电磁场数值分析

Numerical Analysis of Electromagnetic Fields

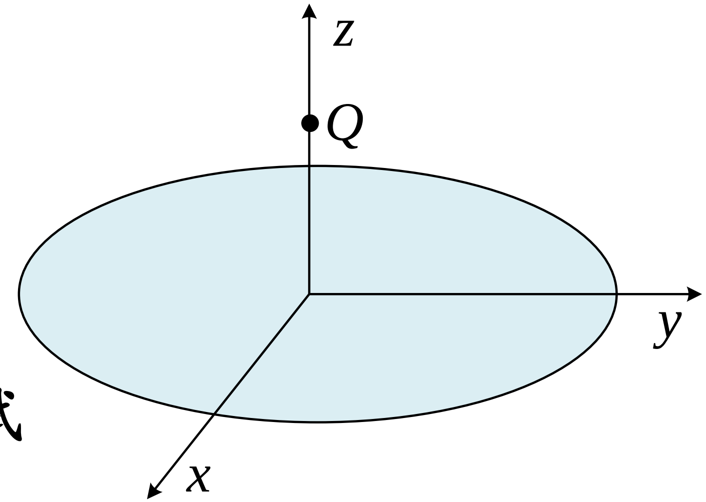
第6讲　矩 量 法（一）

胡伟，郭景丽
西安电子科技大学
电子工程学院
2022
whu@mail.xidian.edu.cn

一、概述

- ✓ The Method of Moments（MoM），或 Moment Method（MM)
- ✓ 在天线、微波技术和电磁波散射等方面广泛应用的一种数值计算方法。
- ✓ 将连续方程离散为代数方程组的方法，对微分方程，积分方程都适用。
- ✓ R. F. Harrington对用矩量法求解电磁场问题作了全面和深入的分析，收录在其经典著作《计算电磁场的矩量法》中。

二、引例



无限薄导体圆盘上的电荷分布问题。

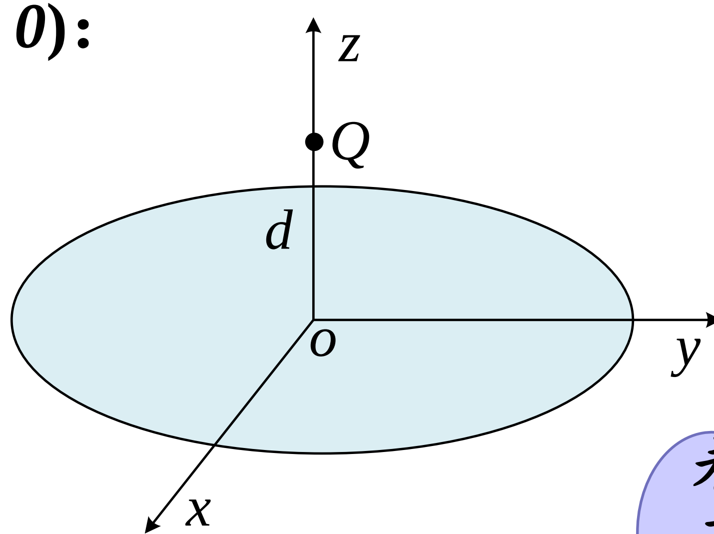
半径为a的无限薄理想导体圆盘，在中心线距离d处有一点电荷Q，试讨论导体圆盘上的电荷分布。

假设导体圆盘上的感应电荷密度为 $\sigma(x',y')$，则：

(1)总感应电荷之和 Q^i 为0；

(2)由外加电荷Q在导体圆盘上产生的电位Φ^e 和导体圆盘本身感应电荷密度σ所产生的电位Φ^i之和。U在盘上处处相等，即保证导体圆盘是等位面。

对导体圆盘上一点(*x*, *y*, *0*):



$$\Phi^e = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+d^2}}$$

$$\Phi^i = \iint_s \frac{\sigma(x',y')}{4\pi\varepsilon_0 r} dS'$$

$$r = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$$

未知量处于积分内部，是典型的积分方程。

其中打撇的表示源点，不打撇的表示场点。

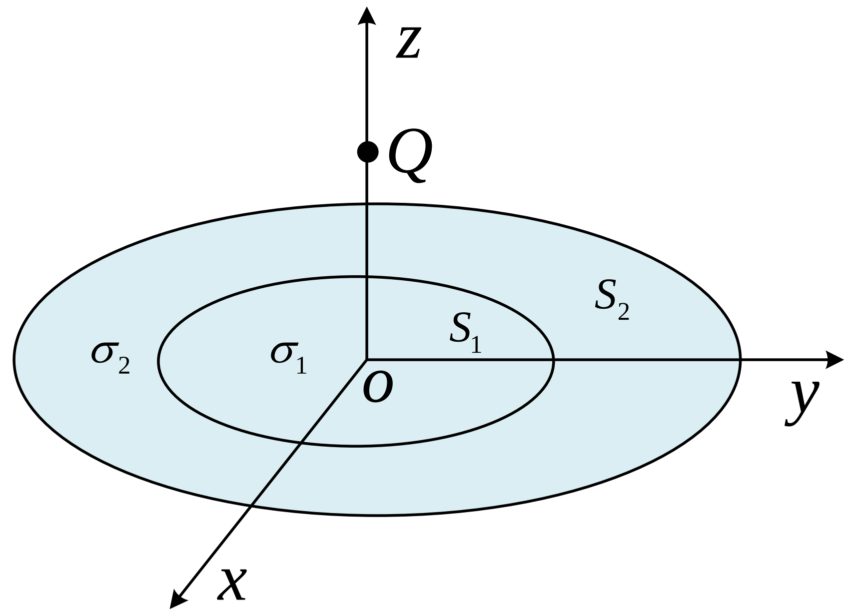
$$Q^i = \iint_s \sigma(x',y') dS'$$

$$\begin{cases} \Phi^e + \Phi^i = U \\ Q^i = 0 \qquad \text{(约束条件)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+d^2}} + \displaystyle\iint_s \frac{\sigma(x',y')}{4\pi\varepsilon_0 r} dS' = U \\ \displaystyle\iint_s \sigma(x',y') dS' = 0 \end{cases}$$

为此，把圆盘分割成两部分：中心小圆和外部环带，并假定每一部分内的电荷密度 σ_i **(i=1,2)**近似为常数，于是

$$P(S_i)=\begin{cases}1 & S\in S_i\\ 0 & S\notin S_i\end{cases}$$

$$\sigma(x',y')=\sum_{i=1}^{2}\sigma_i P(S_i)$$



$$\begin{cases}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+d^2}}+\displaystyle\iint_s\frac{\sigma(x',y')}{4\pi\varepsilon_0 r}dS'=U\\ \displaystyle\iint_s\sigma(x',y')dS'=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sigma_i\iint_{S_i}\frac{dS'}{4\pi\varepsilon_0 r}-U=-\Phi^e\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sigma_i S_i=0\end{cases}$$

超定方程组

为了把超定方程组转化为唯一解的方程组，可以采用很多办法。矩量法中，用选配过程解决这个问题。简单说来，即在每个离散的单元上只选取一个场点作为代表来建立方程。

对于离散的 S_1 和 S_2 分别取 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 两点做试验点：

$$\begin{cases} l_{11}\sigma_1 + l_{12}\sigma_2 = -\Phi_1^e + U & \text{第1选配点} \\ l_{21}\sigma_1 + l_{22}\sigma_2 = -\Phi_2^e + U & \text{第2选配点} \\ S_1\sigma_1 + S_2\sigma_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_{11} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint\limits_{S_1} \dfrac{dS'}{\sqrt{(x_1 - x')^2 + (y_1 - y')^2}} \\ l_{12} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint\limits_{S_2} \dfrac{dS'}{\sqrt{(x_1 - x')^2 + (y_1 - y')^2}} \end{cases}
\qquad
\begin{cases} l_{21} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint\limits_{S_1} \dfrac{dS'}{\sqrt{(x_2 - x')^2 + (y_2 - y')^2}} \\ l_{22} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint\limits_{S_2} \dfrac{dS'}{\sqrt{(x_2 - x')^2 + (y_2 - y')^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_1^e = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + d^2}} \\ \Phi_2^e = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + d^2}} \end{cases}$$

经过离散化过程和选配过程，将积分方程组(近似地)转化为矩阵方程

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & -1 \\ l_{21} & l_{22} & -1 \\ S_1 & S_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ U \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \Phi_1^e \\ \Phi_2^e \\ 0 \end{bmatrix}$$

由此得出电荷分布的解为

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & -1 \\ l_{21} & l_{22} & -1 \\ S_1 & S_2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\Phi_1^e \\ -\Phi_2^e \\ 0 \end{bmatrix}$$

Let's have a rest!

whu@mail.xidian.edu.cn

http://web.xidian.edu.cn/whu/

三、数学基础

设有算子方程：　$L(u)=g$

式中L为线性算子，可以是微分方程、差分方程或积分方程；

g是已知函数，如激励源；

u为未知函数，如电流。

算子L的定义域为算子作用于其上的函数u的集合。

算子L的值域为算子在其定义域上运算而得的函数g的集合。

假定上述方程的解存在且是唯一的，则有逆算子L^{-1}的存在，使 $u=L^{-1}(g)$ 成立。L与L^{-1}互为逆算子。

对于给定边界条件的边值问题，若u为<u>精确解</u>，则算子方程和边界条件应该完全满足；

现在构造一个由有限个线性无关函数u_i（i=1，2，…，n）所组成的基函数集合｛u_i｝，并令其满足总体边界条件，借以展开得待求函数u的<u>近似解</u>为：

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

- ✓ 若函数空间D中存在一组函数$\{\varphi_i, i=1, 2, 3, \cdots, n\}$，使得$D$中任意一个函数都能表示成$\{\varphi_i\}$的线性组合，则称$\{\varphi_i\}$为函数空间$D$中的一组基（或基底）；$\varphi_i$称基函数。

则将其带入原算子方程必有误差存在，或称之为有余量，即

$$R(\tilde{u}) = L\tilde{u} - g$$

如果选用不同的函数构造方法，使余量在某种平均意义上取零值，便可相应获得不同的求解方法。

作为一般性的讨论，应令余量加权求积后取零值。

权，然后知轻重。----《孟子》

通过将待求函数近似展开，在余值形式中引入权函数，采用使余量的加权积分为零 求得方程近似解的方法，称为加权余量法。

换句话说，取一个归属于试探函数的权函数集合$\{W_j\}$，令

$$\int_v W_j(L\tilde{u}-g)dv=0 \qquad (j=1,2,\ldots n)$$

上式系由n个方程构成的方程组，它等价于人为地强制近似解，使其因不能精确地满足场方程而导致的误差在平均的含义上等于零。

按上式展开，所构成的各种求解积分或微分方程近似解的方法可被统称为加权余量法。

因为按给定权函数W_j展开的*式意味着余量对W_j取广义矩，故该式的构造亦就被称为矩量法。

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

α_i不是空间坐标的函数，且L为线性算子

$$\int_v W_j (L\tilde{u}) dv = \int_v W_j L(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i) dv$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_v W_j L(u_i) dv$$

利用**内积**的表达方式

$$\int_v W_j (L\tilde{u}) dv = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle W_j, L(u_i) \rangle$$

同理

$$\int_v W_j g dv = \langle W_j, g \rangle$$

三、矩量法的一般过程

1. 用线性的独立的函数来近似表示未知函数

$$u(z')=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n u_n(z')=[\alpha]^T[u]$$

其中α_n为待定系数（可为复数），$u_n(z')$为算子域内的基函数，N为正整数。

$$[\alpha]=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_N\end{bmatrix}\qquad [u]=\begin{bmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_N\end{bmatrix}$$

2. 选取检验函数(权函数）$\{\omega_m\}$，将算子方程两端与检验函数求内积：

$$\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\langle\omega_m, L(u_n)\rangle=\langle\omega_m, g\rangle \qquad m=1,2,\cdots,N$$

展开函数数目 与 权函数数目相等，方程组可写成矩阵形式：

$$Z \quad \alpha = V$$

$$[Z]=\begin{bmatrix} <w_1,L(u_1)> & <w_1,L(u_2)> & \cdots & <w_1,L(u_N)> \\ <w_2,L(u_1)> & <w_2,L(u_2)> & \ldots & <w_n,L(u_N)> \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ <w_N,L(u_1)> & <w_N,L(u_2)> & \cdots & <w_n,L(u_N)> \end{bmatrix}$$

$$Z_{mn}=<w_m,L(u_n)>$$

$$[V]=\begin{bmatrix} <w_1,g> \\ \vdots \\ <w_N,g> \end{bmatrix} \qquad V_m=<w_m,g>$$

3.求解矩阵方程

由上，通过矩量法将算子方程化为代数方程组。

从而，在基函数｛u_n｝构造的基础上，进一步选定权函数｛W_m｝，就可计算出［Z］和[V]中的各个元素，并由此解出待求函数u的离散解u_n（n=1，2，…，N）。

显然，原则上，只要增加所构造的基函数的项数N，将保证近似解收敛于精确解。

例 研究 $L(u)=g$ ，其中 $L=-\frac{d^2}{dx^2}$

$$g=1+4x^2 \qquad u(0)=u(1)=0$$

解：已知此问题存在精确解

$$u_0(x)=\frac{5}{6}x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^4$$

下面采用矩量法求解，选择基函数

$$u_n(x)=x-x^{n+1} \quad n=1,2,\ldots,\ N$$

再选择权函数

$$\omega_m=u_m=x-x^{m+1}, \quad m=1,2,\ldots,\ N$$

------Galerkin法

内积定义为 $$\langle \omega, g \rangle = \int_0^1 \omega(x) g(x) dx$$

$$Z_{mn} = \langle \omega_m, L(u_n) \rangle = \int_0^1 (x - x^{m+1})[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x - x^{n+1})]\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 n(n+1)(x^n - x^{m+n})\mathrm{d}x = \frac{mn}{m+n+1}$$

$$V_m = \langle \omega_m, g \rangle = \int_0^1 (x - x^{m+1})(1+4x^2)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 (x - x^{m+1} + 4x^3 - 4x^{m+3})\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{m+2} + 1 - \frac{4}{m+4} = \frac{m(3m+8)}{2(m+2)(m+4)}$$

Case 1: N=1

$$Z_{11} = \frac{1}{3}, \quad V_1 = \frac{11}{30}, \quad \alpha_1 = \frac{11}{10}$$

$$\Rightarrow \quad u(x) \approx \frac{1}{10}(x - x^2)$$

Case 2: N=2

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{12} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = 60 \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad u(x) \approx \frac{1}{10}(x - x^2) + \frac{2}{3}(x - x^3) = \frac{23}{30}x - \frac{1}{10}x^2 - \frac{2}{3}x^3$$

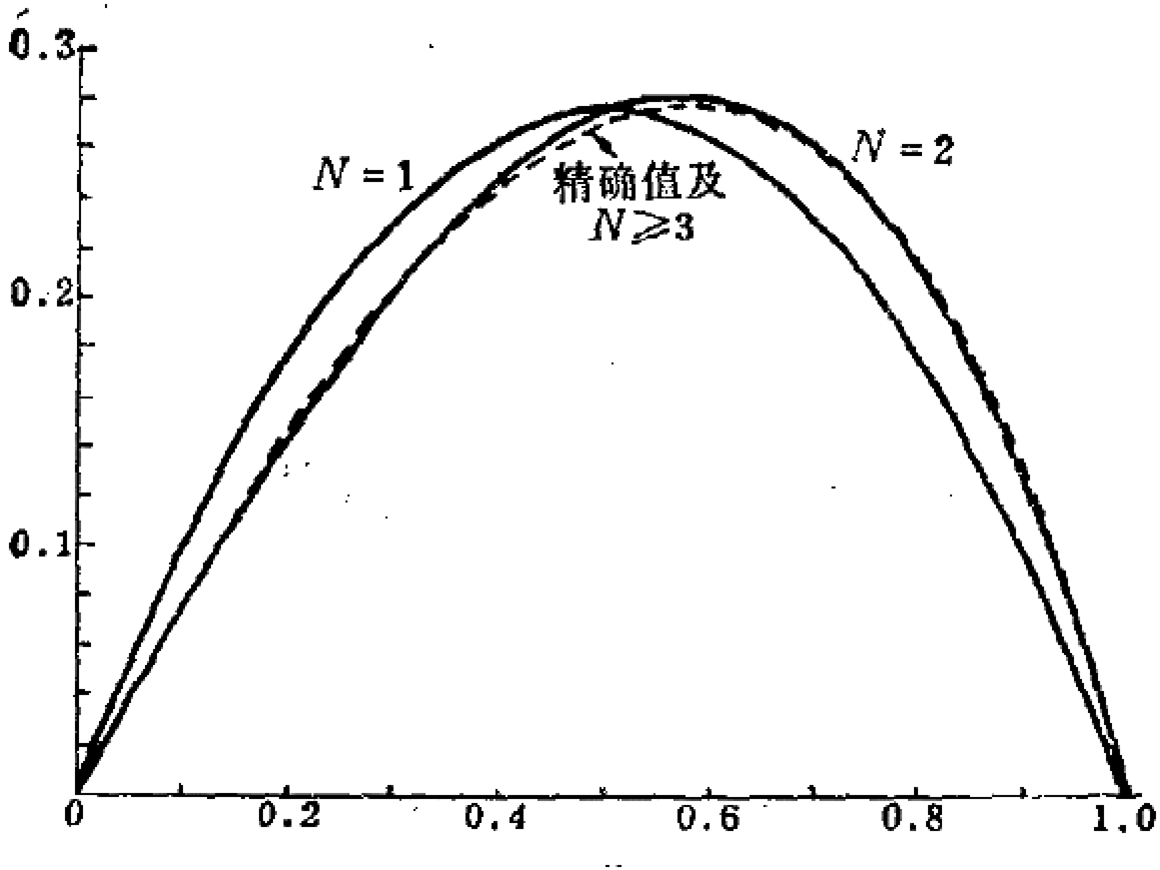
Case3: *N*=3

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & 1 \\ \frac{3}{5} & 1 & \frac{9}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{12} \\ \frac{51}{70} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$u(x) = \frac{1}{2}(x - x^2) + \frac{1}{3}(x - x^4) = \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^4 = u_0(x)$$

显然第三级解就是精确解，当N=4时，可再次得到精确解，对于更高的N，也是如此。

矩量法解的曲线如图所示：



Thank you

End

whu@mail.xidian.edu.cn

http://web.xidian.edu.cn/whu/