

其中 $P_S = \frac{1}{2} V_0^2$ 为载波功率， $u_0 = 2\pi f_0$ 为标称频率对应的角频率。噪声电压的单边带功率谱密度为：

$$S_{v_n}(\omega) = 2S_{v_n}(\omega)_2 = P_S[S_{\varphi_n}(\omega+u_0)_2 + S_{\varphi_n}(\omega-u_0)_2] \quad \text{式(2.44)}$$

以载波为基准的单边带相对功率谱密度为：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{v_n}(\omega) &= \frac{S_{v_n}(\omega)}{P_S} = S_{\varphi_n}(\omega+u_0)_2 + S_{\varphi_n}(\omega-u_0)_2 = 2S_{\varphi_n}(\omega-u_0)_2 \\ &= S_{\varphi_n}(\omega-u_0) = S_{\varphi_n}(\omega+u_0) \end{aligned} \quad \text{式(2.45)}$$

又因为射频单边带功率谱密度 $S_{\varphi_n}(\omega-u_0)$ 与基带单边带功率谱密度 $S_{\varphi_n}(\Delta\omega)$ 有以下关系：

$$S_{\varphi_n}(\omega-u_0) = \frac{1}{2} S_{\varphi_n}(\Delta\omega) \quad \text{式(2.46)}$$

其中 $\Delta\omega$ 为相位载波角频率 u_0 的频率偏离，可称为基带调制角频率。故噪声电压单边带功率谱密度可表示为：

$$\mathcal{L}_{v_n}(\omega) = \frac{1}{2} S_{\varphi_n}(\Delta\omega) \quad \text{式(2.47)}$$

相位噪声测量中常采用傅氏频率 f 代表距离标称频率的频率偏离，用 $\mathcal{L}(f)$ 表是信号的带边带相位噪声，即：

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{2} S_{\varphi_n}(f) \quad \text{式(2.48)}$$

式(2.48)表明噪声电压 $v_n(t)$ 的相对单边带功率谱密度等于相位噪声 $\varphi(t)$ 单边带功率谱密度的二分之一，这是分析与测量信号源相位噪声的重要依据。

2.2 信号相位噪声的数学模型和噪声仿真

2.2.1 振荡器信号相位噪声的数学模型

如式(2.5)所示的振荡器信号，其中 $\varphi(t)$ 表示信号的瞬时相位，2.1 节讨论了在 $\varphi(t)$ 基础上的信号相位噪声表示方法。本节研究信号相位噪声数学模型和噪声仿真方法。研究振荡器信号相位噪声的产生机理和特征，建立信号相位噪声的数学模型和数学描述，一方面可以利用数学方法和数学工具分析相位噪声的时域、频域和统计特性等性能，有利于深入研究相位噪声信号的性质、有效测量方法和降低信号相位噪声的技术；另一方面，可在相位噪声数学模型的基础上建立相位噪声的仿真方法，通过仿真产生特征与实际振荡器信号相同或相似的相位噪声数据

序列，为相位噪声的研究提供有效的工具。因此研究相位噪声的数学模型和仿真方法对相位噪声测量技术研究具有重要的意义。

一般从两个角度研究相位噪声的模型：一是根据振荡器中信号相位噪声产生的机理，分析各种影响相位噪声的因素及其关系，以建立振荡器信号相位噪声的特征和数学模型；二是根据振荡器信号的相位噪声测量结果，分析其相位噪声曲线与频率之间的函数特征，以建立振荡器信号相位噪声的数学模型。本论文主要研究采用后一种方法建立的振荡器信号相位噪声模型。

根据相位噪声的频域特性，振荡器信号的相位噪声在时域可以看做由五个独立的随机过程构成，可表示如下：

$$Z(t) = Z_{-2}(t) + Z_{-1}(t) + Z_0(t) + Z_1(t) + Z_2(t) \quad \text{式(2.49)}$$

因此相位噪声的相对频率波动谱密度 $S_y(f)$ 可表示为：

$$S_y(f) = S_{-2y}(f) + S_{-1y}(f) + S_{0y}(f) + S_{1y}(f) + S_{2y}(f) \quad \text{式(2.50)}$$

根据相位噪声的频域特征，这五个频谱分量可以表示为关于频率的幂律函数^[67]，

即：

$$S_y(f) = \begin{cases} h_{-2}f^{-2} + h_{-1}f^{-1} + h_0 + h_1f^1 + h_2f^2 & \text{当 } 0 < f < f_h \\ 0 & \text{当 } f > f_h \end{cases} \quad \text{式(2.51)}$$

即：

$$S_y(f) = \begin{cases} \sum_{\alpha=-2}^2 h_{\alpha} f^{\alpha} & \text{当 } 0 < f < f_h \\ 0 & \text{当 } f > f_h \end{cases} \quad \text{式(2.52)}$$

其中， f_h 表示噪声有效带宽， h_{α} 为各噪声分量的系数， $\alpha = -2, -1, 0, 1, 2$ 为各噪声分量的编号，具体如下：

$\alpha = 2$ 的分量，表示相位噪声相对频率波动谱密度 $S_y(f)$ 中与频率 f^2 成比例关系的分量，称为相位白噪声，其时域过程为平稳白噪声，引起相位的随机抖动，描述信号的短期稳定性能。

$\alpha = 1$ 的分量，表示相位噪声相对频率波动谱密度 $S_y(f)$ 中与频率 f 成比例关系的分量，称为相位闪烁噪声，其时域过程为非平稳随机过程，引起相位的短周期随机漂移，描述信号的短期稳定性能。

$\alpha = 0$ 的分量，表示相位噪声相对频率波动谱密度 $S_y(f)$ 中在频域均匀分布的分量，称为频率白噪声，描述信号的短期稳定性能。

$\alpha = -1$ 的分量，表示相位噪声相对频率波动谱密度 $S_y(f)$ 中与频率 f^{-1} 成比例关系的分量，称为频率闪烁噪声，其时域过程为非平稳随机过程，引起相位的长周期随机漂移，描述信号的长期稳定性能。

$\alpha = -2$ 的分量，表示相位噪声相对频率波动谱密度 $S_y(f)$ 中与频率 f^{-2} 成比例关系的分量，称为频率随机游走噪声，其时域过程为非平稳随机过程，引起相位

的长周期连续漂移，描述信号的长期稳定性能。

振荡器信号的相位噪声是这五种幂律噪声项的部分或全部，这要视振荡器的具体情况而定。在不同的取样时间，主导噪声不同，也就是说，在某一个频率区间，有一种噪声起主导作用。

由于：

$$y(t) = \frac{1}{2\pi\nu_0} \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{\dot{\varphi}(t)}{2\pi\nu_0} \quad \text{式(2.53)}$$

可得：

$$S_y(f) = \left(\frac{1}{\nu_0}\right)^2 f^2 S_\varphi(f) \quad \text{式(2.54)}$$

其中 $S_\varphi(f)$ 为信号的相位波动功率谱密度，信号的单边带功率谱密度 $\mathcal{L}(f)$ 为：

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{2} S_\varphi(f) \quad \text{式(2.55)}$$

由式(2.52)和式(2.55)可知，信号的单边带功率谱密度 $\mathcal{L}(f)$ 可表示为：

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{2} S_\varphi(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} \nu_0^2 \sum_{\beta=0}^4 h_{2-\beta} f^{-\beta} & \text{当 } 0 < f < f_h \\ 0 & \text{当 } f > f_h \end{cases} \quad \text{式(2.56)}$$

该模型即为相位噪声的幂律谱模型，其中 $\beta=0,1,2,3,4$ ，分别对应相位噪声中的相位白噪声、相位闪烁噪声、频率白噪声、频率闪烁噪声、随机游走频率相位噪声。

2.2.2 基于幂律谱模型的相位噪声仿真方法

根据式(2.49)和式(2.56)表示的相位噪声幂律模型，要产生振荡器信号的相位噪声数据序列，可以分别产生幂律模型中五种不同的噪声分量，将其合成为所需的相位噪声数据序列。上述相位噪声数据仿真方法主要需要实现两个方面的问题：五种幂律谱噪声数据的生成；将产生的五种噪声按指定的噪声分量系数合成为能真实反映指定噪声分量系数的振荡器相位噪声数据。以下分别研究这两个问题。

1. 五种幂律谱噪声数据的生成

根据式(2.56)给出的相位噪声模型，主要研究相位白噪声、相位闪烁噪声、频率白噪声、频率闪烁噪声、随机游走频率相位噪声五种噪声数据的生成。根据其定义和频谱特征，五种噪声的噪声功率在频域和频率的关系分别为 f^0 、 f^{-1} 、 f^{-2} 、 f^{-3} 、 f^{-4} 等幂函数关系，表现为其频谱曲线随频率的变化越来越陡峭，为了产生相应噪声特性的噪声数据，可将高斯白噪声序列激励一个“线性”系统产生各种幂律谱噪声信号，对于不同的噪声分量所需的“线性”系统特性也不同，这些“线

性”系统称为生成噪声数据的成形滤波器。其示意图如图 2.5 所示。

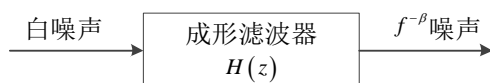


图 2.5 $f^{-\beta}$ 噪声的生成原理示意图

图 2.5 中的成形滤波器一般采用低通滤波器实现，调整滤波器参数，利用低通滤波器的低通特性和过渡带形状改变高斯白噪声的噪声功率谱分布，以产生不同功率谱特性的噪声分量。如采用 FIR 滤波器实现，其系统函数^[109]为：

$$H(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^{-\alpha/2}} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k} \quad \text{式(2.57)}$$

其中滤波器系数取：

$$b_0 = 1, \quad b_k = \frac{(k-1+(-\alpha)/2)}{k} b_{k-1}, \quad (k=1, 2, \dots) \quad \text{式(2.58)}$$

α 为式(2.52)表示的频率波动谱密度 $S_y(f)$ 的指数， $\alpha = 2 - \beta$ 。针对不同的噪声分量，按照不同的 α 值可由式(2.57)和式(2.58)求得所用的 FIR 滤波器系数，具体如表 2.1 所示。

如表 2.1 所示，其中用于产生相位白噪声、频率白噪声的滤波器系数随着 k 增大将很快为零，其滤波器系数为有限长度，可精确的由有限长度滤波器实现，但产生相位闪烁噪声、频率闪烁噪声、随机游走频率相位噪声这三种噪声的滤波器系数为无限长，因此只能截取一段作为对应的 FIR 滤波器系数。

表 2.1 FIR 成形滤波器系数

噪声模型	相位白噪声	相位闪烁噪声	频率白噪声	频率闪烁噪声	频率随机游走噪声
生成数据	频率	频率	频率	频率	频率
$\gamma = -\alpha$	-2	-1	0	1	2
FIR 系数 $(k-1+\gamma/2)/k$	$(k-2)/k$	$(k-1.5)/k$	$(k-1)/k$	$(k-0.5)/k$	k/k

2. 基于阿伦方差的噪声过程时域变换

需要研究的第二个问题是将产生的五种噪声按指定的噪声分量系数合成为能真实反映指定噪声分量系数的振荡器相位噪声数据的问题。为此，本文通过计算和比较时域噪声数据的阿伦方差来完成噪声数据序列的变换，依此将成形滤波器生成的噪声数据变换到指定噪声分量系数对应的时域噪声数据。

由成形滤波器生成的噪声数据不一定能等于指定噪声分量系数对应的相位噪声分量，需要进行缩放变换达到仿真目的。可由式(2.59)计算指定噪声分量系数 h_α

对应的相对频率波动 $y(t)$ 的各分量阿伦方差^[79] $\sigma_{y_\alpha}^2(\tau)$ 。

$$\begin{aligned}\sigma_{y_{-2}}^2(\tau) &= h_{-2} \frac{(2\pi)^2}{6} |\tau| \\ \sigma_{y_{-1}}^2(\tau) &= h_{-1} 2 \ln 2 \\ \sigma_{y_0}^2(\tau) &= h_0 \frac{1}{2|\tau|} \\ \sigma_{y_1}^2(\tau) &= h_1 \frac{1}{(2\pi\tau)^2} \{3[2 + \ln(2\pi f_h |\tau|)] - \ln 2\} \\ \sigma_{y_2}^2(\tau) &= h_2 \frac{3f_h}{(2\pi\tau)^2}\end{aligned}\tag{2.59}$$

由式(2.60)计算成形滤波器生成的噪声数据 $ph_\alpha(n)$ 实际的阿伦方差。

$$\begin{aligned}\sigma_{ph_\alpha}^2(\tau) &= \frac{1}{2\tau^2} \langle (ph_\alpha(i+2) - 2ph_\alpha(i+1) + ph_\alpha(i))^2 \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(N-2)\tau^2} \sum_{i=1}^{N-2} (ph_\alpha(i+2) - 2ph_\alpha(i+1) + ph_\alpha(i))^2\end{aligned}\tag{2.60}$$

根据式(2.59)和式(2.60)计算的阿伦方差的差异对成形滤波器生成的噪声数据 $ph_\alpha(n)$ 按式(2.61)进行缩放变换得到被仿真的相对频率波动数据 $y_\alpha(n)$ 。

$$y_\alpha(n) = \frac{\sigma_\alpha(\tau)}{\sigma_{ph_\alpha}(\tau)} ph_\alpha(n)\tag{2.61}$$

3. 基于幂律谱模型的相位噪声仿真步骤

由上述讨论的内容可总结出基于幂律谱模型的相位噪声仿真实现过程。若需要仿真生成长度为 N 的相位噪声仿真数据，采样率为 f_s ，噪声系数为 h_α ($\alpha = -2, -1, 0, 1, 2$)，生成闪烁噪声的 FIR 滤波器阶数为 k ，则采样间隔 $\tau = 1/f_s$ ，噪声有效带宽 $f_h = f_s/2$ 。具体步骤如下：

- (1) 产生长度为 N ，均值为 0，方差为 1 的高斯白噪声序列 $p(n)$ ；
- (2) 将生成的高斯白噪声序列 $p(n)$ 分别经过对应 FIR 成形滤波器产生五种幂律谱函数形式的 f^α 噪声 $ph_\alpha(n)$ （相对频率波动时域数据）；
- (3) 利用式(2.60)分别计算成形滤波器生成的噪声数据 $ph_\alpha(n)$ 在时间间隔 τ 上的阿伦方差；
- (4) 根据相位噪声的幂律谱模型，利用式(2.59)计算指定噪声分量系数 h_α 对应的相对频率波动 $y(t)$ 的各分量在同样时间间隔 τ 下的阿伦方差 $\sigma_{y_\alpha}^2(\tau)$ 。
- (5) 由式(2.61)对仿真生成的 f^α 噪声 $ph_\alpha(n)$ 进行缩放变换，即可得到指定噪声分量系数对应的相对频率波动数据 $y_\alpha(n)$ 。
- (6) 将五个相对频率波动分量数据 $y_\alpha(n)$ 相加即可得到指定噪声分量系数对应

的相对频率波动噪声。由此可进一步计算其相对相位波动噪声数据。

可采用以下方法对相位噪声仿真结果进行验证：将仿真得到的时域噪声数据进行功率谱估计得到仿真噪声数据的功率谱密度，另一方面将指定的噪声分量系数带入相位噪声幂律谱模型得到理想的相位噪声功率谱，将仿真得到的相位噪声曲线与预定噪声分量系数对应的理论相位噪声曲线进行比较，以此验证相位噪声仿真结果的正确性。

2.2.3 基于幂律谱模型的相位噪声仿真实验

为说明和验证本节研究的相位噪声仿真方法的正确性，以下利用该方法仿真表 2.2 所示的某振荡器相位噪声数据。

表 2.2 某振荡器的噪声分量系数

h_{-2}	h_{-1}	h_0	h_1	h_2
3.2946×10^{-19}	4.1247×10^{-19}	2.0589×10^{-18}	8.239×10^{-20}	2.0351×10^{-22}

实验在以下仿真条件下进行：仿真在 MATLAB 软件中进行，采样率 $f_s = 100\text{KHz}$ ，变量 $n = 0:(1/f_s)$ ，标称频率 $f_0 = 10\text{MHz}$ ，则仿真数据长度 $N = \text{length}(n)$ ，采样间隔 $\tau = 1/f_s$ ，噪声有效带宽 $f_h = f_s/2$ 。

按照 2.2.2 节的相位噪声仿真方法，将高斯白噪声作为五个成形滤波器的输入数据，分别进行成形滤波与缩放处理后分别得到的五个相位噪声分量及其相加后得到的振荡器相位噪声时域数据如图 2.6 所示。

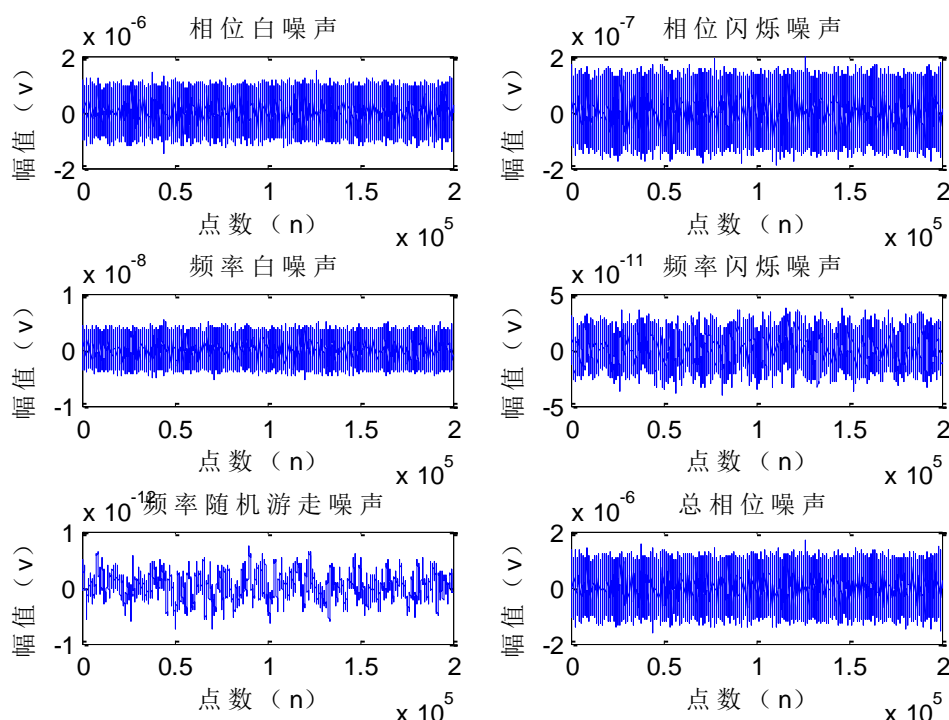


图 2.6 仿真产生的相位噪声时域数据

为验证相位噪声的仿真结果，以下将仿真产生的各噪声分量时域数据进行功率谱估计，得到相应的功率谱数据，将其与由幂律谱模型得到的各分量功率谱理论曲线进行比较，如图 2.7~图 2.11 所示。

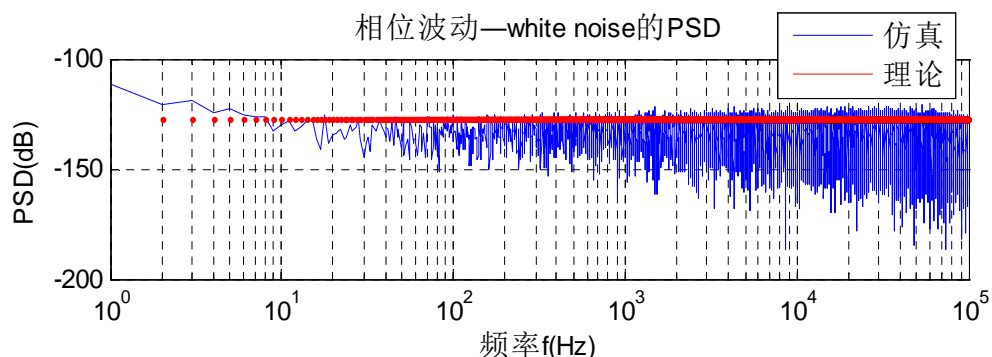


图 2.7 相位白噪声分量的功率谱仿真和理论结果比较

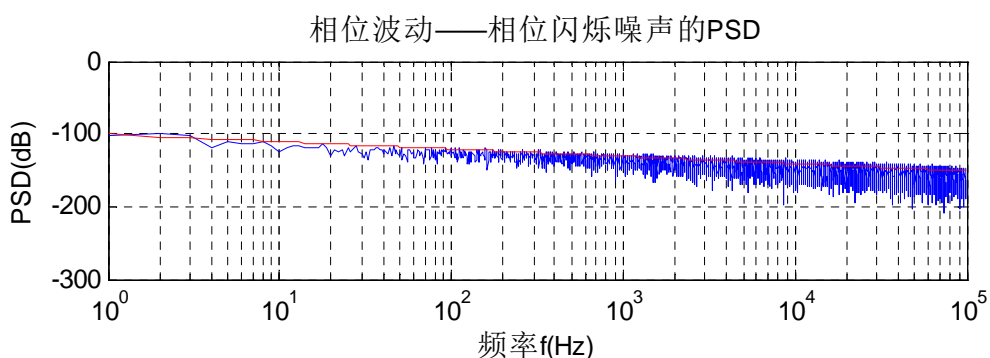


图 2.8 相位闪烁噪声分量的功率谱仿真和理论结果比较

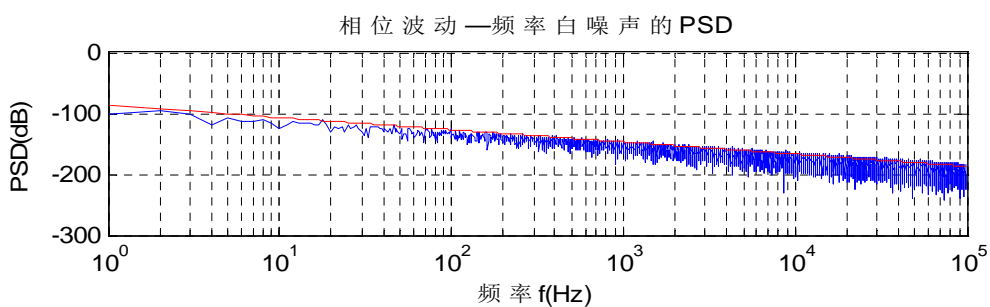


图 2.9 频率白噪声分量的功率谱仿真和理论结果比较

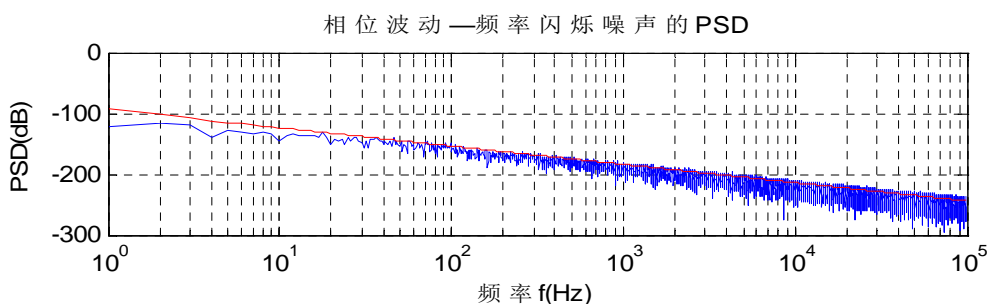


图 2.10 频率闪烁噪声分量的功率谱仿真和理论结果比较

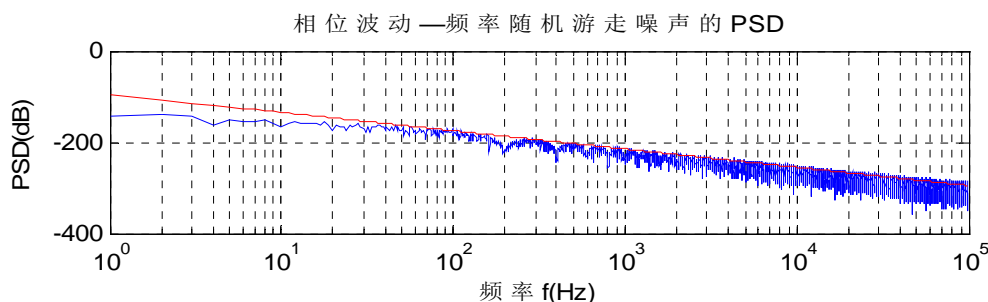


图 2.11 频率随机游走噪声分量的功率谱仿真和理论结果比较

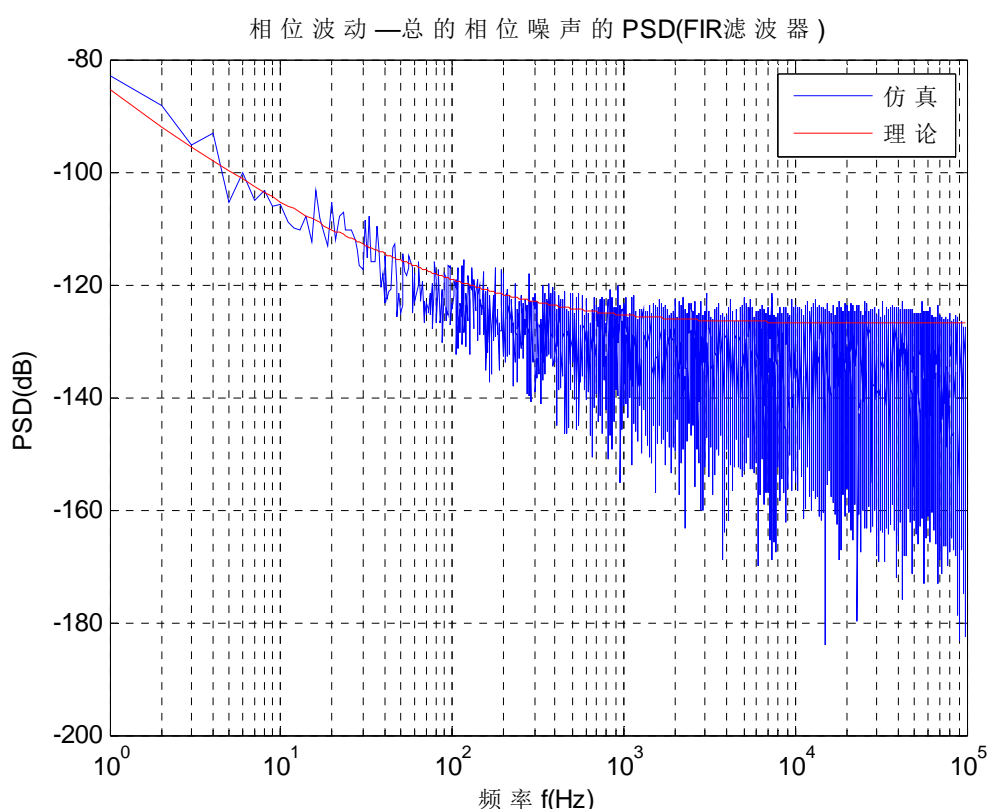


图 2.12 该振荡器相位噪声仿真结果与理论结果比较

图 2.12 为仿真得到的该振荡器相位噪声曲线与理论相位噪声曲线的比较。利用功率谱估计，将仿真得到的指定噪声分量系数的某振荡器信号相位噪声变换到频域，计算得到其相位噪声曲线。图中同时给出了表 2.1 的振荡器噪声分量系数对应的理论相位噪声曲线。由图 2.12 的结果可知，本实验相位噪声仿真结果与理论曲线具有很好的吻合，该仿真结果可以说明本文提出的基于幂律谱模型的相位噪声仿真方法的正确性。

2.3 本章小结

本章主要研究信号频率稳定性的基本概念、表征方法和相位噪声的数学模型及仿真方法。信号频率稳定性是描述信号质量的重要指标，频率稳定性在时域可