13b)$$

设  $\mathbf{r}(t)$  的复包络为  $\mathbf{r}_l(t)$ ，相应的付立叶变换为  $\mathbf{R}_l(f)$ ，则很容易证明：

$$\mathbf{r}_l(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{s}_l(\tau) \mathbf{h}_l(t-\tau) d\tau \quad (2-2-14a)$$

$$\mathbf{R}_l(f) = \mathbf{S}_l(f) \mathbf{H}_l(f) \quad (2-2-14b)$$

这就是说，对带通信号进行线性处理通常都可以等价地平移到基带来做。

## 2.2.3 矢量及其内积空间

### (1) 矢量

多维信号任一时刻的抽样都是一个矢量。一个标记为  $[v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N]$  或  $[v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N]^T$  的  $N$  维矢量，可看作是  $N$  维空间中以座标原点为起点、以空间座标值  $(v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N)$  为终点的有向线段，因此一个  $N$  维矢量常常看成是  $N$  维空间中一个点。

### (2) 矢量的内积

两个  $N$  维复数矢量  $\mathbf{v}_1 = [v_{11} \ v_{12} \ \dots \ v_{1N}]$  和  $\mathbf{v}_2 = [v_{21} \ v_{22} \ \dots \ v_{2N}]$  的内积定义为：

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \triangleq \sum_{n=1}^N v_{1n} v_{2n}^* \quad (2-2-15)$$

并具有以下基本性质：

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle &= \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle^* \\ \mathbf{c} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle &= \langle \mathbf{c} \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{c}^* \mathbf{v}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v} \rangle \end{aligned} \quad (2-2-16)$$

两个矢量的内积的几何意义是：一个矢量在另一个矢量上投影的长度与第二个矢量长度的乘积，因为不难证明  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$  可表示为：

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \sqrt{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle} \cdot \cos \theta \quad (2-2-17)$$

其中矢量自身内积的平方根为矢量长度， $\theta$  为两矢量之间的空间夹角。如果两个矢量  $\mathbf{v}_1$  和  $\mathbf{v}_2$  的内积为零，即两矢量之间夹角为  $90$  度，那么称这两个矢量正交，即  $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$ 。

由此可见，两个矢量的内积表征了二者的相关程度，其夹角余弦值就是其相关系数：

$$\rho_{XY} = \cos \theta = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle / \sqrt{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle} \quad (2-2-18)$$

### (3) 实内积空间与酉空间

符合上述内积定义及其性质的所有可能的  $N$  维矢量构成一个  $N$  维复内积空间, 复内积空间又称为酉空间。如果这些矢量的各个元素的值只有实部, 而虚部值恒等于 0, 那它们所构成的是  $N$  维实内积空间。内积空间属于线性空间。

### (4) 内积空间的范数

定义一种范数来衡量内积空间中一个矢量的长度, 并基于此范数定义一种失真测度来衡量该内积空间中两个矢量差异的大小, 就可构成一个赋范线性空间。范数有多种形式的定义, 以  $l_p$  范数为例

$$\|\mathbf{v}\|_p \triangleq \left[ \sum_{n=1}^N |v_n|^p \right]^{1/p} \quad (2-2-19)$$

当  $p=1, 2, \infty$  时分别对应于: 取绝对值之和、求平方和后再开平方、取最大绝对值等三种不同的范数。对应于所定义的范数, 可定义相应的失真测度来衡量两个矢量之间差异的大小; 例如: 基于  $l_2$  范数的失真测度为

$$d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \triangleq \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_2 = \left[ \sum_{n=1}^N |v_{1n} - v_{2n}|^2 \right]^{1/2} \quad (2-2-20)$$

由于基于  $l_2$  范数的失真测度的定义能满足距离测度所要求的三个条件, 即非负性  $d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \geq 0$ 、对称性  $d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = d(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)$  和三角不等式  $d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + d(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \geq d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$  成立, 因而它是一种距离测度, 即欧几里德距离测度。由三角不等式还可推导出 Cauchy-Schwartz 不等式, 即

$$|\langle x_1(t), x_2(t) \rangle| \leq \|x_1(t)\| \cdot \|x_2(t)\| \quad (2-2-21)$$

注: 当  $x_2(t) = a x_1(t)$  (其中  $a$  为任意复数) 时等式成立  
因此, 定义了  $l_2$  范数的  $N$  维实内积空间是  $N$  维欧氏(Euclid)距离空间。

凡是定义了内积的线性空间都称为欧氏空间; 欧氏空间是欧氏距离空间概念的推广, 欧氏距离空间所赋予的范数是  $l_2$  范数, 采用欧氏距离衡量其空间中两点(或两矢量)的差异; 一般欧氏空间可赋予其它任一种范数和相应的失真测度, 因此我们应该从更一般意义上来理解多维空间中的矢量以及它们的度量。

### (5) 内积空间的正交基

$N$  维内积空间中任意  $N$  个相互正交的矢量  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N\}$ , 即

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (2-2-22)$$

可以构成一个正交基。如果这  $N$  个矢量都是单位长度的, 则构成的是标准正交基。如果该空间中任意一个矢量  $\mathbf{v}$  都可以表示为某个正交基中  $N$  个正交基矢量的加权和, 即

$$\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_N]^T = \sum_{n=1}^N v_n \mathbf{e}_n \quad (2-2-23)$$

其中  $v_n$  是  $\mathbf{v}$  在第  $n$  个基矢量  $\mathbf{e}_n$  上的投影, 即  $v_n = \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{v} \rangle$ , 那么这个正交基是完备的。

标准正交基有无穷多种; 例如采用单位矩阵  $\mathbf{I}_{N \times N}$  中的  $N$  个列向量, 就可以构成  $N$  维欧氏空间中一个简单而直观、且完备的标准正交基。

## 2.2.4 矩阵

矩阵是由若干个数按行和列排列而成的二维阵列, 也可以说是若干个列矢量或行矢量的组合。因此矩阵不仅可以表示多维信号, 而且可以描述进行多维信号处理的线性系统。矩阵理论是多维信号处理的强有力数学工具, 其主要应用是用来表示线性变换或线性映射。如矩阵  $m \times n$  的矩阵  $\mathbf{A}$  可将  $\mathbf{R}^n$  空间的矢量  $\mathbf{x}$  映射为  $\mathbf{R}^m$  空间的矢量  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 。矩阵的乘积可以表示两种线性变换的组合; 线性方程组表示为矩阵形式非常简洁; 下面简要介绍矩阵理论中一些重要内容, 例如: 矩阵的运算、特征值与特征矢量、对角分解和奇异值分解等。

一个  $M$  行  $N$  列的矩阵  $\mathbf{X}$  可表示为:

$$\mathbf{X} = [x_{ij}]_{M \times N} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{M1} & x_{M2} & \cdots & x_{MN} \end{bmatrix} \quad (2-2-24)$$

其中的  $x_{ij}$  表示矩阵的元素,  $i$  表示行下标,  $j$  表示列下标。

### (1) 矩阵的一般运算法则

数乘:  $c\mathbf{X} = [cx_{ij}]_{M \times N} \quad (2-2-25a)$

加法:  $\mathbf{X} + \mathbf{Y} = [x_{ij} + y_{ij}]_{M \times N} \quad (2-2-25b)$

转置:  $\mathbf{X}^T = [x_{ji}]_{N \times M} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{M1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1N} & \cdots & x_{MN} \end{bmatrix} \quad (2-2-25c)$

共轭转置:  $\mathbf{X}^H = [x_{ji}^*]_{N \times M} = \begin{bmatrix} x_{11}^* & \cdots & x_{M1}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1N}^* & \cdots & x_{MN}^* \end{bmatrix} \quad (2-2-25d)$

相乘:  $\mathbf{X}\mathbf{Y} = [x_{ij}]_{M \times K} [y_{ij}]_{K \times N} = \left[ \sum_{k=1}^K x_{ik} y_{kj} \right]_{M \times N} \quad (2-2-25e)$

点积:  $\mathbf{X} \bullet \mathbf{Y} = [x_{ij}]_{M \times K} \bullet [y_{ij}]_{M \times K} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^K x_{ij} y_{ij} \quad (2-2-25f)$

### (2) 矩阵的内积

矩阵的内积有两种不同的定义方法。一种是将两个同样大小的矩阵, 例如  $M \times N$  的矩

阵  $\mathbf{X} = [x_{ij}]_{M \times N}$  和  $\mathbf{Y} = [y_{ij}]_{M \times N}$ ，看作是两个  $M \times N$  维的矢量，采用如上所述矢量内积定义的方式进行定义，即

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N x_{ij} \cdot y_{ij}^* \quad (2-2-26a)$$

其值是一个实数或复数。

另一种定义方法是，将两个行数相同的矩阵，例如  $\mathbf{X} = [x_{ij}]_{M \times N_1}$  和  $\mathbf{Y} = [y_{ik}]_{M \times N_2}$ ，分别看成是  $N_1$  和  $N_2$  个  $M$  维列矢量的集合，而将二者的内积定义为  $N_1 \cdot N_2$  对矢量的内积，即

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \left[ \sum_{i=1}^M x_{ij} \cdot y_{ik}^* \right]_{N_1 \times N_2} \quad j=1, 2, \dots, N_1; k=1, 2, \dots, N_2 \quad (2-2-26b)$$

内积运算所得结果是一个  $N_1 \times N_2$  的矩阵，其中各个元素的值为实数或复数值。

### (3) 矩阵的特征值与特征矢量

设  $\mathbf{A}$  为  $N \times N$  的矩阵，如果存在一个非零矢量  $\mathbf{v}$  和某个相应的常数  $\lambda$ ，满足

$$\mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \quad (2-2-27)$$

那么  $\lambda$  和  $\mathbf{v}$  分别称为  $\mathbf{A}$  的特征值和特征矢量。

此外，矩阵的迹等于特征值之和，矩阵的行列式值等于特征值之积，即

$$\text{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_i \lambda_i \quad \det(\mathbf{A}) = \prod_i \lambda_i$$

### (4) 正交矩阵与正交变换

正交变换： $N$  维欧氏空间(实内积空间)  $V^N$  中的线性变换  $T$ ，如果它满足  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle T\mathbf{x}, T\mathbf{x} \rangle$ ，则称  $T$  为正交变换。 $T$  为正交变换的充要条件是：对于  $V^N$  中任意两个矢量  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{y}$  的变换都有  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle T\mathbf{x}, T\mathbf{y} \rangle$ 。可以看出，正交变换具有内积不变性，而且对于标准正交矩阵  $\mathbf{T}$ ，正交变换不改变矢量的长度及矢量间的夹角。

正交矩阵：如果实数方阵  $\mathbf{Q} \in R^{N \times N}$  满足  $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}_{N \times N}$  或  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ ，那么  $\mathbf{Q}$  为正交矩阵；正交矩阵的列矢量都是两两正交的单位矢量。

### (5) 酉矩阵与酉变换

酉变换： $N$  维酉空间(复内积空间)  $V^N$  中的线性变换  $T$ ，如果满足  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle T\mathbf{x}, T\mathbf{x} \rangle$ ，则称  $T$  为酉变换。 $T$  为酉变换的充要条件是，对于  $V^N$  中任意两个向量  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{y}$  都有  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle T\mathbf{x}, T\mathbf{y} \rangle$ 。

酉矩阵：如果复数方阵  $\mathbf{Q} \in R^{N \times N}$  满足  $\mathbf{Q}^H \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^H = \mathbf{I}_{N \times N}$ ，那么  $\mathbf{Q}$  为酉矩阵；酉矩阵的逆也是酉矩阵，两个酉矩阵的乘积还是酉矩阵。



## (6) 正交变换和酉变换矩阵

$N$  维欧氏空间  $V^N$  中正交变换  $T$  在标准正交基下的变换矩阵为  $N \times N$  的正交矩阵;

$N$  维酉空间  $V^N$  中酉变换  $T$  在标准正交基下的变换矩阵为  $N \times N$  酉矩阵。

设  $\mathbf{Q} \in C^{N \times N}$  是  $N$  维酉空间  $V^N$  中完备的标准正交基下的酉变换矩阵, 它有  $\mathbf{Q}^H \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^H = \mathbf{I}_{N \times N}$ ; 那么对于任意  $N$  维矢量  $\mathbf{x} \in V^N$ , 其酉变换为  $\mathbf{y} = \mathbf{Q} \mathbf{x} \in V^N$ ,  $\mathbf{y}$  的逆变换为  $\mathbf{x} = \mathbf{Q}^H \mathbf{y}$ 。

**【例】**表示完备正交基下的  $N$  点离散傅立叶变换(DFT)的矩阵为:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j2\pi/N} & e^{-j4\pi/N} & \dots & e^{-j2\pi(N-1)/N} \\ 1 & e^{-j4\pi/N} & e^{-j8\pi/N} & \dots & e^{-j4\pi(N-1)/N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j2\pi(N-1)/N} & e^{-j4\pi(N-1)/N} & \dots & e^{-j2\pi(N-1)^2/N} \end{bmatrix} \quad (2-2-28)$$

如果忽略常数因子  $1/\sqrt{N}$ , 这个变换矩阵是一个酉矩阵。对于输入矢量  $\mathbf{x} \in V^N$  的  $N$  点 DFT 就是  $\mathbf{y} = \mathbf{Q} \mathbf{x} \in V^N$ , 重构原信号  $\mathbf{x}$  的  $N$  点逆 DFT 就是:  $\mathbf{x} = \mathbf{Q}^H \mathbf{y}$ 。

## (7) 基于正交矩阵和酉矩阵的对角矩阵分解

设非奇异方阵  $\mathbf{A} \in C^{N \times N}$  的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N \in C$ , 则存在酉矩阵  $\mathbf{Q}$ , 使得

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ & \lambda_2 & * & \vdots \\ & & \dots & * \\ & & & \lambda_N \end{bmatrix} \quad (2-2-29)$$

如果  $\mathbf{A}$  为实数矩阵, 则存在正交矩阵  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$ , 使得

$$\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \quad (2-2-30a)$$

或者等价地有

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N) \mathbf{Q}^T \quad (2-2-30b)$$

这就是实矩阵  $\mathbf{A}$  的正交对角分解。

如果  $\mathbf{A}$  为共轭对称矩阵(或实数对称矩阵), 即  $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$ , 并且其特征值都为实数, 即  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N \in R$ , 则存在酉矩阵(或正交矩阵)  $\mathbf{P}$ , 使得

$$\mathbf{P}^H \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \quad (2-2-31a)$$

等价地, 有矩阵  $\mathbf{A}$  的正交对角分解:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N) \mathbf{P}^H \quad (2-2-31b)$$

## (8) 矩阵的奇异值与奇异值分解

### ● 矩阵的奇异值

设  $\mathbf{A} \in C_r^{M \times N}$  是一个秩为非零整数  $r$  的  $M \times N$  复数矩阵, 则  $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$  为  $N \times N$  的共轭对称矩阵, 并且其秩与  $\mathbf{A}$  相同, 即  $\text{Rank}(\mathbf{A}^H \mathbf{A}) = \text{Rank} \mathbf{A}$ ; 设  $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$  的特征值为

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_N = 0$$

则称  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ ,  $i=1, 2, \dots, N$  为  $\mathbf{A}$  奇异值。由此可见  $\mathbf{A}$  的奇异值个数等于列数  $N$ , 其中非零奇异值的个数等于  $\text{Rank} \mathbf{A}$ 。最大及最小奇异值之比称为条件数, 可以用于表示矩阵  $\mathbf{A}$  的奇异性, 条件数越大, 矩阵越接近奇异。对于对称阵, 特征值等于奇异值。

### ● 矩阵的奇异值分解

设  $\mathbf{A} \in C_r^{M \times N}$  ( $r > 0$ ), 则存在  $M$  阶酉矩阵  $\mathbf{U}$  和  $N$  阶酉矩阵  $\mathbf{V}$ , 使得

$$\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2-2-32a)$$

其中  $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ , 而  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$  为  $\mathbf{A}$  的非零奇异值; 上式可改写为

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V}^H \quad (2-2-32b)$$

这就是  $\mathbf{A}$  的奇异值分解。通过比较可以看出, 特征值分解针对方阵, 而奇异值分解可以对任何矩阵进行分解, 二者都用于揭示矩阵或线性变换的一些重要特征。

## 2.2.5 连续波信号的空间表示

### (1) 连续波复信号的内积空间

设  $\mathbf{x}_1(t)$  和  $\mathbf{x}_2(t)$  为定义在某个区间  $[a, b]$  上的两个能量有限的连续波复信号, 二者的内积定义为

$$\langle \mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t) \rangle = \int_a^b \mathbf{x}_1(t) \mathbf{x}_2^*(t) dt \quad (2-2-33a)$$

内积的性质与(2-2-16)式矢量内积性质的表达式完全相同。

信号  $\mathbf{x}(t)$  的范数定义为  $l_2$  范数, 即

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \left[ \int_a^b |\mathbf{x}(t)|^2 dt \right]^{1/2} \quad (2-2-33b)$$

于是也有与前述多维酉空间中表达形式相同的三角不等式和 Cauchy-Schwartz 不等式成立:

$$\|\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t)\| \leq \|\mathbf{x}_1(t)\| + \|\mathbf{x}_2(t)\| \quad (2-2-34a)$$

$$|\langle \mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t) \rangle| \leq \|\mathbf{x}_1(t)\| \cdot \|\mathbf{x}_2(t)\| \quad (2-2-34b)$$

注: 当  $\mathbf{x}_2(t) = a \mathbf{x}_1(t)$  (其中  $a$  为任意复数) 时等式成立

## (2) 连续波复信号的正交展开

关于连续波复信号赋范内积空间的上述定义，也适用于 $(-\infty, \infty)$ 区间中能量有限信号，将这个空间记为 $\mathcal{C}$ 。

设 $\mathcal{C}$ 中有一个函数集 $\{\mathbf{f}_1(t), \mathbf{f}_2(t), \dots, \mathbf{f}_N(t)\}$ ，它的 $N$ 个复数函数都相互正交，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_n(t) \mathbf{f}_m^*(t) dt = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad m, n = 1, 2, \dots, N \quad (2-2-35)$$

那么这个函数集可构成 $\mathcal{C}$ 中一个标准正交基。对于 $\mathcal{C}$ 中某些信号 $\boldsymbol{\psi}(t)$ ，可以在这个正交基上展开，即

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \sum_{i=1}^N x_i \mathbf{f}_i(t) \quad (2-2-36)$$

其中 $x_i = \langle \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{f}_i(t) \rangle$ 是 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 在 $\mathbf{f}_i(t)$ 上的投影。

由(2-2-36)式可知，尽管这个正交基函数族可以表示无穷多个不同的函数 $\boldsymbol{\psi}(t)$ ，但是它能表示的函数不能涵盖 $\mathcal{C}$ 中所有的函数 $\mathbf{s}(t)$  ( $\forall \mathbf{s}(t) \in \mathcal{C}$ )；这就是说这个正交基是不完备的。

## (3) 通信信号的空间表示

采用有限个正交基函数不能构成整个能量有限复信号空间 $\mathcal{C}$ 的完备正交基。因此如果像(2-2-36)式那样采用只包含有限个正交基函数来表示 $\mathcal{C}$ 中的任意信号( $\forall \mathbf{s}(t) \in \mathcal{C}$ )，由于此正交基不完备而难免出现误差，即

$$\mathbf{s}(t) = \sum_{i=1}^N s_i \mathbf{f}_i(t) + \mathbf{e}(t) \quad (2-2-37)$$

其中 $\mathbf{e}(t)$ 为误差函数， $s_i = \langle \mathbf{s}(t), \mathbf{f}_i(t) \rangle$ 是 $\mathbf{s}(t)$ 在 $\mathbf{f}_i(t)$ 上的投影。

数字通信系统通常都只采用一种或几种固定的短时信号波形来表示各个信源符号，这些波形的形状在发送和接收过程中是基本上保持不变的，因此发送接收信号波形的有用信号部分总是可以采用这种不完备的正交基函数族准确地表示的；如果有误差，那就是引入了噪声或信号失真。

设一个通信系统中，发送端用一个相互正交的复函数族 $\{\mathbf{f}_1(t), \mathbf{f}_2(t), \dots, \mathbf{f}_N(t)\}$ 来表示该系统可能发送的 $M$ 种符号，其中第 $m$ 种符号的信号波形 $\mathbf{s}^{(m)}(t)$ 表示为

$$\mathbf{s}^{(m)}(t) = \sum_{i=1}^N s_i^{(m)} \mathbf{f}_i(t) \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (2-2-38)$$

其中 $s_i^{(m)}$ 是 $\mathbf{s}^{(m)}(t)$ 在基函数 $\mathbf{f}_i(t)$ 上的投影，即 $s_i^{(m)} = \langle \mathbf{s}^{(m)}(t), \mathbf{f}_i(t) \rangle$ 。显然采用这些正交投影所构成的 $N$ 维矢量 $\mathbf{s}^{(m)} \in [s_1^{(m)} \quad s_2^{(m)} \quad \dots \quad s_N^{(m)}]^T$ 就是 $\mathbf{s}^{(m)}(t)$ 的一种等价的表示，即有限维空间表示。

信号经信道传输后，相应的接收信号波形 $\mathbf{r}(t)$ 也可以在这个正交基上展开，但因为信道传输中存在信号失真和引入加性高斯白噪声， $\mathbf{r}(t)$ 中肯定包含有这个不完备正交基无法表现的部分，即除了正交展开式之外，还要加上一个误差函数部分，即

$$\mathbf{r}^{(m)}(t) = \sum_{i=1}^N s_i^{(m)} \mathbf{f}_i(t) + \mathbf{e}(t) \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (2-2-39)$$

如果信道传输引起的信号失真可忽略不计，只是引入高斯白噪声，则  $\mathbf{r}^{(m)}(t)$  可表示为：

$$\mathbf{r}^{(m)}(t) = c \sum_{i=1}^N s_i^{(m)} \mathbf{f}_i(t) + \mathbf{v}(t) = \sum_{i=1}^N [cs_i^{(m)} + v_i] \mathbf{f}_i(t) \quad (2-2-40a)$$

其中复数  $c$  为信道增益因子； $\mathbf{v}(t)$  就是信道引入的高斯白噪声，也就是  $\mathbf{r}^{(m)}(t)$  在这个正交基上展开时出现的误差函数； $v_i$  是  $\mathbf{v}(t)$  在基函数  $\mathbf{f}_i(t)$  上的投影，即  $v_i = \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{f}_i(t) \rangle$ ；于是  $\mathbf{v}(t)$  的空间表示为  $[v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N]^T$ 。于是接收信号的空间矢量表示为：

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(m)} &= [r_1^{(m)} \ r_2^{(m)} \ \dots \ r_N^{(m)}]^T \\ &= c [s_1^{(m)} \ s_2^{(m)} \ \dots \ s_N^{(m)}]^T + [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N]^T \end{aligned} \quad (2-2-40b)$$

从(2-2-40)式可见，接收信号中的有用信号部分与发射信号的基函数表示完全相对应，只差一个乘性因子  $c$ ，而正交展开误差函数部分正是信道引入的噪声。显然，利用如上所述接收信号的空间矢量表示形式便于进行符号判决。在无信道噪声时对应于  $M$  种发送符号的接收信号矢量  $\{\mathbf{r}^{(m)}\}$  是分布在  $N$  维空间中  $M$  个固定的点上；而有噪声时  $\{\mathbf{r}^{(m)}\}$  扩散到标准符号矢量端点的周围，因此可以在这个二维空间中基于最小欧氏距离准则进行符号判决。

其实采用两个正交基函数

$$f_1(t) = g(t) \cos(\omega_c t) \quad f_2(t) = g(t) \sin(\omega_c t) \quad (2-2-41)$$

就可以许多种数字调制方式的带通型发送信号的波形；其中  $g(t)$  是一个带宽为  $W$  赫兹的低通型短时实信号波形，称为符号成形波； $\omega_c$  为调制载波的角频率， $\omega_c > 2\pi W$ 。例如：QPSK 调制所得带通信号的四种符号波形的复信号形式分别为： $\mathbf{s}^{(1)}(t) = f_1(t)$ 、 $\mathbf{s}^{(2)}(t) = j f_2(t)$ 、 $\mathbf{s}^{(3)}(t) = -f_1(t)$  和  $\mathbf{s}^{(4)}(t) = -j f_2(t)$ ；它们在正交基函数族  $\{f_1(t), f_2(t)\}$  上的投影分别为： $\mathbf{s}^{(1)} = 1$ 、 $\mathbf{s}^{(2)} = j$ 、 $\mathbf{s}^{(3)} = -1$  和  $\mathbf{s}^{(4)} = -j$ ；这就将这四种带通信号波形映射为二维空间中四个点，即四个复数值。这就是连续波信号的空间表示。

当然，也可以采用  $M$  个相互正交的基带波形  $g_1(t)$ 、 $g_2(t)$ 、 $\dots$ 、 $g_M(t)$  或它们载波调制信号波形  $g_1(t) e^{j\omega_c t}$ 、 $g_2(t) e^{j\omega_c t}$ 、 $\dots$ 、 $g_M(t) e^{j\omega_c t}$ ，分别地直接表示  $M$  种发送符号的波形  $\{\mathbf{s}^{(m)}(t)\}$ ； $m=1, 2, \dots, M$ ；对应地也有  $M$  个  $M$  维矢量的等价表示形式。这只是上述介绍在  $N=M$  时的一个特例；所对应的数字调制方式称为  $M$  进制正交波形调制。

## 2.3 描述信号和系统最常用的两种正交变换

本节介绍通用性更强的两种正交变换--付立叶变换和  $Z$  变换的基本概念和主要性质。

### 2.3.1 付立叶变换

#### (1) 周期性连续信号的付立叶变换

设  $\mathbf{s}(t)$  是一个周期  $T$  的复信号  $\mathbf{s}(t)$ ，其付立叶级数变换定义为

$$S_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad k = -\infty, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (2-3-1a)$$

其中  $\omega_0 = 2\pi/T$  是基频的角频率。其逆变换定义为

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k e^{jk\omega_0 t} \quad (2-3-1b)$$

其中付立叶基函数族  $\{e^{jk\omega_0 t}, k = -\infty, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty\}$  构成一个完备的正交基。

## (2) 能量有限连续信号的付立叶变换

定义在  $(-\infty, \infty)$  区间的能量有限复信号  $s(t)$  的付立叶变换定义为

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2-3-2a)$$

其逆变换为

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2-3-2b)$$

值得注意的是，其中的付立叶基函数族  $\{e^{j\omega t}, \omega \in R\}$  并不属于平方可积函数空间，但是它在复内积函数空间中具有与正交性类似的特性，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_i t} e^{-j\omega_k t} dt = \delta(\omega_i - \omega_k) = \begin{cases} \infty & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad (2-3-2c)$$

这种付立叶变换可以从周期性函数的付立叶级数变换在  $T \rightarrow \infty$  的极限条件下推出；在周期  $T$  为任意大的有限值时相应的基函数族都还是平方可积函数，并构成完备的正交基。

## (3) 周期性离散复信号的付立叶变换(DFT)

- **定义：** 设  $\{s(n), n = 0, 1, 2, \dots, N-1\}$  是周期为  $N$  个样点的离散复信号一个周期的样点序列，其离散付立叶变换(简称 DFT)定义为

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-jnk\omega_0} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2-3-3a)$$

其中  $\omega_0 = 2\pi/N$  是基频的角频率。其逆变换(IDFT)定义为

$$s(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) e^{jkn\omega_0} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2-3-3b)$$

如果  $\{s(n), n = 0, 1, 2, \dots, N-1\}$  只是一个长度为  $N$  的样点序列，那么将它看作是周期性样点序列的一个周期。

### ● DFT 的一些重要性质

DFT 最常用的几种性质如表 2-3-1 所示。

表 2-3-1 DFT 的一些重要性质

性质	时域信号 $\mathbf{s}(n)$ $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$	N 点 DFT $\rightarrow$ $\leftarrow$ N 点 IDFT	频域频谱 $\mathbf{S}(k)$ $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$
循环移位性	$\tilde{\mathbf{s}}(n) = \mathbf{s}((n+m)_{\text{mod}N})$		$\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{k}) = \mathbf{S}(k) e^{-jm\omega_0}$
	$\check{\mathbf{s}}(n) = \mathbf{s}(n) e^{jm\omega_0}$		$\check{\mathbf{S}}(\mathbf{k}) = \mathbf{S}(k+m)$
共轭对称性	$\text{Im}[\mathbf{s}(n)] = 0$ 实信号		$\mathbf{S}(k) = \mathbf{S}^*(N-k)$ 共轭对称
	$\mathbf{s}(n) = \mathbf{s}^*(N-n)$		$\text{Im}[\mathbf{S}(k)] = 0$
	$\text{Re}[\mathbf{s}(n)] = 0$ 虚信号		$\mathbf{S}(k) = -\mathbf{S}^*(N-k)$ 共轭反对称
	$\mathbf{s}(n) = -\mathbf{s}^*(N-n)$		$\text{Re}[\mathbf{S}(k)] = 0$
循环卷积性	$\mathbf{s}_1(n) \otimes \mathbf{s}_2(n)$ 卷积		$\mathbf{S}_1(k) \mathbf{S}_2(k)$ 相乘
	$\mathbf{s}_1(n) \mathbf{s}_2(n)$ 相乘		$\mathbf{S}_1(k) \otimes \mathbf{S}_2(k)$ 卷积
$\delta$ 函数的 DFT	$\mathbf{s}(n) = \delta(n)$		$\mathbf{S}(k) \equiv 1; k = 0, 1, 2, \dots, N-1$
	$\mathbf{s}(n) \equiv 1/N; n = 0, 1, 2, \dots, N-1$		$\mathbf{S}(k) = \delta(k)$
$M:1$ 下采样 ( $N/M = \text{整数}$ ) $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$	$\ddot{\mathbf{s}}(n) = \begin{cases} \mathbf{s}(n) & (n)_{\text{mod}M} = 0 \\ 0 & (n)_{\text{mod}M} \neq 0 \end{cases}$ ( $M:1\downarrow$ )		$\ddot{\mathbf{S}}(k) = \sum_{r=0}^{N/M-1} \mathbf{S}((k+rM)_{\text{mod}N})$ 循环移位的 $N/M$ 个频谱相加
	$\ddot{\mathbf{s}}(n) = \sum_{r=0}^{N/M-1} \mathbf{s}((n+rM)_{\text{mod}N})$ 循环移位的 $N/M$ 个信号相加		$\ddot{\mathbf{S}}(k) = \begin{cases} \mathbf{S}(k) & (k)_{\text{mod}M} = 0 \\ 0 & (k)_{\text{mod}M} \neq 0 \end{cases}$ ( $M:1\downarrow$ )
相邻两样点间插 $M-1$ 个 0 $n = 0, 1, 2, \dots, NM-1$ $k = 0, 1, 2, \dots, NM-1$	$\check{\mathbf{s}}(n) = \begin{cases} \mathbf{s}(n/M) & (n)_{\text{mod}M} = 0 \\ 0 & (n)_{\text{mod}M} \neq 0 \end{cases}$ 相邻两个样点间插 $M-1$ 个 0		$\check{\mathbf{S}}(k) = \sum_{r=0}^{M-1} \mathbf{S}(k + \frac{rN}{M})$ 循环移位的 $M$ 个频谱相加
	$\check{\mathbf{s}}(n) = \sum_{r=0}^{N/M-1} \mathbf{s}((n+rM)_{\text{mod}N})$ 循环移位的 $M$ 个信号相加		$\check{\mathbf{S}}(k) = \begin{cases} \mathbf{S}(k/M) & (k)_{\text{mod}M} = 0 \\ 0 & (k)_{\text{mod}M} \neq 0 \end{cases}$ 相邻两个频点间插 $M-1$ 个 0
帕塞伐尔定理	$\sum_{n=0}^{N-1}  \mathbf{s}(n) ^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1}  \mathbf{S}(k) ^2$		

### 2.3.2 Z 变换

类似于拉氏变换是连续时间傅里叶变换的推广一样，Z 变换是 DFT 的推广。DFT 是将能量有限或周期性的离散信号映射到复指数  $e^{-j\omega}$  域的变换，而 Z 变换将任意的离散信号映射到复数 Z 平面， $z = e^{-r-j\omega}$ ；因此，DFT 可看作是 Z 变换的特例，即只在单位圆上取值的情况。

#### (1) 定义

设  $\{\mathbf{s}(n), n = -\infty, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty\}$  是一个离散复数序列，其 z 变换定义为

$$\mathbf{S}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{s}(n) z^{-n} \quad z \in \mathbb{C}, \text{ 并满足 } R_{s-} < |z| < R_{s+} \quad (2-3-4a)$$

其中  $R_{s-}$  和  $R_{s+}$  分别为左边序列  $\{\mathbf{s}(n) \mid n = -\infty, \dots, -1\}$  和右边序列  $\{\mathbf{s}(n) \mid n = 0, 1, 2, \dots, \infty\}$  的收敛半径，即  $|\mathbf{S}(z)|_{R_{s-} < |z| < R_{s+}} < \infty$ 。

逆变换：由于  $\{s(n)\}$  的  $z$  变换  $S(z)$  就是以  $\{s(n)\}$  为系数的多项式，因此逆变换可以采用部分分式分解法、围积分法或幂级数法求解。例如基于围线积分法的求解式为：

$$s(n) = \oint_C S(z)z^{n-1}dz \quad C \text{ 是处于收敛域内包围了坐标原点的封闭曲线} \quad (2-3-4b)$$

点的封闭曲线

### (2) Z 变换与付立叶变换的联系

当  $z = e^{j\omega}$ ，即处于  $z$  平面的单位圆上时， $S(z)$  就是离散序列  $\{s(n)\}$  的付立叶变换  $S(\omega)$ ；当  $z = e^{j2\pi k/N}$ ， $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$  时， $S(z)$  就是周期为  $N$  的周期性序列  $\{s(n)\}$  的  $N$  点 DFT：

$$S_{DFT}(k) = S(z) \Big|_{z=\exp(j2\pi k/N)} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2-3-5)$$

一个线性系统的  $Z$  变换  $H(z)$  称为其系统函数，系统的时频特性取决于系统函数的零、极点的分布情况； $H(e^{-j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$  就是系统的频率响应函数，也称传递函数。

### (3) Z 变换的一些重要性质

表 2-3-2 Z 变换的一些重要性质

性 质	序列 $x(n)$ 、 $y(n)$	Z 变换 $X(z)$ 、 $Y(z)$	收敛域
序列移位	$x(n-n_0) \quad n_0 > 0$	$z^{-n_0} X(z)$	$R_{x-} <  z  < R_{x+}$
时间反转	$x(-n)$	$X(1/z)$	$R_{x+} <  z  < R_{x-}$
乘指数序列	$a^n x(n) \quad a \text{ 为常数}$	$X(a^{-1}z)$	$ a  R_{x-} <  z  <  a  R_{x+}$
Z 域微分	$n x(n)$	$-z dX(z) / dz$	$R_{x-} <  z  < R_{x+}$
共轭序列	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	$R_{x-} <  z  < R_{x+}$
时域卷积	$w(n) = x(n) * y(n)$	$W(z) = X(z) Y(z)$	$R_{w-} <  z  < R_{w+}$ $R_{w-} = \min[R_{x-}, R_{y-}]$ $R_{w+} = \min[R_{x+}, R_{y+}]$
变换域卷积	$w(n) = x(n) * y(n)$	$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(v) Y\left(\frac{z}{v}\right) \frac{dv}{v}$	$R_x R_{y-} <  z  < R_{x+} R_{y+}$ $\max[R_{x-},  z /R_{y+}] <  v  < \min[R_{x+},  z /R_{y-}]$
初值定理	$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$		$x(n)$ 是因果序列
终值定理	$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow \infty} (z-1)X(z)$		$X(z)$ 的极点除有一个一阶极点在单位圆上之外，其余都在单位圆内
帕塞伐尔定理	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(v) Y^*\left(\frac{z}{v^*}\right) \frac{dv}{v}$		$\max[R_{x-}, 1/R_{y+}] <  v  < \min[R_{x+}, 1/R_{y-}]$ $R_{x-} R_{y-} < 1 < R_{x+} R_{y+}$

### (4) Z 变换用于描述线性系统

设一个离散复信号样点序列  $\{x(n), n = 0, 1, 2, \dots, \infty\}$  通过一个单位冲激响应为  $\{h(n), n = -n_0, -n_0 + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty\}$  的复系数离散线性系统所产生的输出为  $\{y(n)$ ，

$n = -n_0, -n_0 + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$ }; 它们的  $z$  变换分别为  $X(z)$ 、 $H(z)$  和  $Y(z)$ , 则有

$$Y(z) = H(z) X(z) \quad (2-3-6)$$

其中  $H(z)$  称为系统函数,  $H(e^{j\omega})$  为频率响应函数, 也称为传输函数。

只要  $\{h(n)\}$  中  $n_0$  为有限大的正整数, 而且  $H(z)$  可表示为有限个有限阶多项式的有理函数 (包括加、减、乘、除), 系统就是可实现的。

当系统函数  $H(z)$  的极点都位于单位圆之内时该系统才是稳定的; 但其零点的位置没有这样的限制, 既可在单位圆内, 也可在单位圆外。如果系统函数中所有的零点都在单位圆内或单位圆外, 该系统分别称为最小相位系统和最大相位系统; 如果单位圆内外都有零点, 该系统称为混合相位系统。

全通滤波器是一种幅-频特性为恒定值的滤波器; 其系统函数  $H_{ap}(z)$  的特点是: 其单位圆内每个极点都对应有一个与它关于单位圆共轭对称的单位圆外零点。因此最低阶的全通滤波器的系统函数为:  $H_{ap}(z) = (z^{-1} - z_0) / (1 - z_0^* z^{-1})$

将一个混合相位系统的系统函数  $H(z)$  与由它单位圆外零点、共轭极点所构成的全通滤波器系统函数  $H_{ap}(z)$  相乘, 所得系统函数是一个最小相位系统, 即

$$H_{\min}(z) = H(z) H_{ap}(z) \quad (2-3-7)$$

该最小相位系统  $H_{\min}(z)$  的幅-频特性与原系统  $H(z)$  的相同, 但其相-频特性不同于  $H(z)$  的。

任意一个最小相位系统  $H_{\min}(z)$  的逆系统  $1/H_{\min}(z)$  是一种稳定的因果系统, 并可采用差分方程方式直接实现。

例如: 系统函数  $H(z) = (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) / (1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2})$ , 其输入  $x(n)$  与输出  $y(n)$  关系的差分方程为:

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + b_1 y(n-1) + b_2 y(n-2) \quad (2-3-8)$$

## 2.4 随机变量及其统计特性

### 2.4.1 随机变量及其函数的概率分布

#### (1) 概率分布函数和概率密度函数

随机变量  $X$  的概率分布函数(CDF), 即累积分布函数定义为

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (2-4-1a)$$

其概率密度函数(PDF)定义为:

$$p(x) = dF(x) / dx \quad (2-4-1b)$$



$n$  个随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的联合 CDF, 等价于  $n$  维随机矢量  $\mathbf{X}=[X_1 X_2 \dots X_n]$  的 CDF 为:

$$F(\mathbf{X})=F(x_1, x_2, \dots, x_n)=P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) \quad (2-4-2a)$$

其联合 PDF 定义为:

$$p(\mathbf{X})=p(x_1, x_2, \dots, x_n)=\frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2-4-2b)$$

在给定随机变量  $X_2$  取值为  $x_2$  的情况下, 随机变量  $X_1$  的条件 PDF 为:

$$p(x_1 | x_2) = p(x_1, x_2) / p(x_2) \quad (2-4-3)$$

其中  $p(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2) dx_1$  为  $X_2$  的边沿 PDF,  $p(x_1, x_2)$  为  $X_1$  和  $X_2$  的联合 PDF。

复数随机变量的 CDF 和 PDF 就是实部和虚部两个随机变量的联合 CDF 和 PDF, 即看作二维随机矢量的 CDF 和 PDF。

## (2) 随机变量函数的概率分布

设随机变量  $X$  的 PDF 为  $p_X(x)$ ,  $Y$  为  $X$  的函数  $Y=g(X)$ , 则  $Y$  的 PDF 可以由  $p_X(x)$  求得。

例如:  $Y=g(X)=aX+b$ , 则  $Y$  的 PDF 为:

$$p_Y(y) = \frac{1}{a} p_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad (2-4-4)$$

又如:  $Y=g(X)=aX^2+b$ , 则  $Y$  的 CDF 为:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(aX^2 + b \leq y) = P(|X| \leq \sqrt{(y-b)/a}) \\ &= F_X(\sqrt{(y-b)/a}) - F_X(-\sqrt{(y-b)/a}) \end{aligned} \quad (2-4-5a)$$

将它微分即得到其 PDF

$$p_Y(y) = \frac{p_X(\sqrt{(y-b)/a})}{2a\sqrt{(y-b)/a}} + \frac{p_X(-\sqrt{(y-b)/a})}{2a\sqrt{(y-b)/a}} \quad (2-4-5b)$$

如果两个  $n$  维随机矢量  $\mathbf{X}=[X_1 X_2 \dots X_n]$  和  $\mathbf{Y}=[Y_1 Y_2 \dots Y_n]$  存在如下线性关系

$$Y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2-4-6a)$$

$$\text{或} \quad X_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} Y_j \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2-4-6b)$$

其矩阵形式为:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad \text{或} \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y} \quad (2-4-6c)$$

其中  $\mathbf{A}=[a_{ij}]_{n \times n}$ ,  $\mathbf{A}$  的逆矩阵  $\mathbf{A}^{-1}=[b_{ij}]_{n \times n}$ 。那么  $\mathbf{Y}$  的 PDF 为:

$$p_Y(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{|\det A|} p_X(x_1 = \sum_{j=1}^n b_{1j} y_j, x_2 = \sum_{j=1}^n b_{2j} y_j, \dots, \sum_{j=1}^n b_{nj} y_j) \quad (2-4-7)$$

## 2.4.2 随机变量的统计特性

### (1) $n$ 阶矩

单个随机变量  $X$ ，设其 PDF 为  $p(x)$ ，那么其  $n$  阶矩定义为：

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx \quad (2-4-8)$$

其期望值（或称均值）即一阶矩，定义为：

$$m_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx \quad (2-4-9)$$

其方差，即二阶中心矩定义为：

$$\sigma_x^2 = E[(X - m_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx \quad (2-4-10)$$

并有关系式  $\sigma_x^2 = E[(X - m_x)^2] = E(X^2) - m_x^2$ 。

两个随机变量  $X_1$  和  $X_2$ ，设其联合 PDF 为  $p(x_1, x_2)$ ，那么其联合矩定义为：

$$E(X_1^k X_2^n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^k x_2^n p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (2-4-11)$$

当  $k = n = 1$  时即  $E(X_1 X_2)$  称为  $X_1$  和  $X_2$  的互相关；如果  $E(X_1 X_2) = E(X_1) \cdot E(X_2)$ ，则  $X_1$  与  $X_2$  不相关。

$X_1$  与  $X_2$  的联合中心矩定义为：

$$E[(X_1 - m_1)^k (X_2 - m_2)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_1)^k (x_2 - m_2)^n p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (2-4-12)$$

当  $k = n = 1$  时此联合中心矩称为  $X_1$  和  $X_2$  的协方差；如果  $E[(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)] = 0$ ，则随机变量  $X_1$  与  $X_2$  相互正交。可以看出，当随机变量均值为零时，不相关与正交等价。

$n$  个随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ，设其中两个随机变量  $X_i$  和  $X_j$  的联合 PDF 为  $p(x_i, x_j)$ ，那么  $X_i$  和  $X_j$  的联合矩定义为：

$$E(X_i^k X_j^n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i^k x_j^n p(x_i, x_j) dx_i dx_j \quad (2-4-13)$$

当  $k = n = 1$  时此联合矩称为  $X_i$  和  $X_j$  的互相关；若  $E(X_i X_j) = E(X_i) \cdot E(X_j)$  则二者不相关。

$X_i$  和  $X_j$  的联合中心矩定义为：

$$E[(X_i - m_i)^k (X_j - m_j)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_i)^k (x_j - m_j)^n p(x_i, x_j) dx_i dx_j \quad (2-4-14)$$

当  $k = n = 1$  时，此联合中心矩称为  $X_i$  和  $X_j$  的协方差，记为  $\mu_{ij}$ ；并有关系式： $\mu_{ij} = E(X_i X_j) - m_i m_j$ 。当  $\mu_{ij} = 0$  时  $X_i$  和  $X_j$  相互正交。

## (2) 随机变量的统计独立性

$n$  个连续随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立的充分必要条件是：对于实数域勒贝格测度几乎处处都有：

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1) \cdot F(x_2) \dots F(x_n) \quad (2-4-15a)$$

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(x_1) \cdot p(x_2) \dots p(x_n) \quad (2-4-15b)$$

即它们的联合 CDF 和 PDF 都是变量可分离的函数。

$n$  个离散随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立的充分必要条件是：对于任意的  $n$  个一维波雷尔集  $A_i = (-\infty, a_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 其联合概率有：

$$P(x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n P(x_i \in A_i) \quad (2-4-15c)$$

统计独立的任意两个随机变量必然是互不相关的，但互不相关的两个随机变量不一定相互独立；当二者都是高斯随机变量时不相关即相互独立。

## (3) 偏斜度与峭度

**偏斜度(skewness)**是衡量一种随机变量或一个数据集合偏离对称性的一种量度；设某个随机变量的一组抽样为  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ , 那么其偏斜度定义为

$$\text{skewness} = \sum_{i=1}^N (x_i - m_x)^3 / [(N-1)\sigma_x^3] \quad (2-4-16)$$

其中  $m_x$  和  $\sigma_x$  分别表示这组样本的均值和标准差。对称分布随机变量抽样数据的偏斜度都近似等于 0。

**峭度(kurtosis)**是衡量一种随机变量或一个数据集合分布分散性的一种量度；设某个随机变量的一组抽样为  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ , 那么其峭度定义为

$$\text{kurtosis} = \sum_{i=1}^N (x_i - m_x)^4 / [(N-1)\sigma_x^4] \quad (2-4-17)$$

其中  $m_x$  和  $\sigma_x$  分别表示这组样本的均值和标准差。高斯随机变量的抽样数据的峭度近似等于 3；而双指数分布随机变量的峭度近似等于 6；在  $[0, 1]$  区间中均匀分布的随机变量抽样数据的峭度将近似等于 0。

### 2.4.3 随机变量的特征函数

随机变量  $X$  的特征函数定义为：

$$\psi_X(jv) \equiv E(e^{jvX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx} p(x) dx \quad (2-4-18a)$$

即概率密度函数的傅立叶变换。概率密度函数为特征函数的逆傅立叶变换：

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jvx} \psi_X(jv) dv \quad (2-4-18b)$$

注：此处傅里叶变换及反变换的定义与常规定义的指数符号有一点差异

由此可见，随机变量的特征函数可完全确定其概率密度函数，同时利用特征函数可以方便地求出  $n$  阶矩。如果随机变量的  $n$  阶矩存在，则通过在  $v=0$  处计算特征函数的  $n$  阶导数，可得到  $n$  阶矩

$$E(X^n) = \frac{d^n \psi_X(jv)}{d^n v} \Big|_{v=0} = j^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{jvx} p(x) dx \Big|_{v=0} \quad (2-4-19)$$

#### 2.4.4 随机变量截尾概率的上界

##### (1) 契比雪夫不等式

设  $X$  是一个均值为  $m_x$ 、方差为  $\sigma_x^2$ ，那么以  $\delta$  值截尾的尾部概率满足不等式

$$P(|X - m_x| \geq \delta) \leq \sigma_x^2 / \delta^2 \quad (2-4-20)$$

此式所给出的契比雪夫界是一个很松的上界。

##### (2) 契尔诺夫边界

对于给定的截尾值  $\delta$ ，离散或连续随机变量  $Y$  的单边截尾概率上界为

$$P(Y \geq \delta) \leq e^{-\hat{\delta}} E(e^{\hat{\delta}Y}) \quad (2-4-21a)$$

其中  $\hat{\delta}$  是下述方程的解：

$$E(Ye^{\hat{\delta}Y}) - \hat{\delta}E(e^{\hat{\delta}Y}) = 0 \quad (2-4-21b)$$

契尔诺夫边界是一个很紧的上界，这容易用高斯随机变量的  $Q(X)$  函数验证。

#### 2.4.5 中心极限定理

**【中心极限定理】** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为  $n$  个统计独立且同分布的随机变量，它们的均值  $\mu$  和方差  $\sigma^2$  为有限值，那么  $Y = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) / (\sqrt{n}\sigma)$  所定义的随机变量  $Y$  当  $n \rightarrow \infty$  时趋于均值为零、方差等于 1 的高斯随机变量。

从这个定理不难推得，如果  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  是  $n$  个统计独立的高斯随机变量，其均值都为  $\mu$ ，方差都为  $\sigma^2$ ，那么  $U = \sum_{i=1}^n Y_i / n$  所定义的随机变量  $U$  仍为均值等于  $\mu$  的高斯随机变量，而方差减小为  $\sigma^2 / n$ ；当  $n \rightarrow \infty$  时  $U$  趋于一点式分布随机变量，即其 PDF 为  $\delta(u - \mu)$ 。

#### 2.4.6 一些重要随机变量的概率分布

##### (1) 二项式分布

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  都是取值为 0 或 1、相互独立的随机变量， $P(X_i = 1) = p$ ， $P(X_i = 0) = 1 - p$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，那么  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  为二项式分布随机变量； $Y = k$  的概率为

$$P(Y = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (2-4-22)$$

$Y$  的均值为  $E(Y) = np$ ，方差为  $\sigma^2 = np(1-p)$ 。

【例】当  $p=0.55$  时二项式随机变量  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_7$  的概率分布如图 2-4-1 所示。

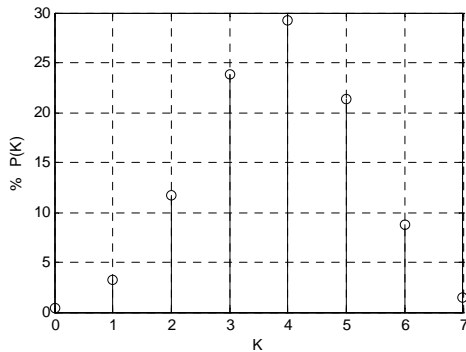


图 2-4-1 当  $p=0.55, X_i=0/1$  时  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_7$  的分布

如果  $X_1, X_2, \dots, X_n$  都为取值  $\pm 1$  的二点式分布随机变量，即  $P(X) |_{X=1} = p, P(X) |_{X=-1} = 1-p$ ；那么  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  所定义的二项式分布随机变量的概率分布为：

$$P(Y = k) = \frac{n!}{[(n+k)/2]! [(n-k)/2]!} p^{(n+k)/2} (1-p)^{(n-k)/2} \quad (2-4-23)$$

$$k = -n, 2-n, 4-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-2, n$$

$Y$  的均值为  $E(Y) = 2np - n$ ，方差为  $\sigma^2 = 4np(1-p)$ 。

【例】当  $X_i$  都为取值  $\pm 1$  的对称二点式分布  $P(X) |_{X=1} = P(X) |_{X=-1} = 0.5, n=8$ ，则随机变量  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_8$  的概率分布如表 2-4-1 和图 2-4-2 所示。

表 2-4-1  $p=0.5, n=8, X_i = \pm 1$  时  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  的概率分布

$k$	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
$p^{(n+k)/2} (1-p)^{(n-k)/2}$	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039
$\frac{n!}{[(n+k)/2]! [(n-k)/2]!}$	1	8	28	56	70	56	28	8	1
$P(Y)  _{Y=k}$	0.0039	0.0312	0.1094	0.2188	0.2774	0.2188	0.1094	0.0312	0.0039

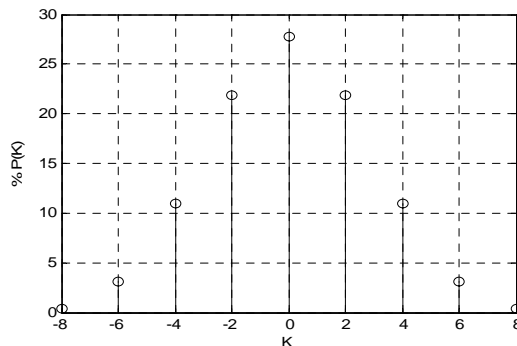


图 2-4-2 当  $p=0.5, X_i = \pm 1$  时  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_8$  的概率分布

由上述结果可以推知，若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  都为取值  $\pm 1$  的对称二点式分布， $P(X) |_{X=1} = P(X) |_{X=-1} = 0.5$ ，则当  $n \rightarrow \infty$  时随机变量  $U = (X_1 + X_2 + \dots + X_n) / \sqrt{n}$  趋于一个均值为零、方差等于 1 的高斯分布随机变量。

## (2) 均匀分布

$[a, b]$  区间的均匀分布随机变量  $X$ , 其 PDF 为  $p(X)=1/(b-a)$ , 均值为:

$$E(X) = (a+b)/2 \quad (2-4-24a)$$

方差为:

$$\sigma^2 = (a-b)^2 / 12 \quad (2-4-24b)$$

## (3) 高斯分布

均值为  $m_x$  方差为  $\sigma^2$  的高斯随机变量  $X$ , 其 PDF 为:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m_x)^2/2\sigma^2} \quad (2-4-25a)$$

其 CDF 为:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-(u-m_x)^2/2\sigma^2} du = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x-m_x}{\sqrt{2}\sigma}\right) \quad (2-4-25b)$$

其中误差函数定义为:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erfc}(x) \quad (2-4-25c)$$

其中的  $\operatorname{erfc}(x)$  为互补误差函数。

**高斯 PDF 的截尾面积函数记为  $Q(x)$ , 即**

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2/2} dt, \quad x > 0 \quad (2-4-25d)$$

显然, 它与互补误差函数的关系是

$$Q(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (2-4-25e)$$

**高斯分布随机变量有三个特点:**

- ① 其 PDF 由均值  $m_x$  与方差  $\sigma^2$  唯一决定;
- ② 如果两个高斯随机变量互不相关则它们就相互独立;
- ③ 高斯分布还具有线性不变性, 多个高斯分布随机变量经过线性加权组合所得随机变量, 仍为高斯分布随机变量。

**高斯随机变量的特征函数为:**

$$\psi_x(jv) = e^{jvm_x - \sigma^2 v^2 / 2} \quad (2-4-25d)$$

## (4) 多变量高斯分布

$n$  维高斯分布随机矢量  $[X_1, X_2, \dots, X_n]$ , 设其均值矢量为  $\mathbf{m}_x = [m_1, m_2, \dots, m_n]$ , 其协方差矩阵为  $\boldsymbol{\mu} = [\mu_{ij}]_{n \times n}$ , 则其联合 PDF 为:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det \boldsymbol{\mu})^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{X} - \mathbf{m}_x)^T \boldsymbol{\mu}^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{m}_x)\right] \quad (2-4-26)$$

**(5) 卡尔平方( $\chi^2$ )分布**

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为  $n$  个相互独立的高斯随机变量, 其方差都等于  $\sigma^2$ , 均值分别为

$m_1, m_2, \dots, m_n$ ; 那么  $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$  所定义的随机变量  $Y$  服从  $n$  个自由度的  $\chi^2$  分布。

定义  $s^2 = m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2$  为非中心参量, 则根据  $s^2$  是否等于零可将  $\chi^2$  分布分为有中心的和非中心的两大类。

● **中心  $\chi^2$  分布 ( $s^2=0$ )**

中心  $\chi^2$  分布随机变量  $Y$  的特征函数和 PDF 分别为:

$$\psi_Y(j\nu) = \frac{1}{(1 - j2\nu\sigma^2)^{n/2}} \quad (2-4-27)$$

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sigma^n 2^{n/2} \Gamma(n/2)} y^{n/2-1} e^{-y^2/2\sigma^2} \quad (y \geq 0) \quad (2-4-28a)$$

其中  $\Gamma$  函数

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt \quad p > 0 \quad (2-4-28b)$$

注: 当  $p$  为正整数时,  $\Gamma(p) = (p-1)!$ , 此外  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$

$Y$  的一阶矩、二阶矩和方差分别为:

$$E(Y) = n\sigma^2 \quad E(Y^2) = (2n + n^2)\sigma^4 \quad \sigma_y^2 = 2n\sigma^4 \quad (2-4-29)$$

当  $n=2$  时中心  $\chi^2$  分布随机变量  $Y$  的 PDF 为指数分布

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-y^2/2\sigma^2}, y \geq 0 \quad (2-4-30)$$

当  $n=1$  时中心  $\chi^2$  分布随机变量  $Y$  的 PDF 为

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y} \sigma} e^{-y^2/2\sigma^2}, y \geq 0 \quad (2-4-31)$$

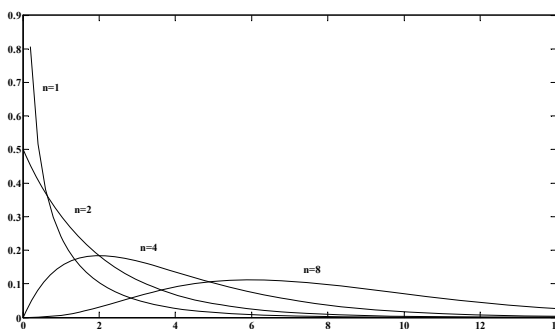


图 2-4-3 当  $\sigma^2 = 1$  时  $n$  个自由度的  $\chi^2$  分布的 PDF

● **非中心  $\chi^2$  分布 ( $s^2 \neq 0$ )**

$Y$  的特征函数和 PDF 分别为:

$$\psi_Y(j\nu) = \frac{1}{(1 - j2\nu\sigma^2)^{n/2}} e^{j\nu s^2 / (1 - j2\nu\sigma^2)} \quad (2-4-32)$$

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sigma^2} (y/s^2)^{(n-2)/4} e^{-(y+s^2)/2\sigma^2} I_{n/2-1}(\sqrt{ys}/\sigma^2) \quad y \geq 0 \quad (2-4-33a)$$

其中  $I_a(x)$  为第一类  $a$  阶修正贝塞尔函数:

$$I_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{a+2k}}{k! \Gamma(a+k+1)} \quad x \geq 0 \quad (2-4-33b)$$

当  $n=1$  时, 一个自由度的非中心  $\chi^2$  分布随机变量  $Y$  的 PDF 为:

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} e^{-(y+m_x^2)/2\sigma^2} \cdot \cosh\left[\frac{\sqrt{ym_x}}{\sigma^2}\right] \quad y \geq 0 \quad (2-4-34a)$$

其特征函数为:

$$\psi_Y(j\nu) = \frac{1}{(1 - j2\nu\sigma^2)} e^{j\nu m_x^2 / (1 - j2\nu\sigma^2)} \quad (2-4-34b)$$

非中心  $\chi^2$  分布随机变量  $Y$  的一阶矩、二阶矩和方差分别为:

$$E(Y) = n\sigma^2 + s^2 \quad (2-4-35a)$$

$$E(Y^2) = 2n\sigma^4 + 4\sigma^2 s^2 + (n\sigma^2 + s^2)^2 \quad (2-4-35b)$$

$$\sigma_y^2 = 2n\sigma^4 + 4\sigma^2 s^2 \quad (2-4-35c)$$

【例】当  $\sigma^2 = 1$ ,  $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 1$ ,  $n$  取不同值时  $n$  个自由度的  $\chi^2$  分布归一化随机变量  $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2 / n$ ; 当  $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 0$  或  $m_x$  时,  $Y$  的均值分别为  $E(Y) = \sigma^2$  或  $E(Y) = \sigma^2 + m_x^2$ , 而  $Y$  的方差分别为  $\sigma_y^2 = 2\sigma^4$  或  $\sigma_y^2 = 2\sigma^4 + 4\sigma^2 m_x^2$ 。当  $n \rightarrow \infty$  时  $Y$  趋于一个均值为  $E(Y)$ 、方差为  $\sigma_y^2$  的高斯随机变量。

## (6) 瑞利 (Rayleigh) 分布

设  $X_1$  和  $X_2$  为均值为 0、方差为  $\sigma^2$  的相互独立的两个高斯随机变量, 那么  $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$  所定义随机变量的 PDF 为瑞利分布:

$$p_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2}, r \geq 0 \quad (2-4-36a)$$

其 CDF 为:

$$F_R(r) = 1 - e^{-r^2/2\sigma^2}, r \geq 0 \quad (2-4-36b)$$

$$\text{其 } k \text{ 阶矩为: } E(R^k) = (2\sigma^2)^{k/2} \Gamma(1+k/2) \quad (2-4-36c)$$

其方差为:

$$\sigma_r^2 = (2 - \pi/2)\sigma^2 \quad (2-4-36d)$$



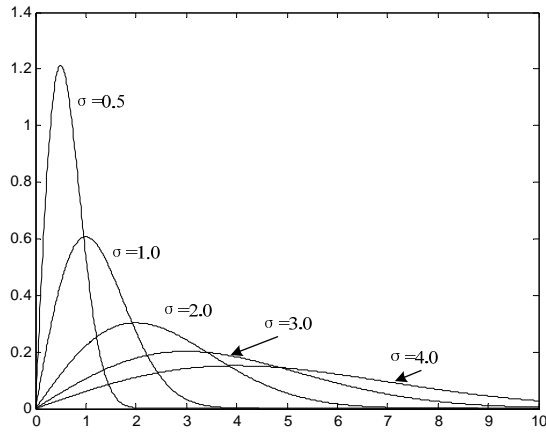


图 2-4-4 几种不同方差的瑞利分布

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为  $n$  个相互独立的高斯随机变量，其均值都为 0，其方差都等于  $\sigma^2$ ，那么随机变量  $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}$  为**广义瑞利分布**，其 PDF 为：

$$p_R(r) = \frac{r^{n-1}}{2^{(n-2)/2} \sigma^n \Gamma(n/2)} e^{-r^2/2\sigma^2}, (r \geq 0) \quad (2-4-37a)$$

其 CDF 为：

$$F_R(r) = 1 - e^{-r^2/2\sigma^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)^k, (r \geq 0) \quad (2-4-37b)$$

其  $k$  阶矩为：

$$E(R^k) = (2\sigma^2)^{k/2} \frac{\Gamma((n+k)/2)}{\Gamma(n/2)}, (r \geq 0) \quad (2-4-37c)$$

### (7) 莱斯(Rice)分布

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为  $n$  个相互独立的高斯随机变量，其均值分别为  $m_1, m_2, \dots, m_n$ ，方差都为  $\sigma^2$ ；只要非中心参量  $s^2 = m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2 \neq 0$ ，那么随机变量  $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}$  就不再是瑞利分布，而是莱斯分布，其 PDF 为：

$$p_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-(r^2+s^2)/2\sigma^2} I_0(rs/\sigma^2), r \geq 0 \quad (2-4-38a)$$

定义莱斯因子  $K = s^2 / (2\sigma^2)$ ，则莱斯分布可以表示成另一种形式：

$$p(r) = \begin{cases} \frac{2(K+1)}{a} r \exp\left(-\frac{K+1}{a}\left(r^2 + \frac{aK}{K+1}\right)\right) I_0\left(2r\sqrt{\frac{K(K+1)}{a}}\right) & r \geq 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases} \quad (2-4-38b)$$

其中  $a = s^2 + 2\sigma^2$ 。由此可见，当莱斯因子  $K=0$  即  $s^2=0$  时，莱斯分布退化为瑞利分布。

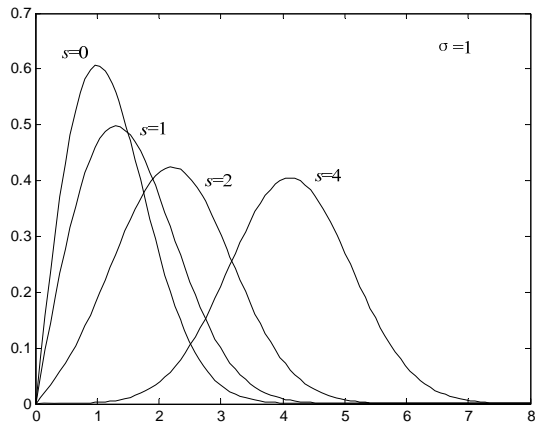


图 2-4-5 莱斯分布

### (8) Nakagami-m 分布

Nakagami-m 分布随机变量  $R$  的 PDF 为:

$$p_R(r) = \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m r^{2m-1} e^{-mr^2/\Omega} \quad (2-4-39a)$$

其中  $\Omega$  定义为  $\Omega = E(R^2)$ ; 衰落指数  $m$  定义为矩的比值, 即:

$$m = \frac{\Omega^2}{E[(R^2 - \Omega)^2]} \quad (m \geq \frac{1}{2}) \quad (2-4-39b)$$

其  $n$  阶矩为:

$$E(R^n) = \frac{\Gamma(m+n/2)}{\Gamma(m)} \left(\frac{\Omega}{m}\right)^{n/2}, (r \geq 0) \quad (2-4-39c)$$

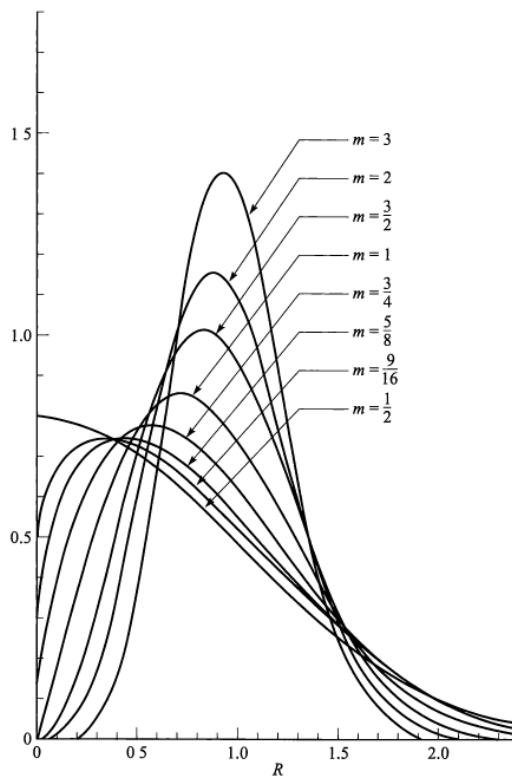


图 2-4-6  $\Omega=1, m=0.5$  的 Nakagami-m 分布 PDF

**Nakagami-m** 分布、瑞利分布和莱斯分布，常用于描述多径衰落信道接收的信号统计特性的。对照 (2-4-36) 和 (2-4-39) 式可知，当  $m=1$  时，Nakagami-m 分布退化为瑞利分布。Nakagami-m 分布与瑞利分布有类似之处，但其 PDF 的拖尾比瑞利分布的更重。

### (9) 对数正态分布

如果  $X$  为均值为  $m_x$ 、方差为  $\sigma^2$  的高斯随机变量，定义随机变量  $R$ ，它与  $X$  的函数为  $X = \ln(R)$ ，那么  $R$  为对数正态分布，其 PDF 为：

$$p_R(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma r} e^{-\frac{(\ln r - m_x)^2}{2\sigma^2}} & (r \geq 0) \\ 0 & (r < 0) \end{cases} \quad (2-4-40)$$

其 PDF 的曲线如图 2-4-7 所示。对数正态分布常用于移动通信中建模描述大建筑物引起的信号阴影效应。

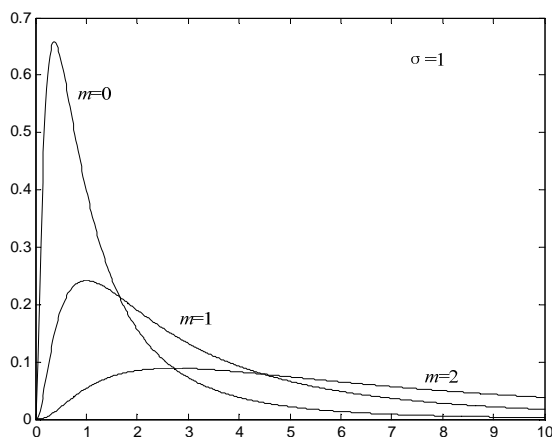


图 2-4-7 对数正态分布

## 2.5 随机过程

### 2.5.1 随机过程及其平稳性

#### ● 随机过程和随机序列

一个以时间为自变量的函数  $X(t)$ ，如果它在各个时刻的取值都是随机变量，那么  $X(t)$  称为随机过程。离散形式的随机过程  $\{X(n), n = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty\}$  也可称为随机序列。随机信号就是一种随机过程，当然随机过程不只是包括有随机信号。

#### ● 严平稳过程

设随机过程  $X(t)$  在任意一组时刻  $t_1, t_2, \dots, t_n$  所对应的随机变量组的联合 PDF 为  $P(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n})$ ，如果该联合 PDF 不随时间而变，那么  $X(t)$  为严平稳过程。

例如：一个白噪声离散随机过程，只要任意时刻的随机变量的 PDF 都相同，它就是严平稳过程；但若将此平稳的白噪声序列通过一个单位冲激响应为  $\{h_0, h_1, \dots, h_L\}$  的横向滤波器，要

使其输出的随机序列是平稳的，则必须该过程中任意相邻的  $(L+1)$  个随机变量的联合 PDF 都相同，这等价于  $\{h_0, h_1, \dots, h_L\}$  中的参数都是不变的常数；如果其中的参数是随时间而变的，那么输出的随机序列就是一个非平稳过程了。

### ● 广义平稳过程

如果随机过程中任意时刻组所对应的随机变量组，只是其均值矢量和自相关函数不随时间而改变（自相关函数  $\phi(t_1, t_2) = \phi(t_1 - t_2)$ ），那么  $X(t)$  称为广义平稳过程，也称宽平稳过程。

宽平稳过程本质上是功率密度谱函数不随时间而变的随机过程。

## 2.5.2 高斯分布随机过程

高斯随机过程是任意时刻的抽样都是一个高斯分布随机变量的随机过程。高斯随机过程可以是白色的，也可以是有色的；可以是平稳的或短时平稳的，也可以是非平稳的。**白色高斯随机过程又称为高斯白噪声。**

### ● 高斯白噪声

高斯白噪声在任意时刻的自相关函数都是  $\delta$  函数，相应地它在任意时刻的功率谱都是平坦的。无限带宽的白色高斯过程的自相关函数是 **Dirac  $\delta$  函数**。

频带有限的高斯白噪声序列，仅当采样速率为奈奎斯特临界采样率时，其自相关函数才为 **Kronecker  $\delta$  函数**，此时其功率谱是平坦的周期性函数；其功率谱在各个频点的值都等于某个常数  $p$ ，但在  $\omega = 2\pi k$  ( $k$  为整数) 频点处的值可以等于  $p$ ，也可等于 0。

由于高斯白噪声的自相关函数为  $\delta$  函数，因而每个抽样点的 PDF 可以分别独立地给出；相邻若干个抽样点的联合 PDF 等于各个抽样点 PDF 的乘积。

复高斯白噪声过程的实部和虚部是相互独立的，设它在  $t_0$  时刻的抽样为  $\boldsymbol{\eta}(t_0) = x + jy$ ，那么其 PDF 为其实部和虚部两个 PDF 的乘积，即

$$p(\boldsymbol{\eta}) = p(x) p(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left[-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right] \quad (2-5-1)$$

其中  $\mu_x$ 、 $\mu_y$  和  $\sigma_x^2$ 、 $\sigma_y^2$  分别表示均值与方差。

当高斯白噪声的均值和方差都是不随时间而变的常数时，它是平稳的；平稳的高斯白噪声过程是各态历经的，即其任意时刻抽样的概率空间统计特性，包括其均值、方差、自相关函数和概率密度函数，都与这个随机过程的任一个现实的时间相关统计特性是相同的。

### ● 高斯白噪声与确知信号之和

设  $\{\boldsymbol{\eta}(n)\}$  是一个均值为  $\mathbf{0}$ 、方差为  $N_0$  的平稳复高斯白噪声序列，那么它与一个确知复信号  $\{\mathbf{s}(n)\}$  之和，即  $\mathbf{r}(n) = \mathbf{s}(n) + \boldsymbol{\eta}(n)$  是一个均值等于  $\mathbf{s}(n)$ 、方差仍为  $N_0$  的白色复高斯随机过

程；但它不再是平稳的，也不再是各态历经的了，除非  $\mathbf{s}(n)=\text{常数}$ 。 $\{\mathbf{r}(n)\}$  在任意时刻的集相关函数仍为  $\delta$  函数，但该过程的任一个现实的时间相关函数就不再是  $\delta$  函数了。

但是，如果其中的确知信号  $\mathbf{s}(n)$  已经求得，那么将它减去之后得到  $\mathbf{r}(n) - \mathbf{s}(n)$ ，就变为零均值的平稳高斯白噪声了，其各态历经性也就恢复了。

设  $\mathbf{r}(n) = x(n) + jy(n)$ ， $\mathbf{s}(n) = a(n) + jb(n)$ ，那么  $x(n)$  和  $y(n)$  的联合 PDF 为

$$p(x, y) = \frac{1}{\pi N_0} \exp\left\{-\frac{[(x - a(n))^2 + (y - b(n))^2]}{N_0}\right\} \quad (2-5-2)$$

### ● 高斯白噪声通过线性系统

如果将一个均值为 0 的平稳复高斯白噪声过程  $\{\mathbf{v}(n)\}$  作为输入信号，激励一个复系数的时不变离散线性系统  $H(z)$ ，所产生的输出  $\{\mathbf{r}(n)\}$  仍然是零均值的平稳复高斯随机过程，但它一般不再是白色的了，除非  $|H(e^{j\omega})|^2 = \text{常数}$ 。

当  $\{\mathbf{r}(n)\}$  的自相关函数  $\phi(\tau)$  取非零值时的延迟范围为  $\pm\tau_{\max}$ ，即  $\phi(\tau) = 0 (\forall |\tau| > \tau_{\max})$ ，那么  $\{\mathbf{r}(n)\}$  在任意时刻的 PDF 都是与其前后各  $\tau_{\max}$  个样点的 PDF 相关的；其 PDF 必须以相邻  $2\tau_{\max} + 1$  个样点的联合 PDF 方式给出，而不能逐个样点给出 PDF 后相乘得到。

设  $\mathbf{r}(n) = x(n) + jy(n)$ ， $N = 2\tau_{\max} + 1$ ；由于系统函数  $H(z)$  是复系数的，这使得实部  $\{x(n)\}$  和虚部  $\{y(n)\}$  不一定相互独立，因此  $\{\mathbf{r}(n)\}$  的 PDF 必需看作一个  $2N$  维随机变量给出其联合 PDF，而不能将  $\{x(n)\}$  和  $\{y(n)\}$  分别给出 PDF 然后相乘得到。将  $n$  时刻前后  $N$  个  $\{\mathbf{r}(n)\}$  样点的实部虚部排列成一个  $2N$  维的实数矢量  $[r_1 r_2 \dots r_{2N}]$ ，设其协方差矩阵为  $\mathbf{C} = [c_{ik}]_{2N \times 2N}$ ，那么其联合 PDF 为

$$p(r_1, r_2, \dots, r_{2N}) = \frac{1}{(2\pi)^N (\det \mathbf{C})^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} [r_1 r_2 \dots r_{2N}] \mathbf{C}^{-1} [r_1 r_2 \dots r_{2N}]^T\right\} \quad (2-5-3)$$

### 2.5.3 循环平稳过程

广义循环平稳过程：如果随机过程的在  $t$  时刻的均值  $E[X(t)]$  和自相关函数

$$\phi(t + \tau, t) = E\{X(t + \tau) X^*(t)\} / 2 \quad (2-5-3)$$

都是周期为  $T$  的周期性函数，那么  $X(t)$  为循环平稳过程。

例如：符号周期为  $T$  的数字调制信号是循环平稳的。其信号波形为：

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot g(t - nT) \quad (2-5-4)$$

其中  $g(t)$  为成形滤波器的单位冲击响应， $a_n$  为第  $n$  个符号的特征值。那么其  $t$  时刻随机变量

$X(t)$  的均值和的自相关函数分别为:

$$E[X(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E[a_n] \cdot g(t-nT) = m_a \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t-nT) \quad (2-5-5a)$$

$$\begin{aligned} \phi_{xx}(t+\tau, t) &= E[X(t+\tau)X^*(t)]/2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E[a_n^* a_m] \cdot g^*(t-nT)g(t+\tau-mT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{aa}(m-n) \cdot g^*(t-nT)g(t+\tau-mT) \end{aligned} \quad (2-5-5b)$$

不难验证其周期性:  $E(X(t)) = E(X(t+kT))$ ,  $\phi_{xx}(t+\tau+kT, t+kT) = \phi_{xx}(t+\tau, t)$ , 因而是循环平稳的。它在一个周期内求平均自相关函数为:

$$\bar{\phi}_{xx}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \phi_{xx}(t+\tau, t) dt \quad (2-5-6a)$$

其付立叶变换即为功率谱密度:

$$\Phi_{xx}(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \bar{\phi}_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2-5-6b)$$

## 2.5.4 带通随机信号的描述

设  $s(t)$  是一个带通型随机过程, 则总可以表示为载波频率为  $f_c$  的复指数调制形式:

$$s(t) = \mathbf{z}(t) e^{j2\pi f_c t} = [x(t) + jy(t)] e^{j2\pi f_c t} \quad (2-5-7a)$$

其中  $\mathbf{z}(t) = x(t) + jy(t)$  是  $s(t)$  的复包络。

既然  $s(t)$  是带通随机信号, 其均值当然等于 0,  $x(t)$  和  $y(t)$  的均值也应等于 0; 可表示为:

$$s(t) = \text{Re}[s(t)] = x(t) \cos(2\pi f_c t) - y(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (2-5-7b)$$

如果  $s(t)$  是平稳的, 即意味着  $x(t)$  和  $y(t)$  的自相关和互相关函数满足:

$$\phi_{xx}(\tau) = \phi_{yy}(\tau) \quad (2-5-8a)$$

$$\phi_{xy}(\tau) = -\phi_{yx}(\tau) \quad (2-5-8b)$$

并有  $\phi_{zz}(\tau) = \phi_{xx}(\tau) \cos 2\pi f_c \tau - \phi_{yx}(\tau) \sin 2\pi f_c \tau = \text{Re}[\phi_{zz}(\tau) e^{j2\pi f_c \tau}] \quad (2-5-9a)$

其中  $\phi_{zz}(\tau) = \phi_{xx}(\tau) + j\phi_{yx}(\tau) \quad (2-5-9b)$

上述结论还可推广到某些不平稳的带通随机信号; 例如: 如果  $s(t)$  的复包络  $\mathbf{z}(t)$  是一个均值为零的平稳复高斯白噪声  $\boldsymbol{\eta}(t)$  与一个低通型确知信号  $\boldsymbol{\mu}(t)$  之和, 即  $\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\mu}(t) + \boldsymbol{\eta}(t)$ ; 这时  $s(t)$  的不平稳是因为  $\boldsymbol{\mu}(t)$  随时间而变引起的, 而不是因  $x(t)$  和  $y(t)$  的自相关函数不同引起, 而其互相关函数  $\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}(\tau) = 0$ ; 因此  $x(t)$ 、 $y(t)$  和  $\mathbf{z}(t)$  的自相关函数, 以及  $x(t)$  和  $y(t)$  的互相关函数仍然满足(2-5-8)

和(2-5-9)式。

带通随机信号  $s(t)$  的功率密度谱为

$$\Phi_{ss}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}[\phi_{zz}(\tau)e^{j2\pi f_c\tau}]e^{-j2\pi f\tau}d\tau = \frac{1}{2}[\Phi_{zz}(f-f_c) + \Phi_{zz}(-f-f_c)] \quad (2-5-10)$$

### ● 带通高斯白噪声

一个带宽为  $B$ 、功率谱密度为  $N_0$  的带通高斯白噪声，其等效低通噪声为  $\mathbf{z}(t)$ ，则有

$$\Phi_{zz}(f) = \begin{cases} N_0 & (|f| \leq B/2, f \neq 0) \\ 0 & (|f| > B/2, f = 0) \end{cases} \quad (2-5-11a)$$

$$\phi_{zz}(\tau) = N_0 \frac{\sin \pi B\tau}{\pi\tau} \quad (2-5-11b)$$

$$\phi_{zz}(\tau) = \phi_{xx}(\tau) = \phi_{yy}(\tau) \quad (2-5-12a)$$

$$\phi_{xy}(\tau) = 0 \quad (2-5-12b)$$

即  $x(t)$ 、 $y(t)$  和  $z(t)$  的自相关函数相等； $x(t)$  和  $y(t)$  对所有的  $\tau$  都不相关。总之，对于带通高斯白噪声，可以等效地采用它的复包络  $z(t)$  进行各种分析计算。

**需要特别说明的是，(2-5-11a)式所示的功率谱密度函数中零频分量等于 0 的问题。**这是因为带通噪声中各个频率分量的相位是随机地均匀分布在  $[0, 2\pi)$  之中的，但它的幅度平方总是一个常数，等于复包络中相应频率分量的实部、虚部的平方和的  $1/2$ ；但是其中中心频率  $f_c$  的分量在复包络中所对应的是零频分量，相位随机地分布在  $[0, 2\pi)$  之中，意味着其实部和虚部都是一个零均值的随机变量，因而零频处功率谱密度等于 0。这表明我们常常假定带通高斯白噪声的复包络  $z(t)$  是零均值的复高斯白噪声，是一种合理的假定。

一般地说，带宽为  $B$  和功率谱密度为  $N_0$ 、均值为  $\mu_x + j\mu_y$  的低通性复高斯白噪声  $\mathbf{z}(t) = x(t) + jy(t)$ ，其方差  $\sigma^2 = BN_0$ ，即  $x(t)$  和  $y(t)$  的方差都为  $BN_0/2$ ；那么  $\mathbf{z}(t)$  的 PDF 即  $x(t)$  和  $y(t)$  的联合 PDF 为：

$$p(x, y) = \frac{1}{\pi BN_0} \exp \left[ -\frac{(x - \mu_x)^2 + (y - \mu_y)^2}{BN_0} \right] \quad (2-5-13)$$

## 2.5.5 非平稳过程的分析与表示

在实际应用中常常只需关注均值、相关函数和功率谱密度函数这样的一、二阶统计量。因此这里只讨论广义平稳意义下的非平稳过程，即其均值和(/或)功率密度谱函数随时间而变的随机过程。

**短时平稳过程：**有些非平稳过程的功率密度谱函数在较短的时间段内几乎保持恒定不变，而在不同的短时段中却存在较大差异，这样的随机过程称为短时平稳过程；例如语音信号就

常常可假定为短时平稳过程。

### (1) 短时付立叶变换的定义

短时付立叶变换(简称 STFT)就是一种基于短时平稳假定的非平稳过程分析方法,它假定被分析的过程在较短的时间内的功率密度谱函数基本不变,因而可采用 STFT 逐段进行分析。

离散信号  $\{x(n)\}$  的短时付立叶变换(STFT)定义为:

$$X_n(e^{j\omega}) = \sum_{m=0}^{L-1} x(n+m)w(m)e^{-j\omega(n+m)} \quad \omega \in (-\infty, \infty) \quad (2-5-14a)$$

其中  $\{w(i), i=0,1,2,\dots,L-1\}$  为一个长度为  $L$  个样点的窗序列,例如汉明窗、汉林窗等。所得到的频谱函数  $X_n(e^{j2\pi k/N})$  称为时频函数,因为它是随窗序列  $\{w(n)\}$  在时间轴  $n$  上所处位置而变化的二维函数。

如果只要求频谱函数  $X_n(e^{j\omega})$  在频域的分辨力达到  $\Delta\omega=2\pi/N$ ,那么只要在频域均匀间隔地对  $X_n(e^{j\omega})$  抽  $N$  个样点进行计算,因而可采用  $N$  点 DFT 进行计算,即

$$X_n(e^{j2\pi k/N}) = \sum_{m=0}^{L-1} x(n+m)w(m)e^{-j2\pi k(n+m)/N} \quad k=0,1,2,\dots,N-1 \quad (2-5-14b)$$

#### ● STFT 的两种等价的解释:

① 加窗截取信号的 FFT: 将窗序列  $\{w(n)\}$  的平移到其起点位于第  $n$  个样点处,截取此后的  $L$  个信号样点,再进行  $N$  点 DFT ( $N < L$ ), 因为(2-5-14b)可改写为

$$X_n(e^{j2\pi k/N}) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{L/q-1} x(n+m+rN)w(m+rN)e^{-j2\pi k(n+m)/N} \quad (2-5-14c)$$

$$k=0,1,2,\dots,N-1$$

②  $N$  个正交解调器同时进行载波解调: 这是因为(2-5-14b)式也可理解为,将输入信号  $\{x(n)\}$  乘频移因子  $e^{-j2\pi k(n+m)/N}$ , 使中心频率为  $\omega_n = 2\pi k/N$  平移到 0 频后,再用单位冲激响应为  $\{w(n)\}$  的低通滤波器进行滤波,这就是正交下变频,或称正交载波解调;  $k$  取不同值就是不同载波调制信号的载波解调。

### (2) 短时付立叶变换的信号重构

当 DFT 点数  $N \geq L$  时,由短时信号  $\{x(n+m)w(m), m=0,1,2,\dots,L-1\}$  做  $N$  点 DFT 得到  $\{X_n(e^{j2\pi k/N})\}$ , 再做  $N$  点 IDFT 便可以无失真地恢复该短时信号的  $L$  个样点值。



若其中的窗函数采用汉明窗或汉宁窗，由于它们都是一个余弦波周期向上平移得到的窗函数，当相邻两次窗函数截取的时间起点相差  $L/2$  个样点时，前次窗函数的后半段与后一次窗函数的前半段正好互补，即  $w(m) + w(m + L/2) \equiv 1$ ， $m = L/2, L/2 + 1, \dots, L-1$ ；因此只要每隔  $L/2-1$  个样点截取一个短时信号做  $N$  点 DFT，得到  $\{X_n(e^{j2\pi k/N}), X_{n+L/2}(e^{j2\pi k/N}), X_{n+L}(e^{j2\pi k/N}) \dots\}$ ，再将它们分别进行  $N$  点 IDFT 恢复各个短时信号，然后叠接相加，便可无失真地重构原输入信号  $\{x(n)\}$ 。实际上，在  $N < L$  时，只要适当提高  $X_n(e^{j2\pi k/N})$  在时域的采样率，同样可以无失真重构原信号。

### (3) 短时付立叶变换的时频分辨率限制

基于 STFT 的动态频谱分析，其时间域和频率域的分辨力取决于窗函数的形状和长短；对于同一类型的窗函数，其长度越长，则其频率分辨力越高，而时间分辨力越低；相反地窗函数越短则其时间分辨力越高，而频率分辨力越低；二者是相互矛盾的，不能使两种分辨率同时都很高。这是因为 STFT 的时频分辨率是受“不确定性原理”的限制，即频率分辨宽度  $\Delta f$  和时间分辨宽度  $\Delta t$  满足 Heisenberg 不等式  $\Delta f \cdot \Delta t \geq 1/(4\pi)$ 。

可见 STFT 并不是分析非平稳过程最完善的方法，但它在通信中有许多非常重要的应用。

### (4) 短时付立叶变换的应用

#### ① 用于非平稳随机信号的动态频谱分析

对  $\{x(n)\}$  进行 STFT 得到其时频函数  $X_n(e^{j\omega})$ ，相应的能量密度谱或功率密度谱为

$$P_n(\omega) = |X_n(e^{j\omega})|^2 = \sum_{\tau=-L+1}^{L-1} R_n(\tau) e^{-j\omega\tau} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (2-5-15a)$$

称为时频图谱(Spectrogram)，它是一种二次型时频分布。其中  $R_n(\tau)$  为短时自相关函数：

$$R_n(\tau) = \sum_{m=0}^{L-1-\tau} x(n+m)w(m)x^*(n+m+\tau)w(m+\tau) \quad (2-5-15b)$$

$$\tau = -L+1, -L, \dots, 0, 1, 2, \dots, L-1$$

语音信号处理中的语谱图，就是语音学研究的重要手段。通信侦察、频率资源管理、雷达信号处理中也常常采用这种动态频谱分析技术。

#### ② 用于在频域进行信号处理

有些信号处理适于在频域进行，例如频域信道均衡、频域干扰剔除等。采用 STFT 将信号变到时频域，在频域进行信号处理后，再重构恢复信号，就达到频域信号处理的目的。

#### ③ 用于实现频分分路和多载波整体解调

如果将窗序列  $\{w(m), m = 0, 1, 2, \dots, L-1\}$  改成为一个实系数的 FIR 低通滤波器的单位冲激响应，或数字调制中的平方根升余弦谱特性的成形滤波器，并将其带宽设计为  $\pi/N$ ，对于

复信号来说,其通带在 $(-\pi/N, \pi/N)$ 频率范围之内;那么(2-4-15b)就是对 $N$ 个载波调制信号同时进行正交载波解调,所得输出就是各个载波调制信号的复包络。它等价于采用 $N$ 个带通滤波器分别滤出 $\{x(n)\}$ 中的 $N$ 个带通信号,并分别提取它们的基带复包络信号作为输出;其中第 $k$ 路输出信号为:  $\{X_0(e^{j2\pi k/N}), X_1(e^{j2\pi k/N}), X_2(e^{j2\pi k/N}), \dots, X_{N-1}(e^{j2\pi k/N})\}$ 。

## 第2章 习题

- 2-1 如果  $y(t)$  的频谱为  $Y(f) = j2\pi f / (1 + j2\pi f)$ , 试求下面信号的频谱: (1)  $x(t) = y(2t + 2)$ ; (2)  $x(t) = e^{-jt} y(t + 1)$ ; (3)  $x(t) = 2dw(t)/dt$ ; (4)  $x(t) = y(2 - t)$ 。
- 2-2 证明: 1)如果  $x(t)$  是  $t$  的实偶函数则  $X(f)$  是实函数; 2)如果  $x(t)$  是  $t$  的实奇函数则  $X(f)$  是虚函数。
- 2-3 复数  $c = x + jy$ , 其中  $x$ 、 $y$  为实数。若  $c^*$  表示  $c$  的复共轭, 证明: (1)  $x = (c + c^*)/2$ ; (2)  $y = (c - c^*)/(2j)$ ; (3)  $\sin^{-1}(x/|c|) = \text{Im}[\text{Ln}(c)]$ 。
- 2-4 证明傅里叶变换是一种线性变换。即下式成立:  $f[ax(t) + by(t)] = af[x(t)] + bf[y(t)]$ 。
- 2-5 设随机过程  $x(t) = a \cos(5\pi t)$ , 其中  $a$  是均值为 0, 方差为  $\sigma_a^2$  的高斯随机变量; (1)给出  $x(t)$  的 pdf; (2) 请问  $x(t)$  是广义平稳过程吗?
- 2-6 若单位冲激响应为  $\{h(n), n = 0, 1, 2, \dots, L\}$  的线性时不变系统的输入为  $\{x(n)\}$ , 推导其输出信号的均值、相关函数表达式。
- 2-7 随机过程  $x(t) = a \sin(\omega_0 t + \theta)$ , 其中  $a$ 、 $\omega_0$  为常数,  $\theta$  是在  $[0, 2\pi]$  上均匀分布的随机变量。(1) 确定  $R_x(\tau)$ ; (2) 证明  $x(t)$  是广义平稳的。
- 2-8 信号  $s_i(t)$ 、 $s_j(t)$  具有相同的时间长度  $T$ , 证明下面的表达式成立: (1)  $\int_0^T s_i(t)s_j(t)dt = \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_j$ , 其中  $\mathbf{s}_i$ 、 $\mathbf{s}_j$  分别表示信号  $s_i(t)$ 、 $s_j(t)$  的向量表示; (2)  $\int_0^T (s_i(t) - s_j(t))^2 dt = \|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\|^2$ 。
- 2-9 白噪声过程  $X(t)$  具有相关函数  $R_{xx}(\tau) = N_0 \delta(\tau)/2$ 。假设该白噪声输入到一个带宽为  $B$  的理想带通滤波器, 求该滤波器输出端的总噪声功率。
- 2-10 证明:  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{m}{T_s}) = T_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi m f T_s}$ 。
- 2-11 对于零均值的两个高斯随机变量  $x$ 、 $y$ , 证明下面的命题正确: (1) 二者独立的充要条件是它们之间的相关系数为零; (2) 二者的线性组合依然服从高斯分布。
- 2-12 设  $x(n) = \cos(2\pi n/N), n=0, 1, 2, \dots, N-1$ , 其  $N$  点 FFT 为  $\{X(k), k=0, 1, 2, \dots, N-1\}$ ; (1)若在  $\{x(n)\}$  之后补  $N$  个 0 再做  $2N$  点 FFT, 其频谱函数与  $\{X(k)\}$  有何不同? (2) 若在相邻两样点之间插入一个 0, 再做  $2N$  点 FFT, 其频谱函数与  $\{X(k)\}$  有何不同?
- 2-13 何利用长度为  $N$  的复数 FFT 实现长度为  $2N$  点的实数 FFT? 如何通过  $2^N$  点的 FFT 实现  $2^{N+1}$  点的 FFT?
- 2-14 证明:  $E\{y | x_1\} = E\{E\{y | x_1, x_2\} | x_1\}$
- 2-15 证明循环矩阵  $C_{n \times n}$  的元素具有如下特征,  $c_{jk} = c_{j-k(\text{模}n)}$ 。对于一非奇异循环阵  $C_{n \times n}$ , 试利用 FFT 算法解决如下问题: (1) 解方程  $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ; (2) 计算  $C^{-1}$ ; (3) 计算两循环矩阵的乘积  $C_1 C_2$ 。
- 2-16 证明以下命题:
- (1) 对于任何复矩阵  $\mathbf{A} \in C^{n \times n}$ ,  $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$  与  $\mathbf{A} \mathbf{A}^H$  的特征值是实数且非负( $H$  表示共轭转置);
  - (2) 方阵  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{A}^T$  具有相同的特征值, 同时对于  $\mathbf{A}$  的某一特征向量不可能对应两个不同的特征值;
  - (3) 如果  $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A}$ , 则  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  具有相同的特征向量。