23、匹配网络设计

苏 涛
西安电子科技大学，电子工程学院
710071

22、匹配网络设计

1、匹配网络概述

2、四分之一阻抗变换器

3、多节阻抗变换器

匹配网络

- 改善负载能量传输状态；
- 无耗网络；
- 通常用于一定频带内，带宽；

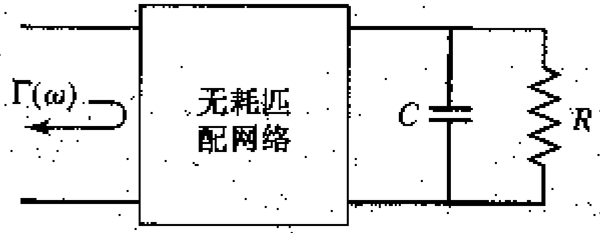
从最一般的观点看，我们可以提出下列问题：

- 可以在设定的带宽上达到完全匹配（零反射）吗？
- 若不能，应该如何做？在通带最大容许反射系数和带宽之间如何协调？
- 对于给定规格要求的网络，匹配如何综合？

Bode-Fano约束条件

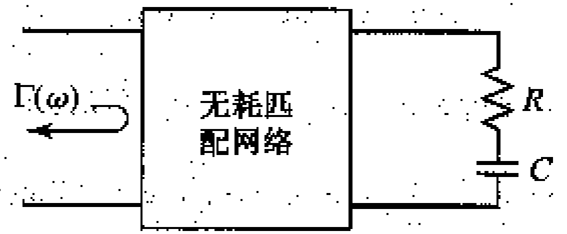
对某些标准类型的负载阻抗，它给出了用任意匹配网络获得的最小反射系数幅值的理论极限。

电路 | Bode-Fano 限制



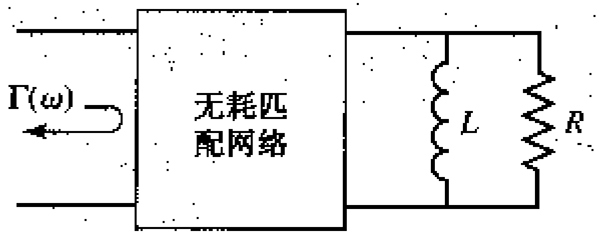
$$\int_0^{\infty} \ln \frac{1}{|\Gamma(\omega)|}\, d\omega < \frac{\pi}{RC}$$

(a)



$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\omega^2} \ln \frac{1}{|\Gamma(\omega)|}\, d\omega < \pi RC$$

(b)



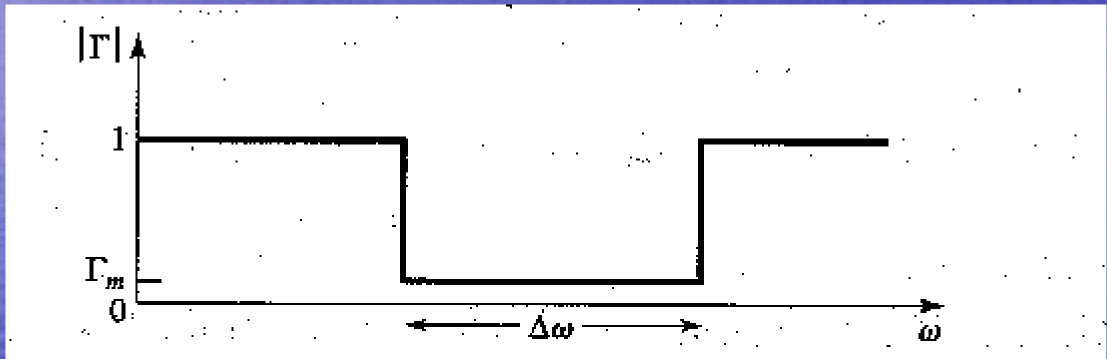
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\omega^2} \ln \frac{1}{|\Gamma(\omega)|}\, d\omega < \frac{\pi L}{R}$$

(c)

$$\int_0^{\infty} \ln \frac{1}{|\Gamma(\omega)|}\, d\omega < \frac{\pi R}{L}$$

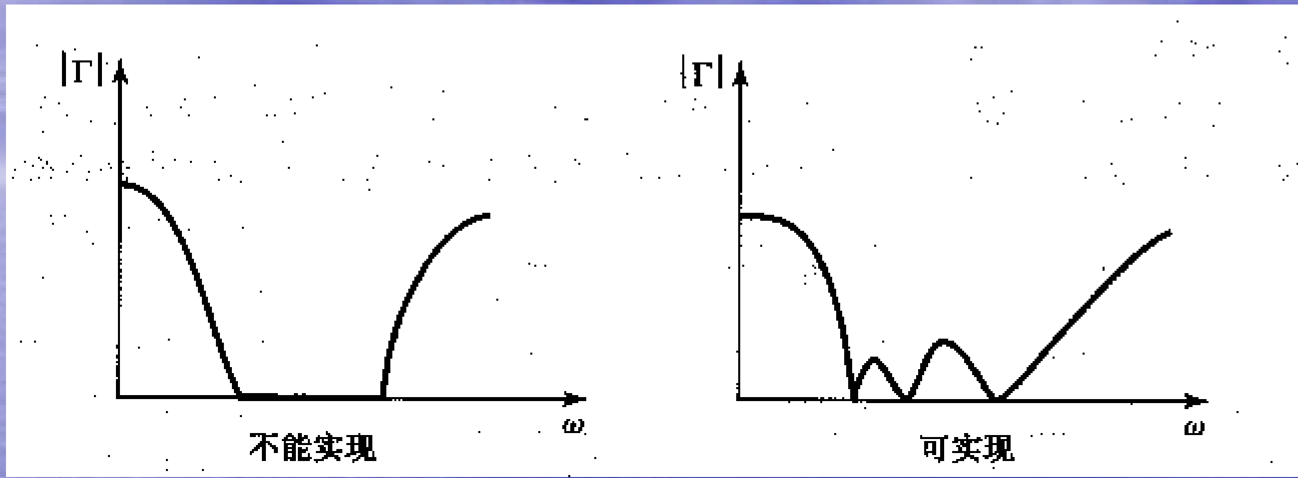
(d)

综合一个匹配网络，要求下图的反射系数，如上图**(a)**所示的约束条件，



$$\int_0^\infty \ln\frac{1}{|\Gamma|}dw=\int_{\Delta w}\ln\frac{1}{\Gamma_m}dw=\Delta w\ln\frac{1}{\Gamma_m}\le\frac{p}{RC}$$

- 对于给定的负载（**RC**乘积固定），只有以通带内有较高的反射系数为代价，才能达到较宽的带宽；
- 通带内的反射系数不能为零，除非带宽为零。所以只有在有限个频率上能达到完全匹配；
- 当**R**和 **/** 或**C**增加时，匹配质量（带宽和反射系数倒数）必须降低，所以高**Q**电路本质上比低**Q**值电路更难以匹配。



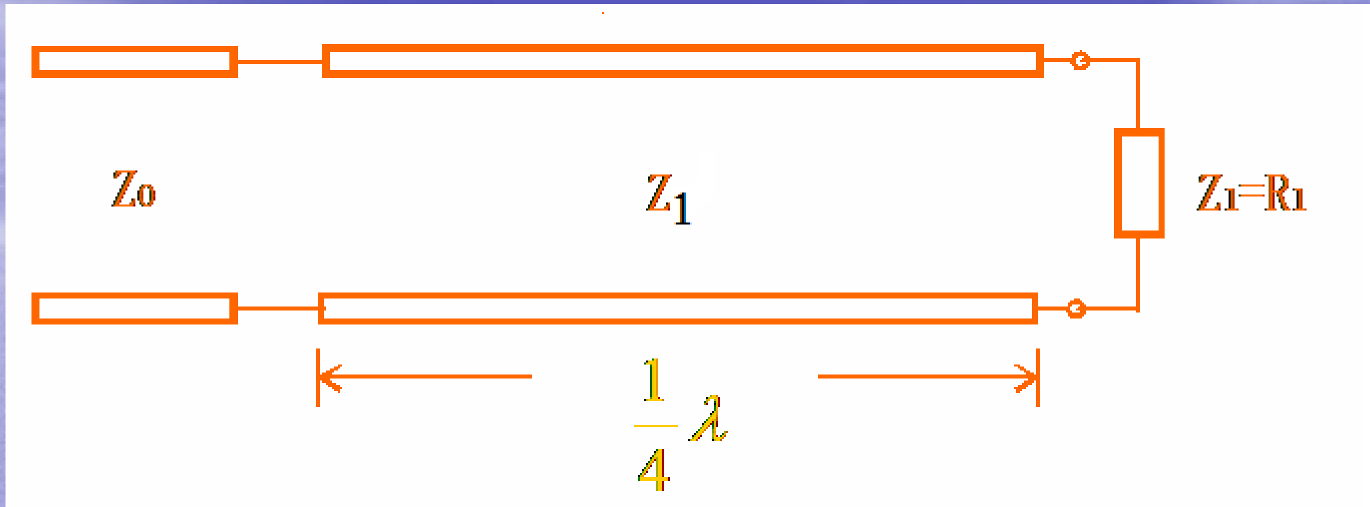
显然的，匹配电路本质上即是滤波电路。

22、匹配网络设计

1、匹配网络概述

2、四分之一阻抗变换器

3、多节阻抗变换器



$$Z_1 = \sqrt{Z_l Z_0}$$

下面重点讨论其频率变化特性，即频带特性；

$$Z_{in} = Z_1 \frac{Z_L + jZ_1 t}{Z_1 + jZ_L t}$$

其中， $t = \tan q = \tan b\, l$

在设计频率$\boldsymbol{f_0}$处， $q = b\, l = p/2$

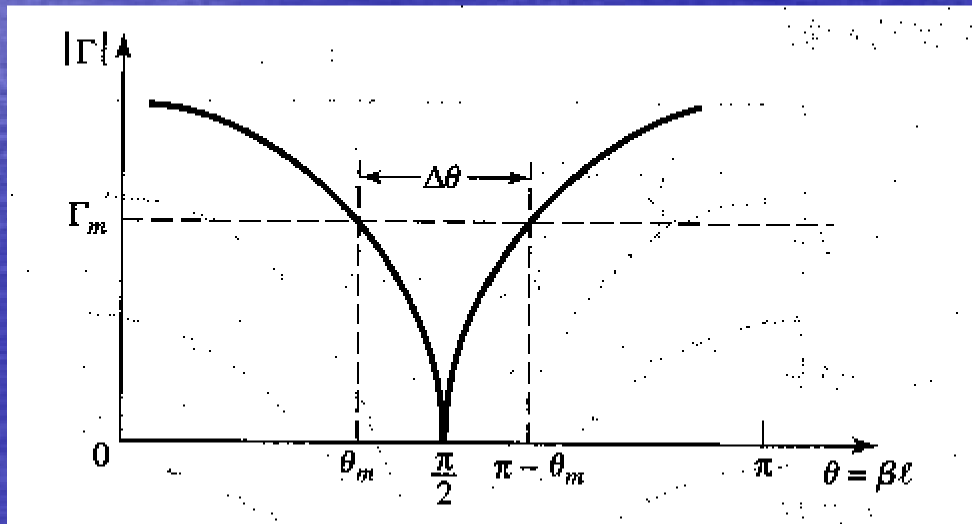
$$\Gamma = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} = \frac{Z_1\left(Z_L - Z_0\right) + jt\left(Z_1^2 - Z_0 Z_L\right)}{Z_1\left(Z_L + Z_0\right) + jt\left(Z_1^2 + Z_0 Z_L\right)}$$

计及 $Z_1 = \sqrt{Z_l Z_0}$

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0 + jt\sqrt{Z_0 Z_L}}$$

$$|\Gamma| = \frac{1}{\left\{1 + \left[4Z_0 Z_L / (Z_L - Z_0)^2\right] \sec^2 q\right\}^{1/2}}$$

$$\approx \frac{|Z_L - Z_0|}{2\sqrt{Z_0 Z_L}} |\cos q| \qquad , \qquad q \rightarrow \frac{p}{2}$$



定义匹配带宽：

$$\Delta q = 2\left(\frac{p}{2} - q_m\right)$$

$$\cos q_m = \frac{\Gamma_m}{\sqrt{1-\Gamma_m^2}} \frac{2\sqrt{Z_0 Z_L}}{\left|Z_L - Z_0\right|}$$

假定采用**TEM**传输线，

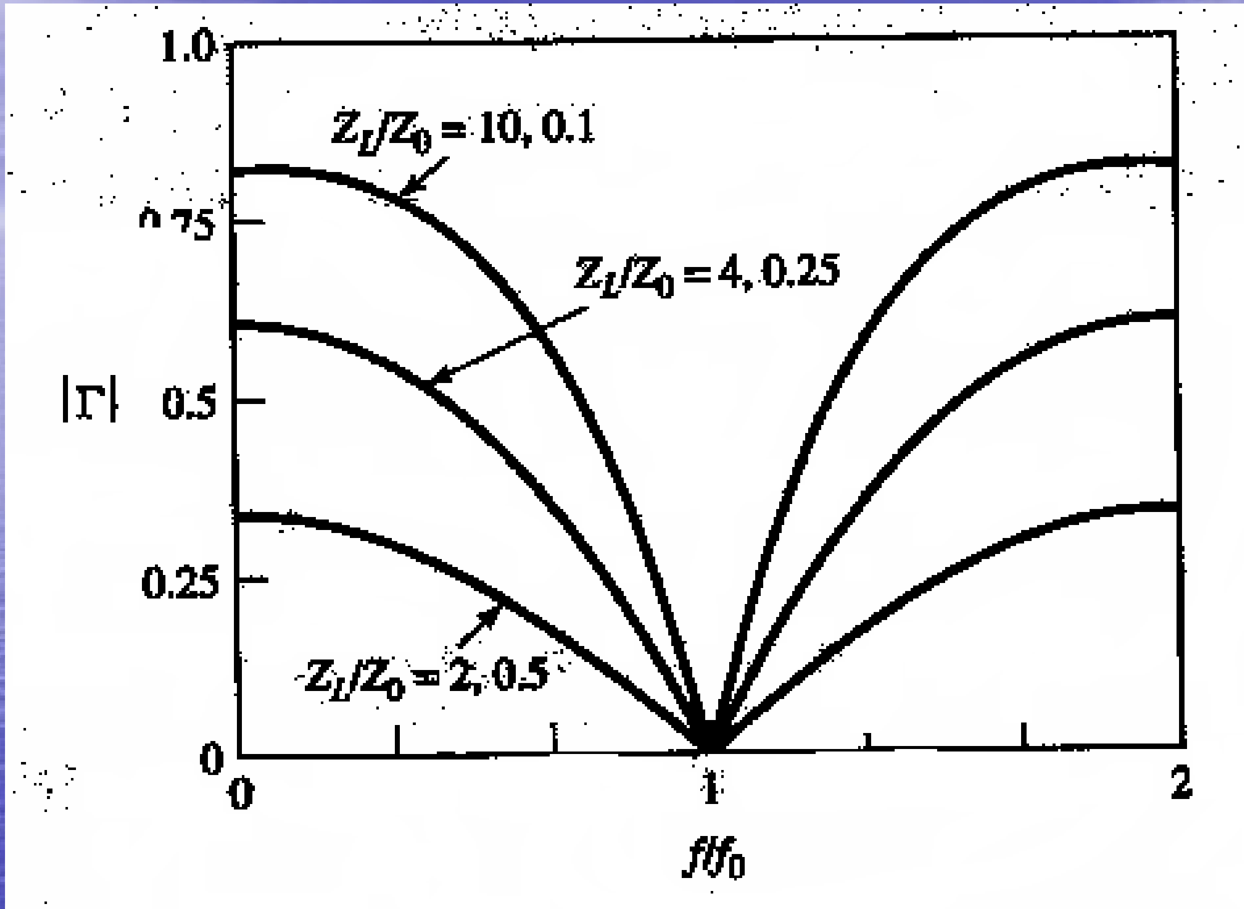
$$q = bl = \frac{2pf}{v_p}\frac{v_p}{4f_0} = \frac{pf}{2f_0}$$

$$f_m = \frac{2q_m f_0}{p}$$

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{2\left(f_0 - f_m\right)}{f_0} = 2 - \frac{2f_m}{f_0} = 2 - \frac{4q_m}{p}$$

$$= 2 - \frac{4}{p}\arccos\left[\frac{\Gamma_m}{\sqrt{1-\Gamma_m^2}} \frac{2\sqrt{Z_0 Z_L}}{\left|Z_L - Z_0\right|}\right]$$

相对带宽，百分比带宽



1.0
0.75
0.5
0.25
0
|Γ|
$Z_L/Z_0 = 10, 0.1$
$Z_L/Z_0 = 4, 0.25$
$Z_L/Z_0 = 2, 0.5$
0
1
2
f/f_0

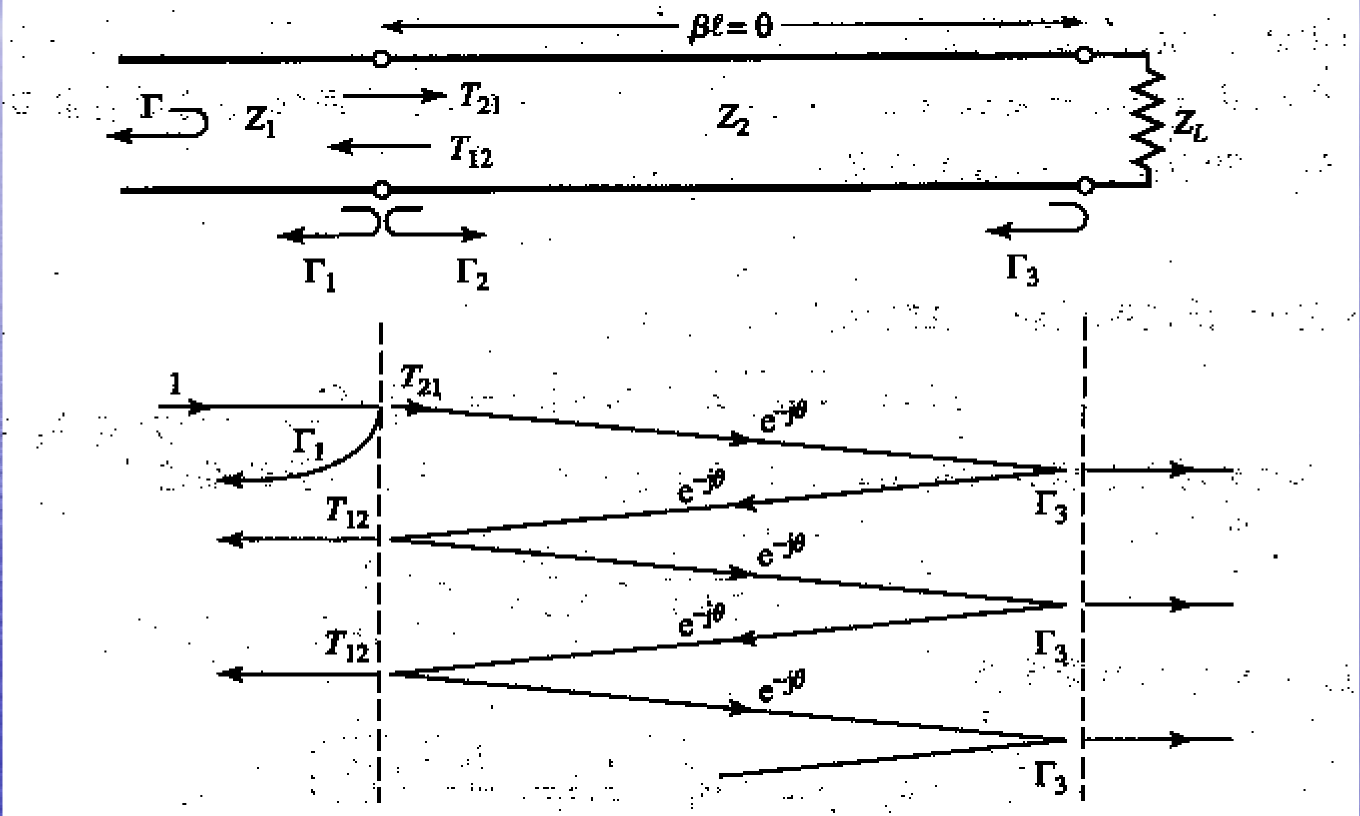
22、匹配网络设计

1、匹配网络概述

2、四分之一阻抗变换器

3、多节阻抗变换器

1、单节变换器



在单节匹配变换器上的局部反射和传输

$$\Gamma_1 = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

$$\Gamma_2 = -\Gamma_1$$

$$\Gamma_3 = \frac{Z_L - Z_2}{Z_L + Z_2}$$

$$T_{21} = 1 + \Gamma_1 = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$T_{12} = 1 + \Gamma_2 = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

$$\Gamma = \Gamma_1 + T_{12}T_{21}\Gamma_3 e^{-j2q} + T_{12}T_{21}\Gamma_3^2\Gamma_2 e^{-j4q} + \mathbf{L}$$

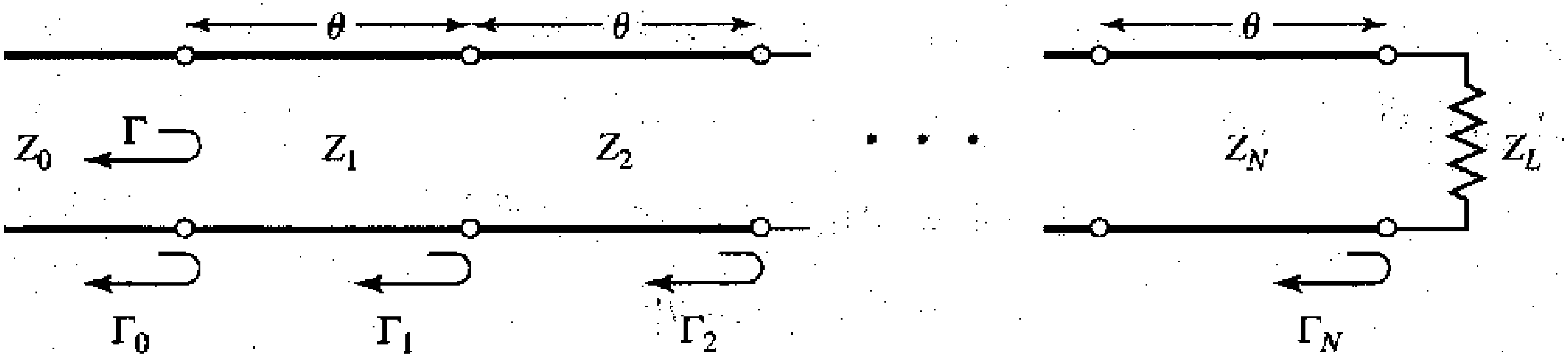
$$= \Gamma_1 + T_{12}T_{21}\Gamma_3 e^{-j2q}\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma_2^n\Gamma_3^n e^{-j2nq}$$

计及， $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$

$$\Gamma = \Gamma_1 + \frac{T_{12}T_{21}\Gamma_3 e^{-j2q}}{1-\Gamma_2\Gamma_3 e^{-j2q}} = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_3 e^{-j2q}}{1+\Gamma_1\Gamma_3 e^{-j2q}}$$

$$\boxed{\Gamma \approx \Gamma_1 + \Gamma_3 e^{-j2q}}$$

2、多节变换器



多节匹配变换器上的局部反射系数

$$\Gamma_0 = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0}, \quad \Gamma_n = \frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1} + Z_n}, \quad \Gamma_N = \frac{Z_L - Z_N}{Z_L + Z_N}$$

小反射定理：

$$\boxed{\Gamma \approx \Gamma_0 + \Gamma_1 e^{-j2q} + \Gamma_2 e^{-j4q} + \mathbf{L} + \Gamma_N e^{-j2Nq}}$$

总反射主要来自各个不连续性本身，其叠加包括各自的相位延迟；各个不连续性相互的作用是高阶小量，通常可以忽略。

如何利用多节阻抗变换器实现具有一定带宽的匹配？

- 理想匹配的需求已知，其可能实现形式和逼近形式可以采用**Butterworth**、**Chebyshev**等逼近；
- 多节阻抗变换器特性已知；

能否在两者之间构架桥梁？即能否采用多节阻抗变化器实现**Butterworth**等响应，或者**Butterworth**等综合能否采用多节阻抗变换器实现？

进一步假定多节阻抗变换器对称，即

$$\Gamma_0 = \Gamma_N,\ \Gamma_1 = \Gamma_{N-1}, \mathbf{L}$$

$$\boxed{\Gamma \approx \Gamma_0 + \Gamma_1 e^{-j2q} + \Gamma_2 e^{-j4q} + \mathbf{L} + \Gamma_N e^{-j2Nq}}$$

$$\Gamma = e^{-jNq}\left\{\Gamma_0\left(e^{jNq} + e^{-jNq}\right) + \Gamma_1\left(e^{j(N-2)q} + e^{-j(N-2)q}\right) + \mathbf{L}\right\}$$

即，上式是 q 的有限项傅里叶余弦级数；如果项数足够多，可以近似任意的频率的平滑函数。

$$\Gamma(q) = 2e^{-jNq} \begin{Bmatrix} \Gamma_0 \cos Nq + \Gamma_1 \cos(N-2)q + \mathbf{L} + \Gamma_n \cos(N-2n)q \\ + \mathbf{L} + \dfrac{1}{2}\Gamma_{N/2} \end{Bmatrix}, \quad N \ even$$

$$\Gamma(q) = 2e^{-jNq} \begin{Bmatrix} \Gamma_0 \cos Nq + \Gamma_1 \cos(N-2)q + \mathbf{L} + \Gamma_n \cos(N-2n)q \\ + \mathbf{L} + \Gamma_{(N-1)/2} \cos q \end{Bmatrix}, \quad N \ odd$$

3、二项式多节匹配变换器

最平坦响应：中心频率f_0处，反射系数模值的前 $N-1$ 阶导数为零。

$$\Gamma(\theta)=A\left(1+e^{-j2\theta}\right)^N$$

$$\left|\Gamma(\theta)\right|=\left|A\right|\left|e^{-j\theta}\right|^N\left|e^{j\theta}+e^{-j\theta}\right|^N$$

$$=2^N\left|A\right|\left|\cos\theta\right|^N$$

显然的，

$$\left.\frac{d^n\left|\Gamma(\theta)\right|}{d\theta^n}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0,\quad n=1,2,\ldots,N-1$$

此时，每一节传输线长度为**1/4**波长，称为四分之一波长阶梯阻抗变换器。

长度为零，意味着直联负载，有

$$\Gamma(0) = 2^N A = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

得到，

$$A = 2^{-N} \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

二项式展开，

$$\Gamma(q) = A\left(1+e^{-j2q}\right)^{N} = A\sum_{n=0}^{N} C_n^N e^{-j2nq}$$

$$C_n^N = \frac{N!}{(N-n)!\,n!}$$

$$C_n^N = C_{N-n}^N, \quad C_0^N = 1, \quad C_1^N = N$$

$$\Gamma(q) = A\sum_{n=0}^{N} C_n^N e^{-j2nq} = \Gamma_0 + \Gamma_1 e^{-j2q} + \Gamma_2 e^{-j4q} + \mathbf{L} + \Gamma_N e^{-j2Nq}$$

得到，

$$\Gamma_n = AC_n^N$$

此时，特性阻抗可以依次求得，也可以近似获得，

$$\ln x \approx 2(x-1)/(x+1)$$

$$\Gamma_n = \frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1} + Z_n} \approx \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{n+1}}{Z_n}$$

$$\ln \frac{Z_{n+1}}{Z_n} \approx 2\Gamma_n = 2AC_n^N = 2\left(2^{-N}\right)\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} C_n^N \approx 2^{-N} C_n^N \ln \frac{Z_L}{Z_0}$$

$$\ln\frac{Z_{n+1}}{Z_n}\approx 2^{-N}C_n^N\ln\frac{Z_L}{Z_0}$$

即，阶梯阻抗变换器。

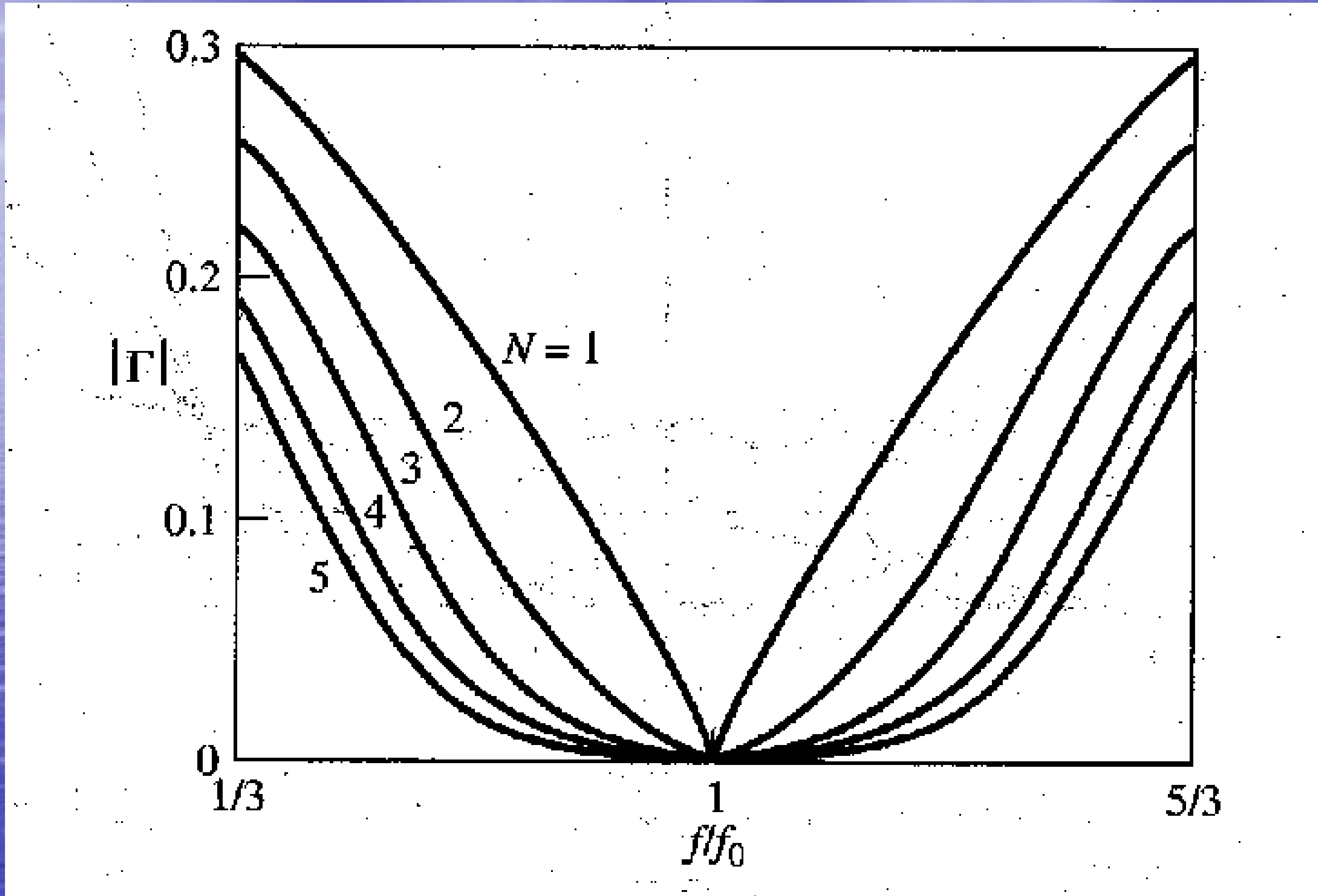
阶梯阻抗变换器匹配带宽分析：

$$\Gamma_m = 2^N |A| \cos^N q_m$$

$q_m < p/2$ 是通带的低端，

$$q_m = \arccos\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma_m}{|A|}\right)^{1/N}\right]$$

$$\frac{\Delta f}{f_0} = 2 - \frac{4}{p}\arccos\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma_m}{|A|}\right)^{1/N}\right]$$



0.3
0.2
0.1
0
$|\Gamma|$
$N = 1$
2
3
4
5
1/3
1
5/3
f/f_0

4、Chebyshev多节变换器

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \qquad |x| < 1$$

$$T_n(x) = \cosh(n \arccos x), \qquad |x| < 1$$

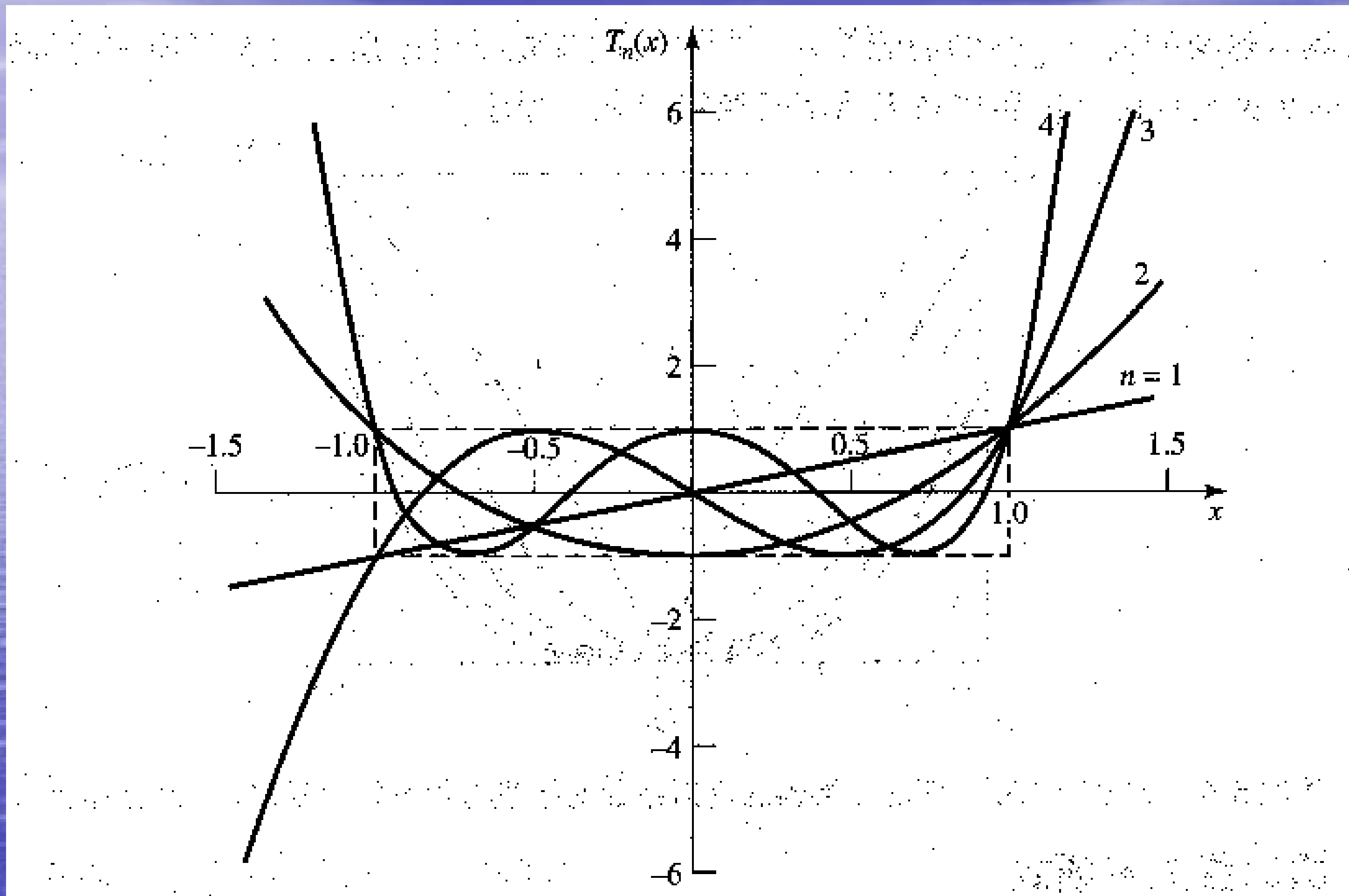
$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$



$T_n(x)$
6
4
2
−2
−4
−6
−1.5
−1.0
−0.5
0.5
1.5
1.0
x
4
3
2
$n = 1$

希望在变换器的通带内等波纹，必须使得

$$q_m \leftrightarrow 1$$

$$p - q_m \leftrightarrow -1$$

$$T_n\left(\frac{\cos q}{\cos q_m}\right) = T_n\left(\sec q_m \cos q\right) = \cos n\left[\arccos\left(\frac{\cos q}{\cos q_m}\right)\right]$$

$$T_1(\sec\theta_m \cos\theta) = \sec\theta_m \cos\theta$$

$$T_2(\sec\theta_m \cos\theta) = \sec^2\theta_m(1 + \cos 2\theta) - 1$$

$$T_3(\sec\theta_m \cos\theta) = \sec^3\theta_m(\cos 3\theta + 3\cos\theta) - 3\sec\theta_m \cos\theta$$

$$T_4(\sec\theta_m \cos\theta) = \sec^4\theta_m(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3)$$
$$- 4\sec^2\theta_m(\cos 2\theta + 1) + 1$$

$$\Gamma(q) = 2e^{-jNq}\{\Gamma_0 \cos Nq + \Gamma_1 \cos(N-2)q + \mathbf{L} + \Gamma_n \cos(N-2n)q + \mathbf{L}\}$$

$$= Ae^{-jNq} T_N(\sec q_m \cos q)$$

A, θ_m 的确定：

$$\Gamma(0) = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = A T_N(\sec\theta_m)$$

$$A = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \frac{1}{T_N(\sec\theta_m)}$$

$T_n(\sec\theta_m \cos\theta)$ 的最大值是**1**，

$$T_N(\sec\theta_m) = \frac{1}{\Gamma_m}\left|\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}\right| \approx \frac{1}{2\Gamma_m}\left|\ln\frac{Z_L}{Z_0}\right|$$

$$
\begin{aligned}
\sec\theta_m &= \cosh\left[\frac{1}{N}\operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\Gamma_m}\left|\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}\right|\right)\right] \\
&\approx \cosh\left[\frac{1}{N}\operatorname{arcosh}\left(\left|\frac{\ln Z_L/Z_0}{2\Gamma_m}\right|\right)\right]
\end{aligned}
$$

展开反射系数多项式，对应项相等，得到反射系数。