背景知识

由采样的定义可知，对连续时间系统冲激响应函数 $h_c(t)$ 采样，可看作是将 $h_c(t)$ 与冲激串函数 $p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ 相乘，取样得到离散时间函数：

$$h(t)=h_c(t)p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_c(nT)\delta(t-nT)$$

因 t 仅在时间轴的离散点上取值，可将 $h(t)$ 改记为 $h(nT)=h_c(t)\big|_{t=nT}$， $n=0,\ 1,\ 2,\ \dots$，其中 T 是采样周期。可以看出， $h(nT)$ 是整数 n 的函数，这样 $h(nT)$ 可简记为 $h(n)$，称为离散时间序列。

设连续时间函数 $h_c(t)$ 及 $h(t)$ 的离散傅里叶变换为 $H_c(j\omega)$ 和 $H(j\omega)$，他们之间关系为：

$$H(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}H_c(j(\omega-n\omega_s))，\quad \omega_s=\frac{2\pi}{T}$$

离散时间函数 $h(n)$ 的傅里叶变换 $H(e^{j\theta})$ 为：

$$H(e^{j\theta})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)e^{-jk\theta}$$

设连续时间函数 $h_c(t)$ 及 $h(t)$ 的拉普拉斯变换为 $H_c(s)$ 和 $H(s)$，则 $h(t)$ 的拉普拉斯变换可以改写为：

$$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(nT)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_c(nT)\delta(t-nT)\right)e^{-st}dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_c(nT)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)e^{-st}dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)e^{-nsT}$$

对比离散时间序列 $h(n)$ 的 z 变换：

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}$$

由 s 平面到 z 平面的映射关系 $z=e^{sT}$，我们可以得到连续时间系统函数 $H(s)$ 和离散时间系统函数 $H(z)$ 直接关系是：

$$H(s)=H(z)\big|_{z=e^{sT}} \quad \text{或} \quad H(z)=H(s)\big|_{s=(1/T)\ln z}$$

其中：$s=\sigma+j\omega$，$z=re^{j\theta}$：

$$\begin{cases} r=e^{\sigma T} \\ \theta=\omega T \end{cases}$$

当系统稳定时，连续时间系统有：

$$H_c(j\omega)=H_c(s)\big|_{s=j\omega}$$

$$H(j\omega)=H(s)\big|_{s=j\omega}$$

离散时间系统有:

$$H(e^{j\theta})=H(z)\big|_{z=e^{j\theta}}$$

推荐参考资料：

[1] Jackson L B. Correction to impulse invariance[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2000, 7(10):273-275.

[2] Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer 著，黄建国, 刘树棠, 张国梅译，Discrete-time signal processing，电子工业出版社, 2015

[3] Proakis J G, Manolakis D G，方艳梅等译 Digital Signal Processing : Principles, Algorithms, and Applications / J.G. Proakis, D.G. Manolakis[M]. 电子工业出版社, 2014.

[4] 胡广书，《数字信号处理 理论算法与实现 第 3 版》，清华大学出版社，2014.

[5] 高西全，丁玉美 编著，《数字信号处理 第 4 版》，西安电子科技大学出版社，2016.