21、 耦合谐振腔电路和耦合矩阵

苏 涛
西安电子科技大学，电子工程学院
710071

耦合谐振腔电路和耦合矩阵

一、耦合谐振腔滤波器的耦合矩阵

二、一般耦合理论

三、提取耦合系数

四、提取外部Q值

耦合谐振腔电路和耦合矩阵

一、耦合谐振腔滤波器的耦合矩阵

二、一般耦合理论

三、提取耦合系数

四、提取外部Q值

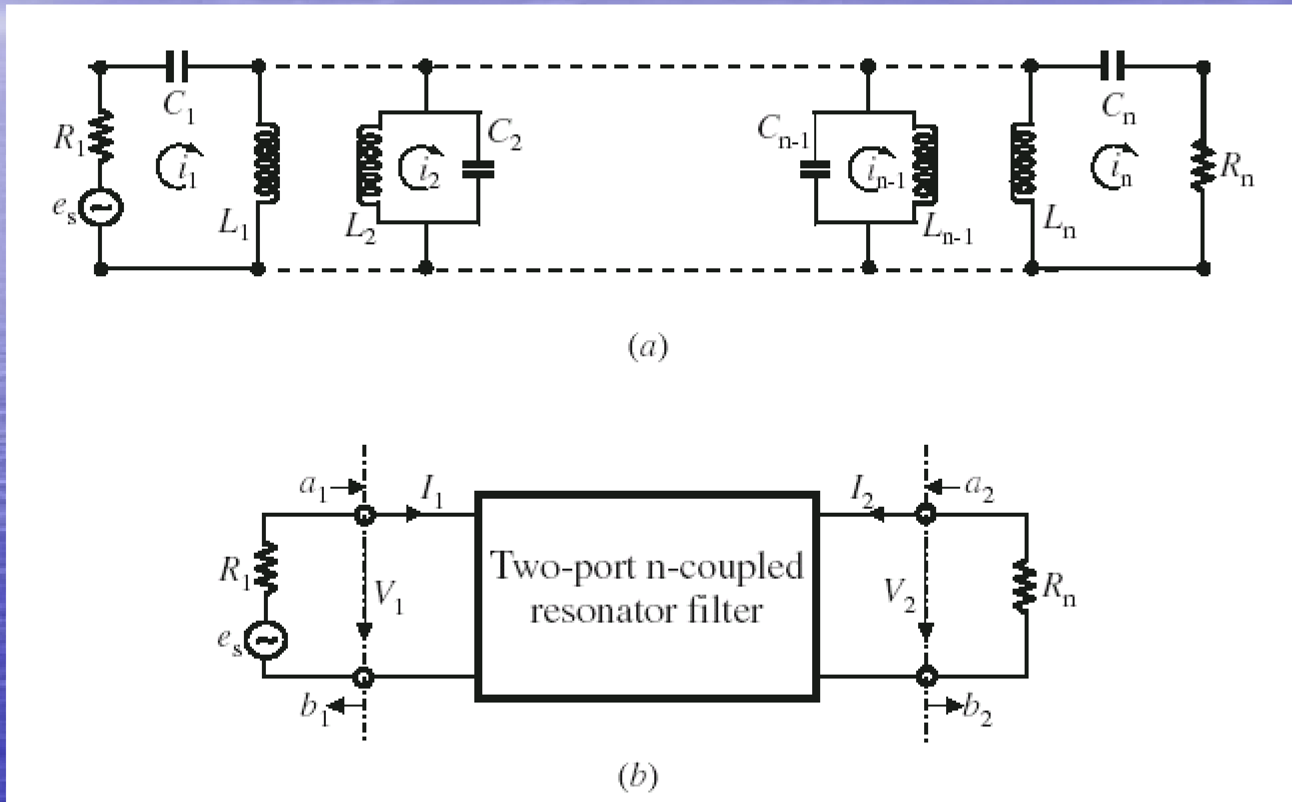
一、耦合谐振腔滤波器的耦合矩阵

1.1 电感耦合谐振腔滤波器

1.2 电容耦合谐振腔滤波器

1.3 混合耦合谐振腔滤波器

1.1 电感耦合谐振腔滤波器



电感耦合谐振腔滤波器等效电路和其等效滤波网络

根据电压环路定理，得到

$$\left(R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right)i_1 - j\omega L_{12}i_2 \cdots - j\omega L_{1n}i_n = e_s$$

$$-j\omega L_{21}i_1 + \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right)i_2 \cdots - j\omega L_{2n}i_n = 0$$

$$\vdots$$

$$-j\omega L_{n1}i_1 - j\omega L_{n2}i_2 \cdots + \left(R_n + j\omega L_n + \frac{1}{j\omega C_n}\right)i_n = 0$$

其中 L_{ij} 表示 i，j 两腔体之间的耦合电感。

写成矩阵形式，即

$$\begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1} & -j\omega L_{12} & \cdots & -j\omega L_{1n} \\ -j\omega L_{21} & j\omega L_2 + \dfrac{1}{j\omega C_2} & \cdots & -j\omega L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -j\omega L_{n1} & -j\omega L_{n2} & \cdots & R_n + j\omega L_n + \dfrac{1}{j\omega C_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[Z]\cdot[i] = [e]$$

为简化讨论，设滤波器各个腔体同步调谐，电感都是L，电容都是C

$$[Z] = \omega_0 L \cdot FBW \cdot [\bar{Z}]$$

其中

$$[\bar{Z}] = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{\omega_0 L \cdot FBW} + p & -j\frac{\omega}{\omega_0}\frac{L_{12}}{L}\cdot\frac{1}{FBW} & \cdots & -j\frac{\omega}{\omega_0}\frac{L_{1n}}{L}\cdot\frac{1}{FBW} \\ -j\frac{\omega}{\omega_0}\frac{L_{21}}{L}\cdot\frac{1}{FBW} & p & \cdots & -j\frac{\omega}{\omega_0}\frac{L_{2n}}{L}\cdot\frac{1}{FBW} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -j\frac{\omega}{\omega_0}\frac{L_{n1}}{L}\cdot\frac{1}{FBW} & -j\frac{\omega}{\omega_0}\frac{L_{n2}}{L}\cdot\frac{1}{FBW} & \cdots & \frac{R_n}{\omega_0 L \cdot FBW} + p \end{bmatrix}$$

$$FBW = \Delta\omega/\omega_0$$

$$p = j\frac{1}{FBW}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

$$R+jwL+\frac{1}{jwC}=R+\frac{1-w^2LC}{jwC}=R+\frac{1-w^2/w_0^2}{jwC}$$

其中

$$LC=1/w_0^2$$

$$R+jwL+\frac{1}{jwC}=R+\frac{1-w^2/w_0^2}{jw/(w_0^2L)}$$

$$=R-jw_0L\frac{1-w^2/w_0^2}{w/w_0}=R+jw_0L\left(\frac{w}{w_0}-\frac{w_0}{w}\right)$$

令

$$p=j\frac{1}{FBW}\left(\frac{w}{w_0}-\frac{w_0}{w}\right)$$

$$R+jwL+\frac{1}{jwC}=R+w_0L\cdot FBW\cdot p=w_0L\cdot FBW\left(\frac{R}{w_0L\cdot FBW}+p\right)$$

注意到 $$\frac{R_i}{\omega_0 L} = \frac{1}{Q_{ei}} \qquad \text{for } i = 1, n$$

源/负载耦合腔的外部Q值（有载Q值）

i，j腔之间的耦合系数 $$M_{ij} = \frac{L_{ij}}{L}$$

再考虑窄带近似 $$\omega/\omega_0 \approx 1$$

$$[\bar{Z}] = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{\omega_0 L \cdot FBW} + p & -j\frac{\omega}{\omega_0}\frac{L_{12}}{L}\cdot\frac{1}{FBW} & \cdots & -j\frac{\omega}{\omega_0}\frac{L_{1n}}{L}\cdot\frac{1}{FBW} \\ -j\frac{\omega}{\omega_0}\frac{L_{21}}{L}\cdot\frac{1}{FBW} & p & \cdots & -j\frac{\omega}{\omega_0}\frac{L_{2n}}{L}\cdot\frac{1}{FBW} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -j\frac{\omega}{\omega_0}\frac{L_{n1}}{L}\cdot\frac{1}{FBW} & -j\frac{\omega}{\omega_0}\frac{L_{n2}}{L}\cdot\frac{1}{FBW} & \cdots & \frac{R_n}{\omega_0 L \cdot FBW} + p \end{bmatrix}$$

$$[\bar{Z}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{q_{e1}} + p & -jm_{12} & \cdots & -jm_{1n} \\ -jm_{21} & p & \cdots & -jm_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -jm_{n1} & -jm_{n2} & \cdots & \frac{1}{q_{en}} + p \end{bmatrix}$$

其中

$$q_{ei} = Q_{ei} \cdot FBW \qquad \text{for } i = 1, n$$

Scaled external quality factor

$$m_{ij} = \frac{M_{ij}}{FBW}$$

Normalized coupling coefficient

称此矩阵为**耦合矩阵**

滤波器双口网络，有

$$a_1 = \frac{e_s}{2\sqrt{R_1}} \qquad b_1 = \frac{e_s - 2i_1R_1}{2\sqrt{R_1}}$$

$$a_2 = 0 \qquad b_2 = i_n\sqrt{R_n}$$

S参数，有

$$S_{21} = \left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{a_2=0} = \frac{2\sqrt{R_1R_n}i_n}{e_s}$$

$$S_{11} = \left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0} = 1 - \frac{2R_1i_1}{e_s}$$

又由电压环路方程，得到

$$i_1 = \frac{e_s}{\omega_0 L \cdot FBW}[\bar{Z}]_{11}^{-1}$$

$$i_n = \frac{e_s}{\omega_0 L \cdot FBW}[\bar{Z}]_{n1}^{-1}$$

带入S参数表示式，得到

$$\boxed{\begin{aligned} S_{21} &= \frac{2\sqrt{R_1 R_n}}{\omega_0 L \cdot FBW}[\bar{Z}]_{n1}^{-1} \\ S_{11} &= 1 - \frac{2R_1}{\omega_0 L \cdot FBW}[\bar{Z}]_{11}^{-1} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} S_{21} &= 2\frac{1}{\sqrt{q_{e1} \cdot q_{en}}}[\bar{Z}]_{n1}^{-1} \\ S_{11} &= 1 - \frac{2}{q_{e1}}[\bar{Z}]_{11}^{-1} \end{aligned}}$$

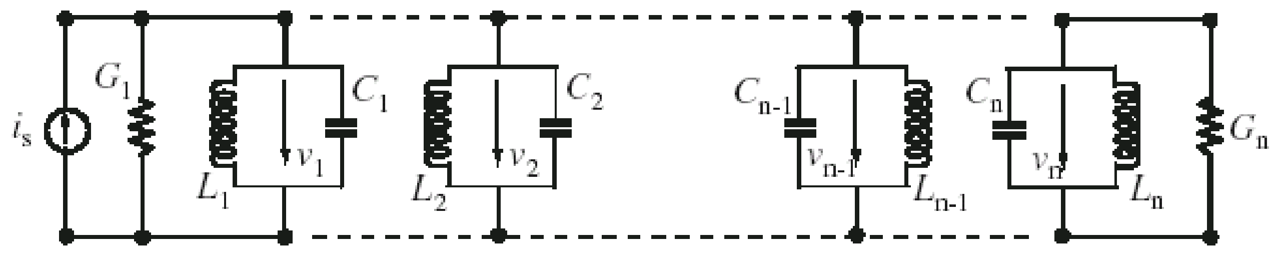
对于异步调谐情况，有

$$M_{ij} = \frac{L_{ij}}{\sqrt{L_i L_j}} \qquad \text{for } i \neq j$$

$$[\bar{Z}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{q_{e1}} + p - jm_{11} & -jm_{12} & \cdots & -jm_{1n} \\ -jm_{21} & p - jm_{22} & \cdots & -jm_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -jm_{n1} & -jm_{n2} & \cdots & \frac{1}{q_{en}} + p - jm_{nn} \end{bmatrix}$$

- 耦合矩阵（电感耦合—电压环路定理）
- 耦合矩阵表示S参数
- 同步/异步调谐
- 增益——耦合矩阵

1.2 电容耦合谐振腔滤波器



$$\left(G_1 + j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1}\right)v_1 - j\omega C_{12}v_2 \cdots - j\omega C_{1n}v_n = i_s$$

$$-j\omega C_{21}v_1 + \left(j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_2}\right)v_2 \cdots - j\omega C_{2n}v_n = 0$$

$$\vdots$$

$$-j\omega C_{n1}v_1 - j\omega C_{n2}v_2 \cdots + \left(G_n + j\omega C_n + \frac{1}{j\omega L_n}\right)v_n = 0$$

类似地，

$$\begin{bmatrix} G_1 + j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1} & -j\omega C_{12} & \cdots & -j\omega C_{1n} \\ -j\omega C_{21} & j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_2} & \cdots & -j\omega C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -j\omega C_{n1} & -j\omega C_{n2} & \cdots & G_n + j\omega C_n + \frac{1}{j\omega L_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[Y]\cdot[v] = [i]$$

$$[Y] = \omega_0 C\cdot FBW\cdot[\bar{Y}]$$

$$[\bar{Y}] = \begin{bmatrix} \frac{G_1}{\omega_0 C\cdot FBW} + p & -j\frac{\omega}{\omega_0}\frac{C_{12}}{C}\cdot\frac{1}{FBW} & \cdots & -j\frac{\omega}{\omega_0}\frac{C_{1n}}{C}\cdot\frac{1}{FBW} \\ -j\frac{\omega}{\omega_0}\frac{C_{21}}{C}\cdot\frac{1}{FBW} & p & \cdots & -j\frac{\omega}{\omega_0}\frac{C_{2n}}{C}\cdot\frac{1}{FBW} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -j\frac{\omega}{\omega_0}\frac{C_{n1}}{C}\cdot\frac{1}{FBW} & -j\frac{\omega}{\omega_0}\frac{C_{n2}}{C}\cdot\frac{1}{FBW} & \cdots & \frac{G_n}{\omega_0 C\cdot FBW} + p \end{bmatrix}$$

$$[\bar{Y}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{q_{e1}} + p - jm_{11} & -jm_{12} & \cdots & -jm_{1n} \\ -jm_{21} & p - jm_{22} & \cdots & -jm_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -jm_{n1} & -jm_{n2} & \cdots & \frac{1}{q_{en}} + p - jm_{nn} \end{bmatrix}$$

$$M_{ij} = \frac{C_{ij}}{\sqrt{C_i C_j}} \qquad \text{for } i \neq j$$

$$S_{21} = \frac{2\sqrt{G_1 G_n}}{\omega_0 C \cdot FBW} [\bar{Y}]_{n1}^{-1}$$

$$S_{11} = \frac{2G_1}{\omega_0 C \cdot FBW} [\bar{Y}]_{11}^{-1} - 1$$

$$S_{21} = 2\frac{1}{\sqrt{q_{e1} \cdot q_{en}}} [\bar{Y}]_{n1}^{-1}$$

$$S_{11} = \frac{2}{q_{e1}} [\bar{Y}]_{11}^{-1} - 1$$

归一化阻抗矩阵Z和归一化导纳矩阵Y相同。

即，无论耦合腔体滤波器是感性耦合，还是容性耦合，亦或是混合耦合，可以使用统一的公式表示。

$$S_{21} = 2\frac{1}{\sqrt{q_{e1} \cdot q_{en}}}[A]_{n1}^{-1}$$

$$S_{11} = \pm\left(1 - \frac{2}{q_{e1}}[A]_{11}^{-1}\right)$$

$$[A]=[q]+p[U]-j[m]$$

其中，q是n*n矩阵，只有 $q_{11}=1/q_{e1}$ $q_{nn}=1/q_{en}$ ，其他均为零；

U是单位矩阵；

m即成为一般耦合矩阵，是n*n对称矩阵；同步调谐时，对角线为零。

$$[q]=\begin{bmatrix} 1/q_{e1} & & \\ & \ddots & \\ & & 1/q_{en} \end{bmatrix} \qquad [m]=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

$[q]$ 表示了源/负载耦合，外部Q值

$[m]$ m_{ij} 表示了腔间耦合，耦合系数

m_{ii} 表示了腔体谐振频率偏差，自耦合系数

上面给出了耦合谐振腔滤波器地一般结论。

级联耦合谐振腔带通滤波器是一个特例：同步谐振，级联耦合

$$[q]=\begin{bmatrix} 1/q_{e1} & & \\ & \ddots & \\ & & 1/q_{en} \end{bmatrix}$$

$$[m]=\begin{bmatrix} 0 & m_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ m_{12} & 0 & m_{23} & \cdots & 0 \\ 0 & m_{23} & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & m_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & m_{n-1,n} & 0 \end{bmatrix}$$

结论：

耦合腔体滤波器设计，可以归结为以下几步：

1、理想特性函数逼近；

2、耦合矩阵计算；

3、物理参数设计。

耦合谐振腔电路和耦合矩阵

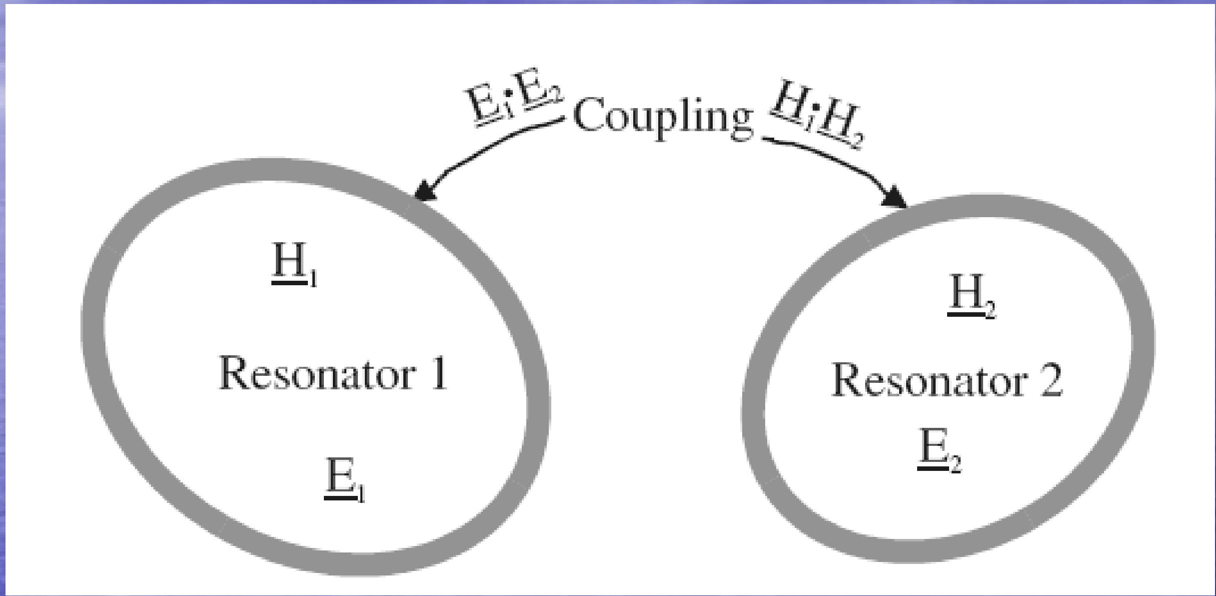
一、耦合谐振腔滤波器的耦合矩阵

二、一般耦合理论

三、提取耦合系数

四、提取外部Q值

一般的，耦合系数由耦合能量和存贮能量之比表示



$$k = \frac{\iiint \varepsilon \underline{E}_1 \cdot \underline{E}_2 dv}{\sqrt{\iiint \varepsilon |\underline{E}_1|^2\, dv \times \iiint \varepsilon |\underline{E}_2|^2\, dv}} + \frac{\iiint \mu \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2 dv}{\sqrt{\iiint \mu |\underline{H}_1|^2\, dv \times \iiint \mu |\underline{H}_2|^2\, dv}}$$

- 耦合系数可正可负

二、一般耦合理论

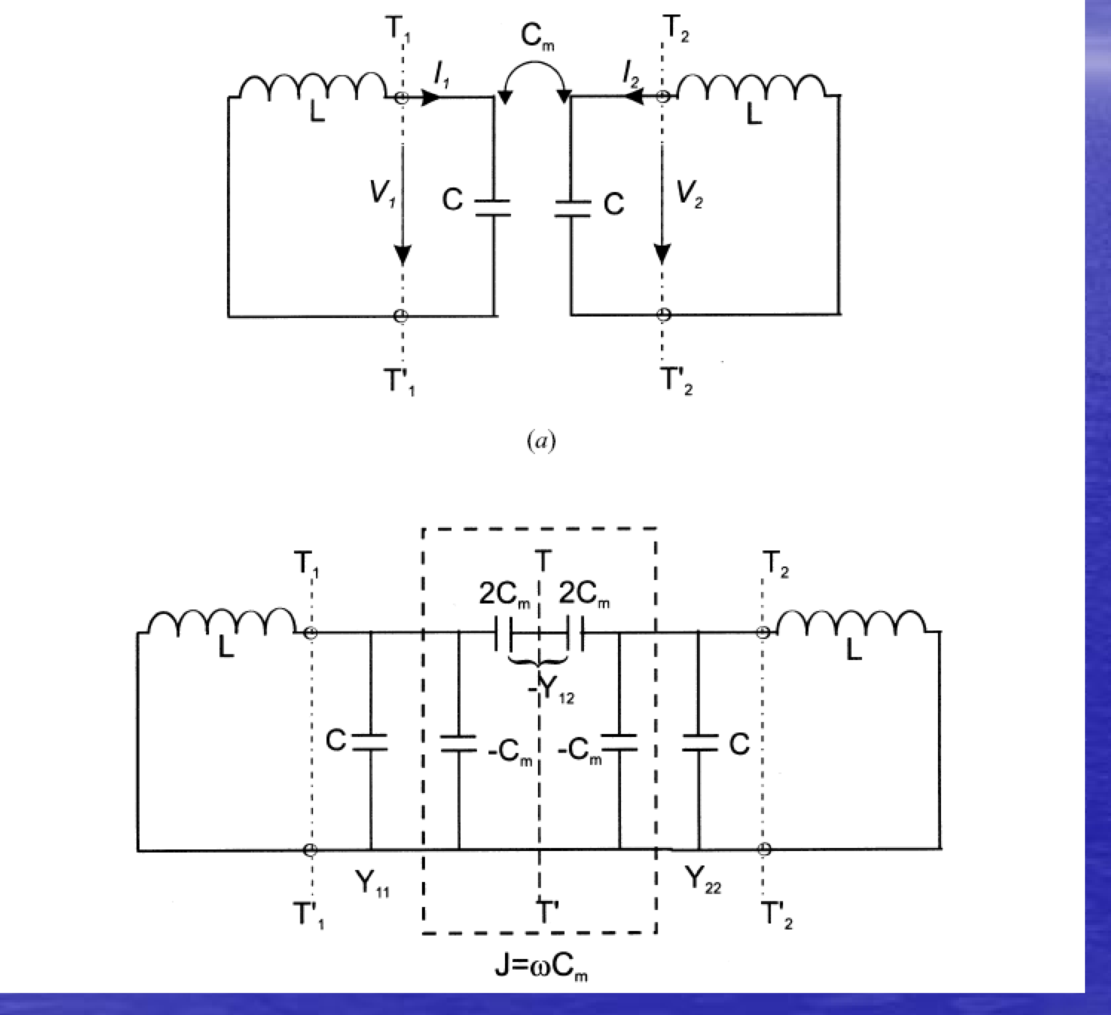
2.1 同步调谐谐振腔耦合

- 2.1.1 电耦合
- 2.1.2 磁耦合
- 2.1.3 混合耦合

2.2 异步调谐谐振腔耦合

- 2.2.1 电耦合
- 2.2.2 磁耦合
- 2.2.3 混合耦合

2.1.1 同步调谐电耦合



T1
Cm
T2
I1
I2
L
L
V1
C
C
V2
T'1
T'2
(a)
T1
T
T2
2Cm
2Cm
L
L
-Y12
C
-Cm
-Cm
C
Y11
Y22
T'1
T'
T'2
J=ωCm

电路对称。对称面是电壁，短路时

$$f_e = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C+C_m)}}$$

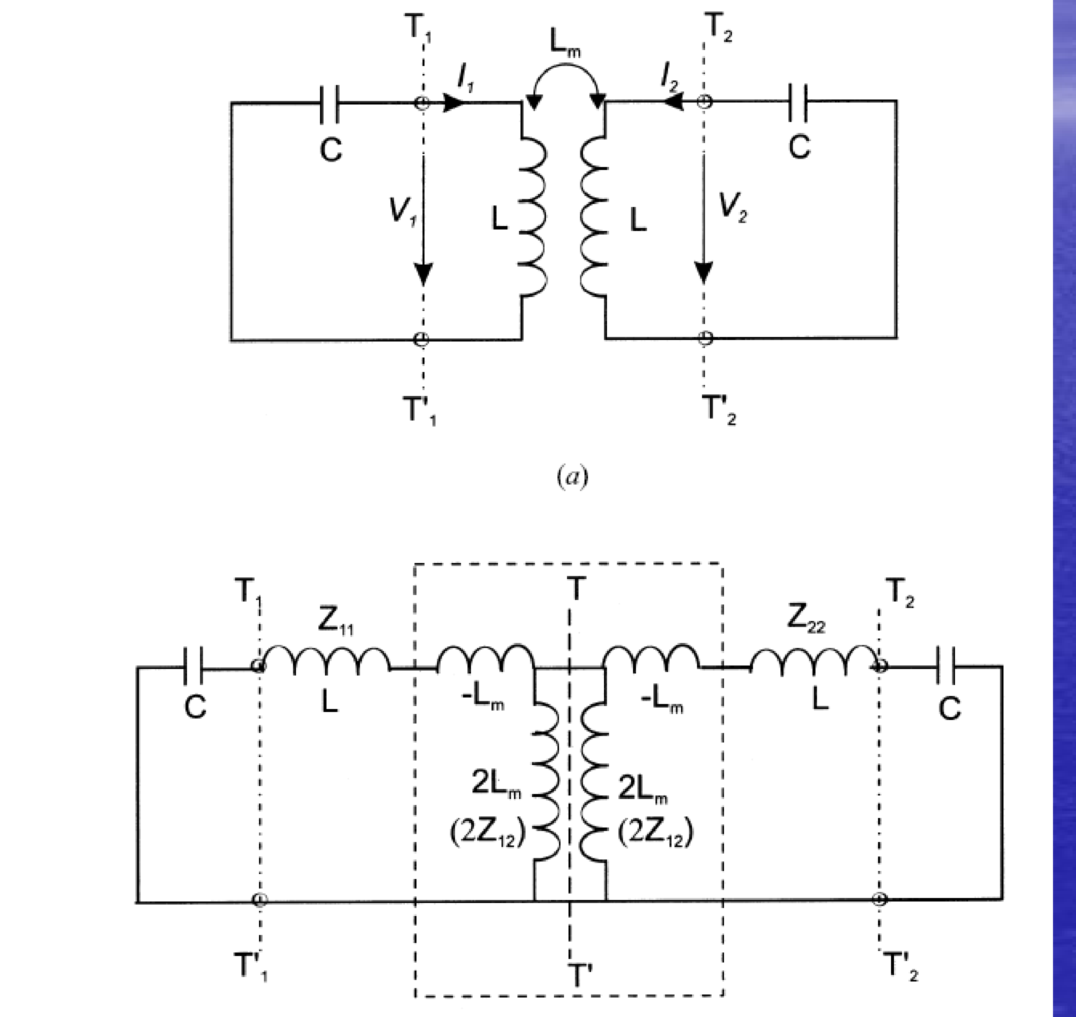
对称面是磁壁，开路时

$$f_m = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C-C_m)}}$$

得到

$$k_E = \frac{f_m^2 - f_e^2}{f_m^2 + f_e^2} = \frac{C_m}{C}$$

2.1.2 同步调谐磁耦合



K=ωLm

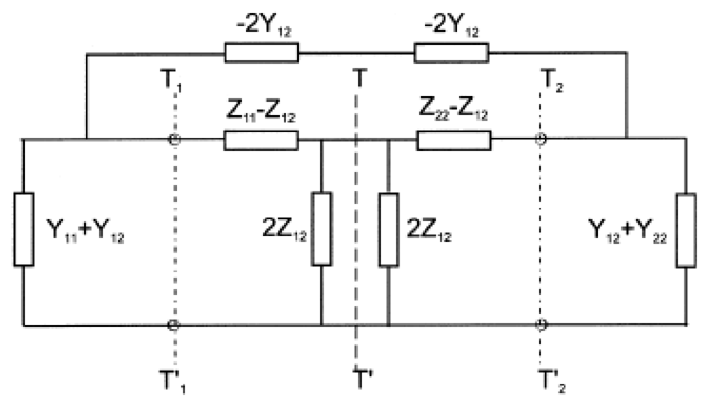
类似地，

$$f_e = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L - L_m)C}}$$

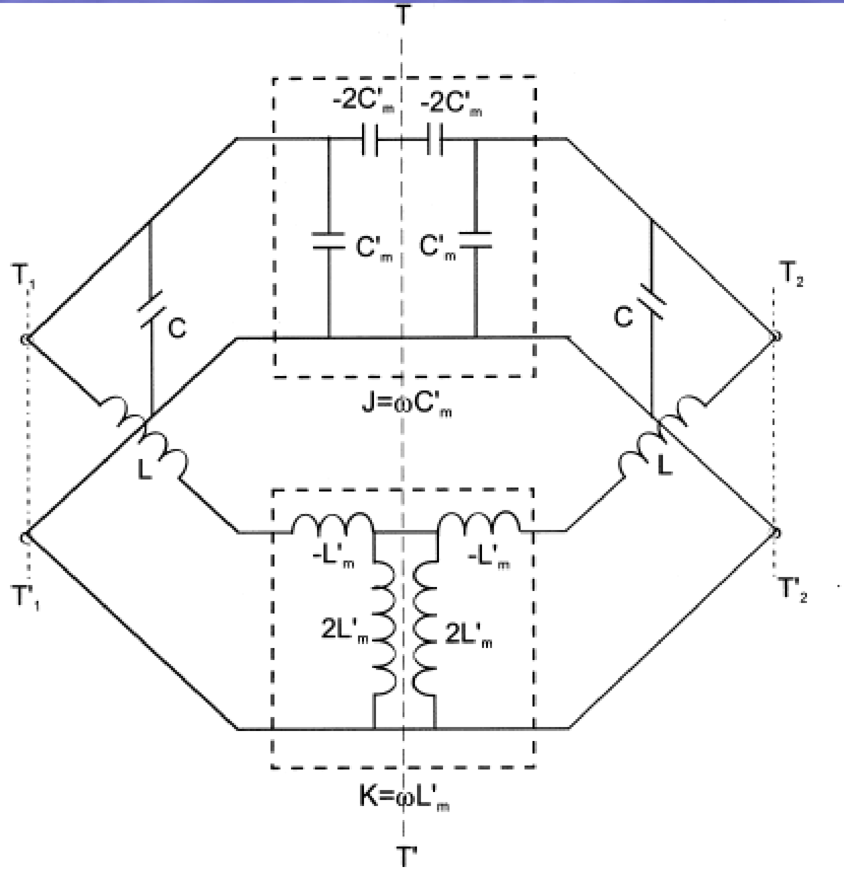
$$f_m = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L + L_m)C}}$$

$$k_M = \frac{f_e^2 - f_m^2}{f_e^2 + f_m^2} = \frac{L_m}{L}$$

2.1.3 同步调谐混合耦合



(a)



类似地，

$$f_e = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L-L'_m)(C-C'_m)}}$$

$$f_m = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L+L'_m)(C+C'_m)}}$$

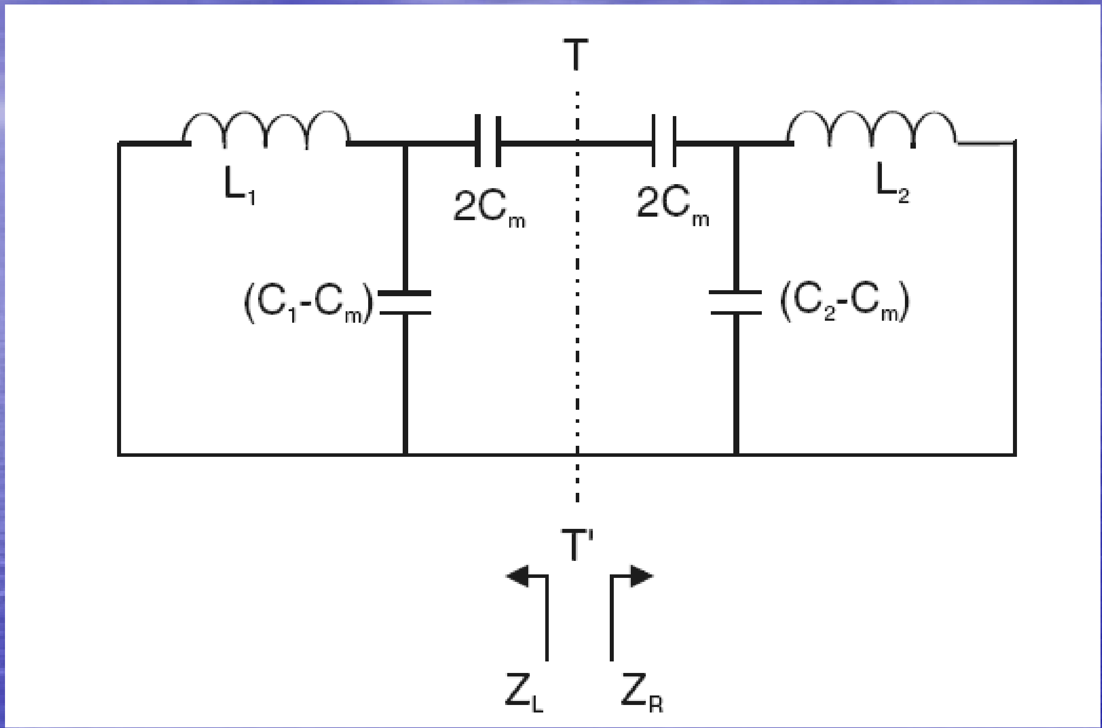
$$k_X = \frac{f_e^2 - f_m^2}{f_e^2 + f_m^2} = \frac{CL'_m + LC'_m}{LC + L'_m C'_m}$$

$$k_X \approx \frac{L'_m}{L} + \frac{C'_m}{C} = k'_M + k'_E$$

需要特别指出：

- 混合耦合是电耦合和磁耦合的叠加，两者符号可以相同，也可以不同；即，可以增强，也可以抵消；
- 仿真时，可以采用两腔耦合的结构，本征模计算；得到的两个本征频率，就是上面的f_e和f_m。

2.2.1 异步调谐电耦合



- 独立谐振频率 $L_1C_1 = 1/w_{01}^2$ $L_2C_2 = 1/w_{02}^2$
- 本征谐振频率 $Z_L = -Z_R$

得到异步调谐耦合谐振腔的本征谐振频率

$$\frac{1}{j\omega C_m}+\frac{j\omega L_1}{1-\omega^2 L_1(C_1-C_m)}+\frac{j\omega L_2}{1-\omega^2 L_2(C_2-C_m)}=0$$

$$\omega^4(L_1L_2C_1C_2-L_1L_2C_m^2)-\omega^2(L_1C_1+L_2C_2)+1=0$$

$$\omega_{1,2}=\sqrt{\frac{(L_1C_1+L_2C_2)\pm\sqrt{(L_1C_1-L_2C_2)^2+4L_1L_2C_m^2}}{2(L_1L_2C_1C_2-L_1L_2C_m^2)}}$$

令

$$K_E=\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{\omega_2^2+\omega_1^2}$$

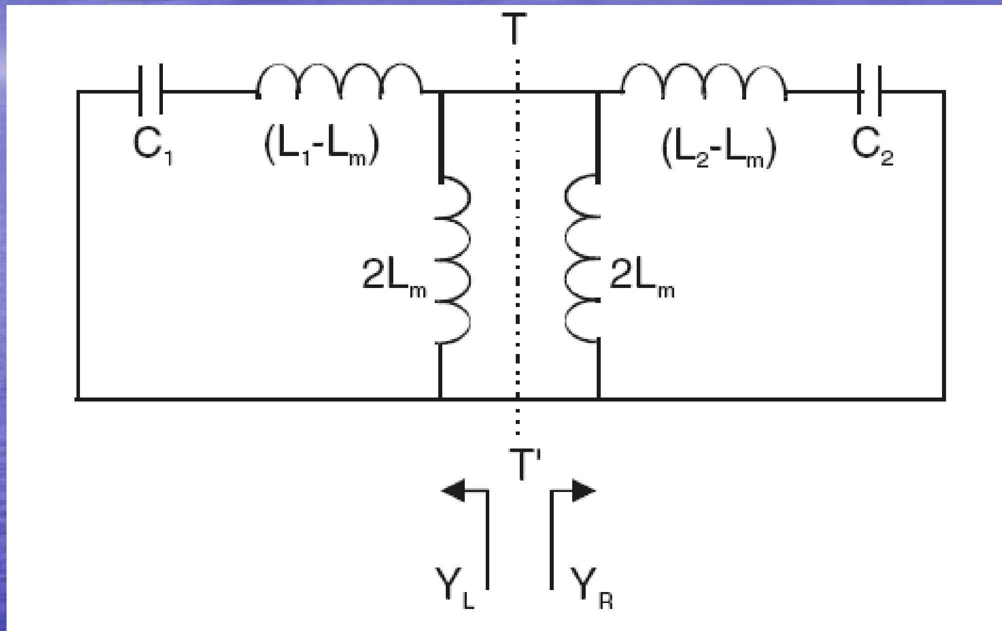
得到

$$K_E^2 = \frac{C_m^2}{C_1 C_2} \frac{4}{\left(\frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} + \frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}\right)^2} + \left(\frac{\omega_{02}^2 - \omega_{01}^2}{\omega_{02}^2 + \omega_{01}^2}\right)^2$$

进一步表示耦合系数

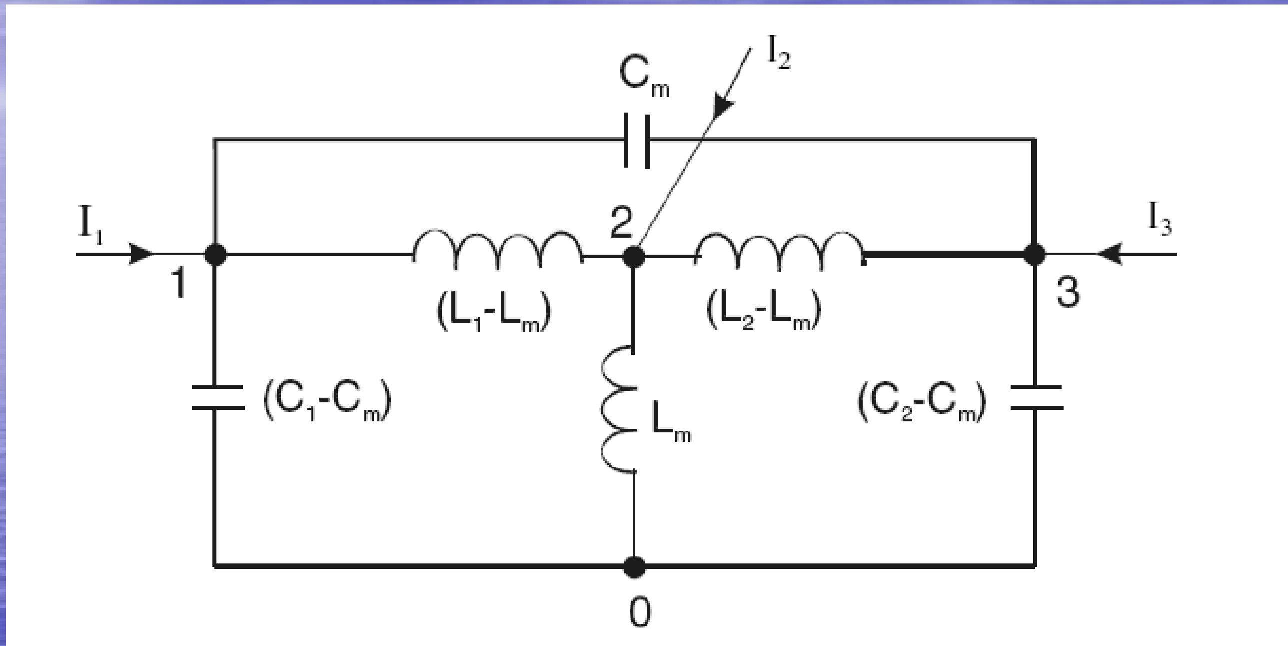
$$k_e = \frac{C_m}{\sqrt{C_1 C_2}} = \pm\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} + \frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}\right)\sqrt{\left(\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2}\right)^2 - \left(\frac{\omega_{02}^2 - \omega_{01}^2}{\omega_{02}^2 + \omega_{01}^2}\right)^2}$$

2.2.1 异步调谐磁耦合



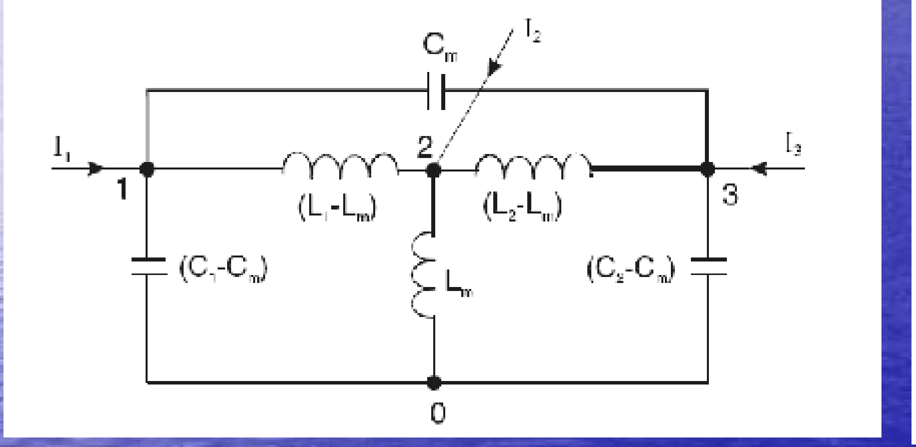
$$k_m = \frac{L_m}{\sqrt{L_1 L_2}} = \pm \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} + \frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}\right)\sqrt{\left(\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2}\right)^2 - \left(\frac{\omega_{02}^2 - \omega_{01}^2}{\omega_{02}^2 + \omega_{01}^2}\right)^2}$$

2.2.1 异步调谐混合耦合



- 电耦合，C_m；磁耦合，L_m；
- I_1，I_2和I_3外部流入内部；其它电流流出节点；
- 以“0”点作为参考点，列出导纳矩阵

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$



$$y_{11} = j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega(L_1 - L_m)}$$

$$y_{12} = y_{21} = -\frac{1}{j\omega(L_1 - L_m)}$$

$$y_{13} = y_{31} = -j\omega C_m$$

$$y_{22} = \frac{1}{j\omega L_m} + \frac{1}{j\omega(L_1 - L_m)} + \frac{1}{j\omega(L_2 - L_m)}$$

$$y_{23} = y_{32} = -\frac{1}{j\omega(L_2 - L_m)}$$

$$y_{33} = j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega(L_2 - L_m)}$$

根据参数含义，很容易得到。

比如，$\mathbf{y_{11}}$**表示**$\mathbf{V_2=V_3=0}$**时**，自导纳；

$\mathbf{y_{12}}$**表示**$\mathbf{V_1=V_3=0}$，互导纳。

对于本征频率，意味着

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{for} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$\omega^4(L_1C_1L_2C_2 - L_m^2C_1C_2 - L_1L_2C_m^2 + L_m^2C_m^2) - \omega^2(L_1C_1 + L_2C_2 - 2L_mC_m) + 1 = 0$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{\Re_B-\Re_C}{\Re_A}},\ \omega_2=\sqrt{\frac{\Re_B+\Re_C}{\Re_A}}$$

$$\Re_A=2(L_1C_1L_2C_2-L_m^2C_1C_2-L_1L_2C_m^2+L_m^2C_m^2)$$

$$\Re_B=(L_1C_1+L_2C_2-2L_mC_m)$$

$$\Re_C=\sqrt{\Re_B^2-2\Re_A}$$

同样的，令 $K_X=\dfrac{\omega_2^2-\omega_1^2}{\omega_2^2+\omega_1^2}$

并注意到在窄带滤波器中，有 $(L_1C_1+L_2C_2)\gg L_mC_m$

$$\frac{(L_1C_1+L_2C_2)/2}{\sqrt{L_1C_1L_2C_2}}\approx 1$$

$$K_X^2=\frac{4L_1C_1L_2C_2}{(L_1C_1+L_2C_2)^2}k_x^2+\frac{(L_1C_1-L_2C_2)^2}{(L_1C_1+L_2C_2)^2}$$

其中，

$$k_x^2 = \left(\frac{C_m^2}{C_1 C_2} + \frac{L_m^2}{L_1 L_2} - \frac{2 L_m C_m}{\sqrt{L_1 C_1 L_2 C_2}} \right)$$

$$= (k_e - k_m)^2$$

即，

$$k_x = k_e - k_m = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} + \frac{\omega_{01}}{\omega_{02}} \right) \sqrt{\left(\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} \right)^2 - \left(\frac{\omega_{02}^2 - \omega_{01}^2}{\omega_{02}^2 + \omega_{01}^2} \right)^2}$$

耦合谐振腔电路和耦合矩阵

一、耦合谐振腔滤波器的耦合矩阵

二、一般耦合理论

三、提取耦合系数

四、提取外部Q值

根据前面的推到，耦合的一般结论

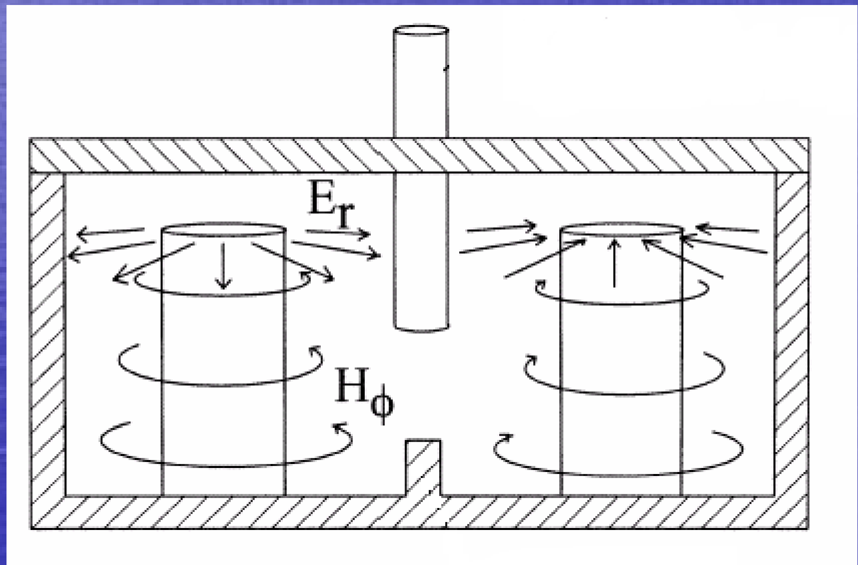
$$\boxed{k=\pm\frac{1}{2}\left(\frac{f_{02}}{f_{01}}+\frac{f_{01}}{f_{02}}\right)\sqrt{\left(\frac{f_{p2}^2-f_{p1}^2}{f_{p2}^2+f_{p1}^2}\right)^2-\left(\frac{f_{02}^2-f_{01}^2}{f_{02}^2+f_{01}^2}\right)^2}}$$

- f_{01}和f_{02}分别是两个腔体各自的谐振频率；
- f_{p1}和f_{p2}是耦合谐振腔的本征谐振频率；
- 同步调谐时，方程退化为

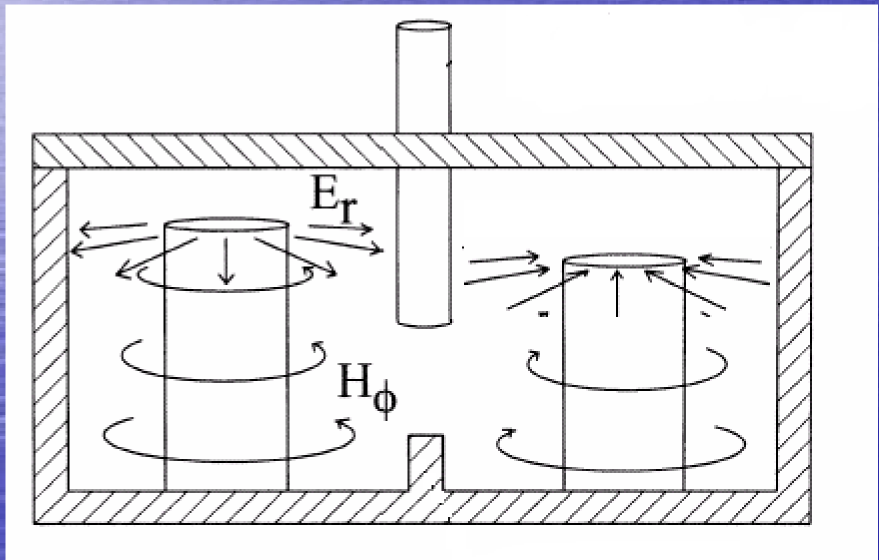
$$k=\pm\frac{f_{p2}^2-f_{p1}^2}{f_{p2}^2+f_{p1}^2}$$

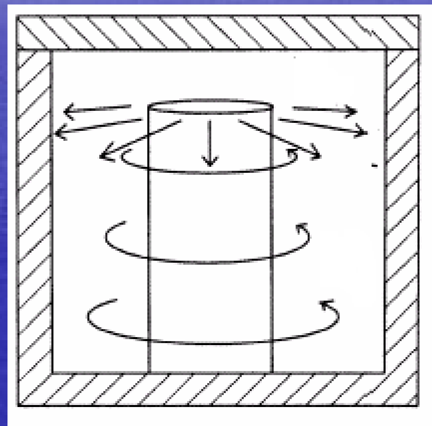
为了得到耦合谐振腔的耦合系数：

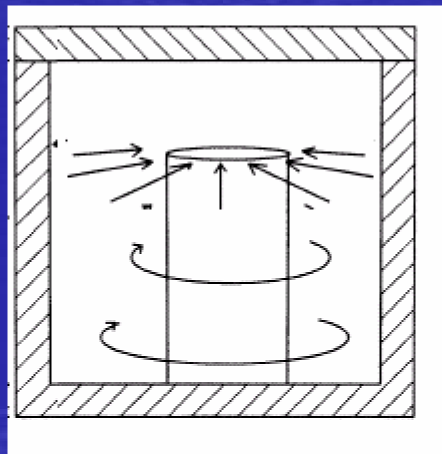
- 同步调谐，只需要得到耦合谐振腔的本征频率



- 异步调谐，耦合谐振腔的本征频率和各自谐振时的频率







耦合谐振腔电路和耦合矩阵

一、耦合谐振腔滤波器的耦合矩阵

二、一般耦合理论

三、提取耦合系数

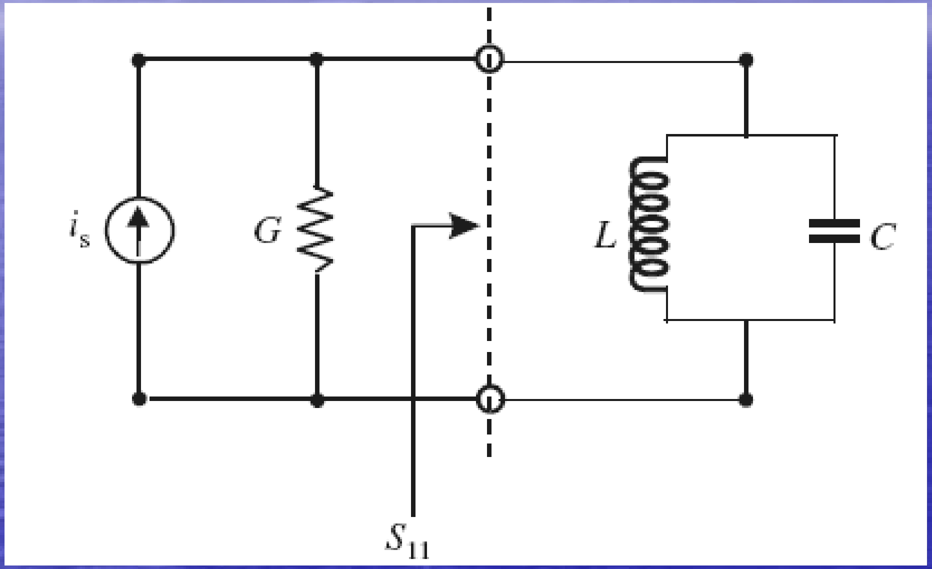
四、提取外部Q值

四、提取外部Q值

4.1 单端加载谐振腔

4.2 双端对称加载谐振腔

4.1 单端加载谐振腔



单端加载谐振腔模型

$$Y_{in} = jwC + \frac{1}{jwL} = jw_0C\left(\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w}\right)$$

其中，$LC = 1/w_0^2$

对于谐振点附近，$w = w_0 + \Delta w$

$$Y_{in} = jw_0C\left(\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w}\right) = jw_0C\frac{w^2 - w_0^2}{ww_0}$$

$$\cong jw_0C\frac{2\Delta w}{w_0} = jQ_eG\frac{2\Delta w}{w_0}$$

其中，

$$Q_e = \frac{w_0C}{G}$$

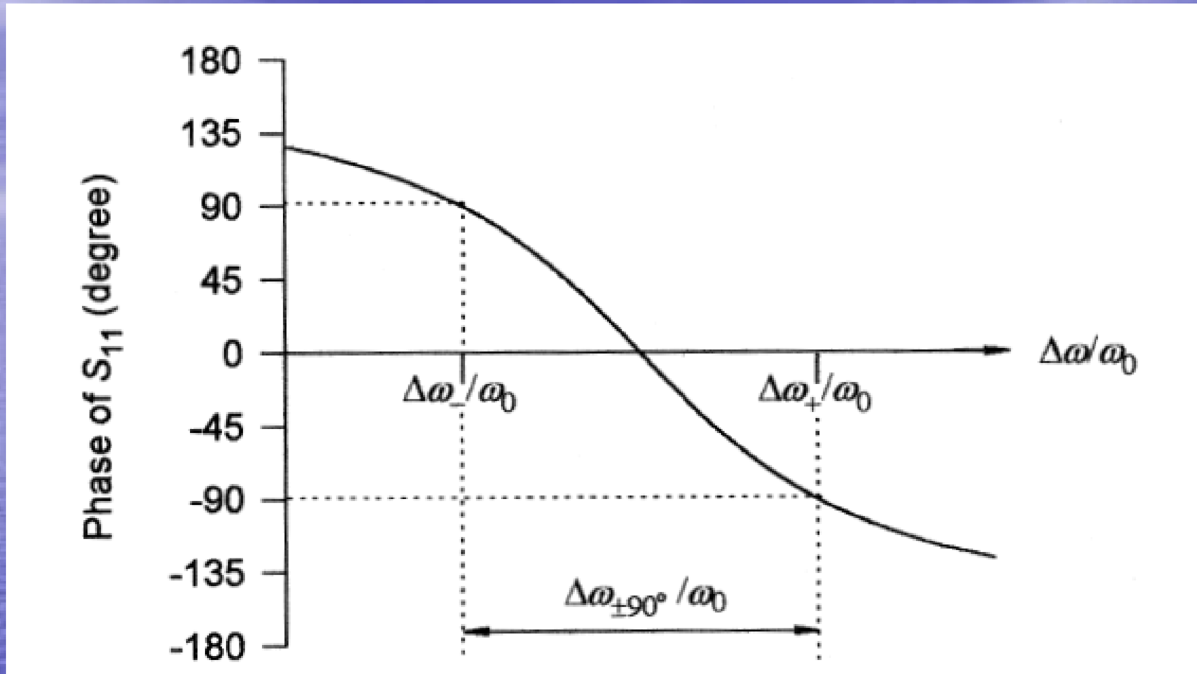
又，

$$S_{11}=\frac{G-Y_{in}}{G+Y_{in}}$$

$$S_{11}=\frac{1-jQ_e\left(2\Delta w/w_0\right)}{1+jQ_e\left(2\Delta w/w_0\right)}$$

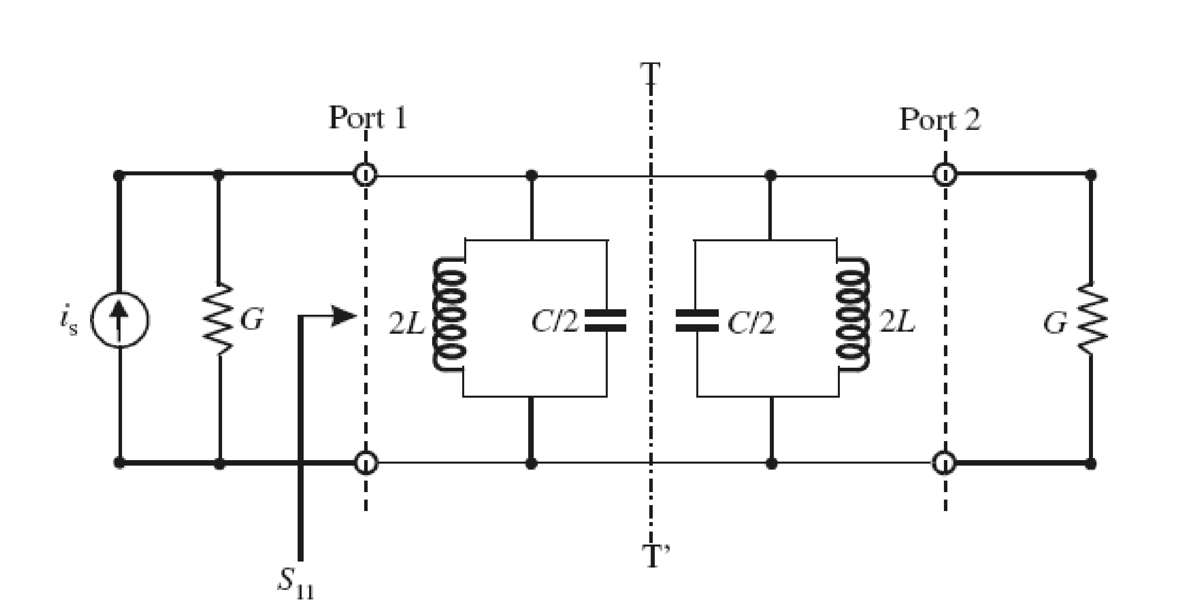
当取 $Q_e=\mp\frac{w_0}{2\Delta w}$ **S_{11}的相位为±90°**

也就是说，找到S11相位为±90°对应的频点，即可得到外部Q值



$$Q_e = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{\pm 90^\circ}}$$

4.2 双端对称加载谐振腔



双端对称加载谐振腔模型

对称面短路时，

$$Y_{ino} = \infty$$

$$S_{11o} = \frac{G - Y_{ino}}{G + Y_{ino}} = -1$$

对称面开路时，

$$Y_{ine} = j\omega_0 C \Delta\omega/\omega_0$$

$$S_{11e} = \frac{G - Y_{ine}}{G + Y_{ine}} = \frac{1 - jQ_e \Delta\omega/\omega_0}{1 + jQ_e \Delta\omega/\omega_0}$$

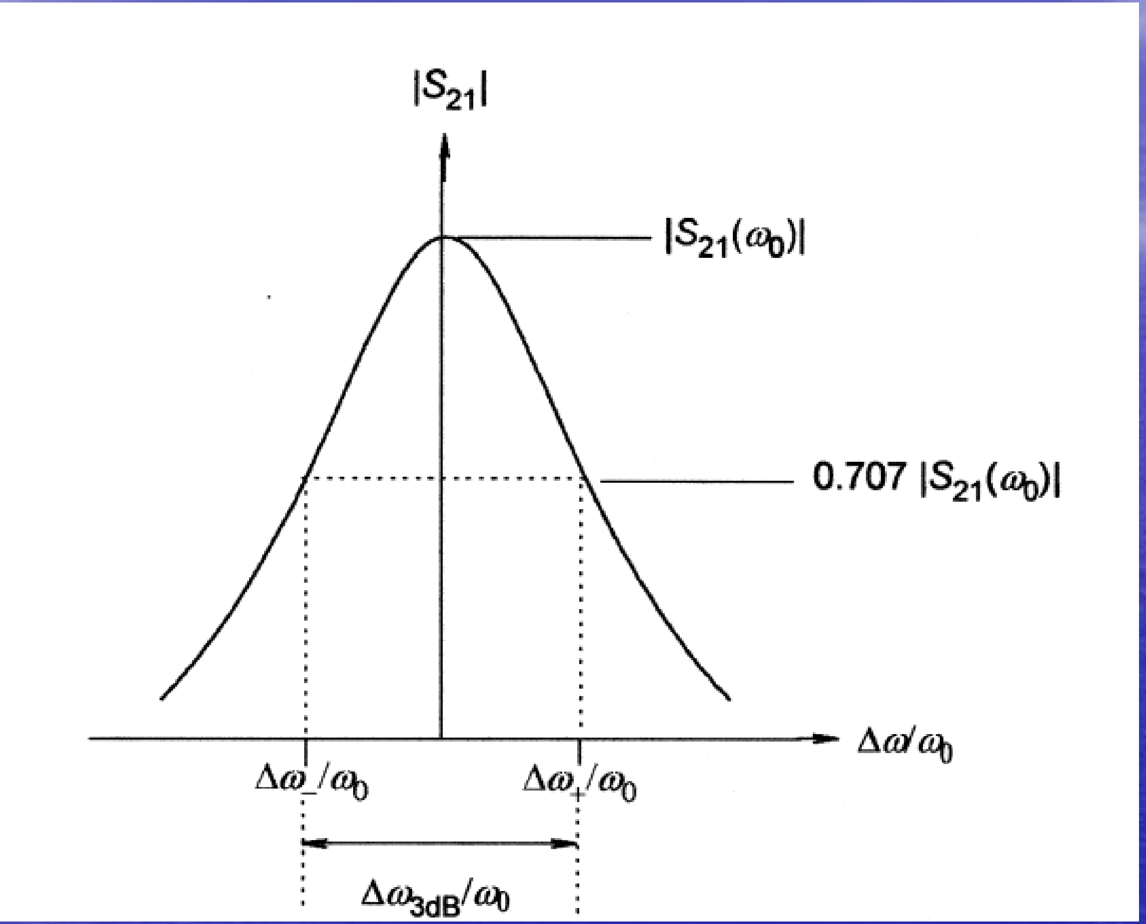
由奇偶摸法得到，

$$S_{21} = \frac{1}{2}(S_{11e} - S_{11o}) = \frac{1}{1 + jQ_e \Delta\omega / \omega_0}$$

得到，

$$|S_{21}| = \frac{1}{\sqrt{1 + (Q_e \Delta\omega / \omega_0)^2}}$$

当 $Q_e \dfrac{\Delta\omega_{\pm}}{\omega_0} = \pm 1$，即传输**3dB**处。



$$\Delta\omega_{3\ \mathrm{dB}} = \Delta\omega_{+} - \Delta\omega_{-} = \frac{\omega_0}{(Q_e/2)}$$

$$Q_e' = \frac{Q_e}{2} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{3\ \mathrm{dB}}}$$