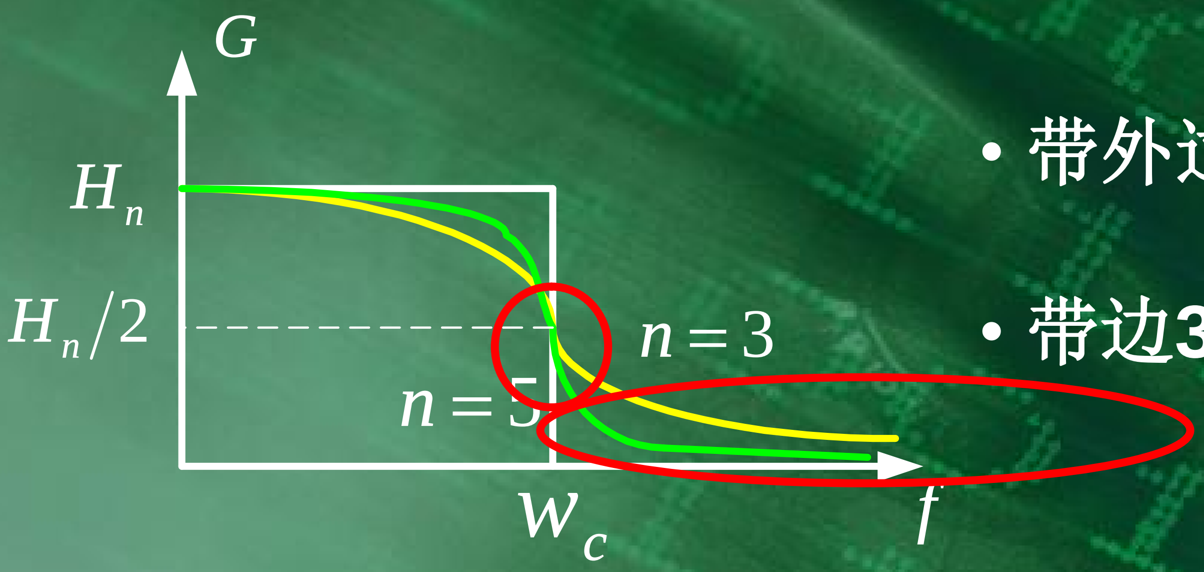
15. Chebyshev 综 合

西安电子科技大学，电子工程学院
苏　涛

Butterworth综合



- 带外过于平坦
- 带边**3dB**

$$G\left(w^2\right)=\frac{H_n}{1+\left(\frac{w}{w_c}\right)^{2n}}$$

15. Chebyshev 综 合

一、Chebyshev函数

二、Chebyshev多项式逼近

三、修正的偶数阶Chebyshev函数

四、Chebyshev综合

15. Chebyshev 综 合

一、Chebyshev函数

二、Chebyshev多项式逼近

三、修正的偶数阶Chebyshev函数

四、Chebyshev综合

Chebyshev函数

$$T_n(x)=\begin{cases}\cos\left(n\cdot\cos^{-1}x\right) & |x|\le 1\\ ch\left(n\cdot ch^{-1}x\right) & |x|>1\end{cases}$$

（1）表面分段，实质连续；

（2）表面超越函数，实际是整数多项式；

（3）带内等波纹，带外单调；

递推公式

$$\boxed{\begin{aligned} &T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \\ &T_0 = 1 \\ &T_1 = x \end{aligned}}$$

证明： $a = \cos^{-1} x$ $x = \cos a$

$$\cos(n+1)a + \cos(n-1)a = 2\cos a \cos na$$

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$$

$$T_0 = 1$$

$$T_1 = x$$

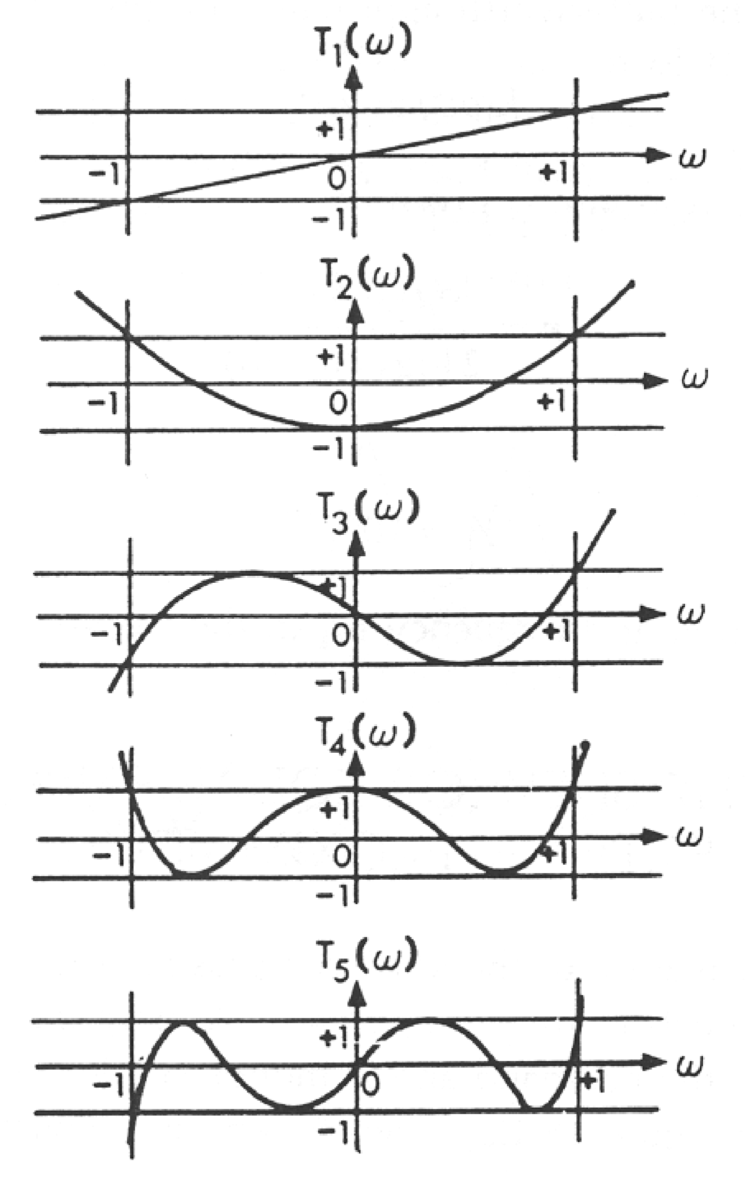
$$T_2 = 2x^2 - 1$$

$$T_3 = 4x^3 - 3x$$

$$T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5 = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$\vdots$$



（1）零点特性

$$T_n(0)=\begin{cases}(-1)^{n/2} & n\,even\\ 0 & n\,odd\end{cases}$$

（2）带边特性

$$T_n(1)=1$$

（3）奇偶特性

$$T_n(-x)=(-1)^n T_n(x)$$

（4）带外特性

带外单调变化

$$T_n(|x|) \approx 2^{n-1} x^n \quad |x| >> 1$$

（5）最佳特性

当 $x = x_m$ 处， $T_n(x_m) = P_n(x_m)$

若带外固定，则Chebyshev带内波纹最小；

若带内波纹固定，则Chebyshev带外最陡。

15. Chebyshev 综 合

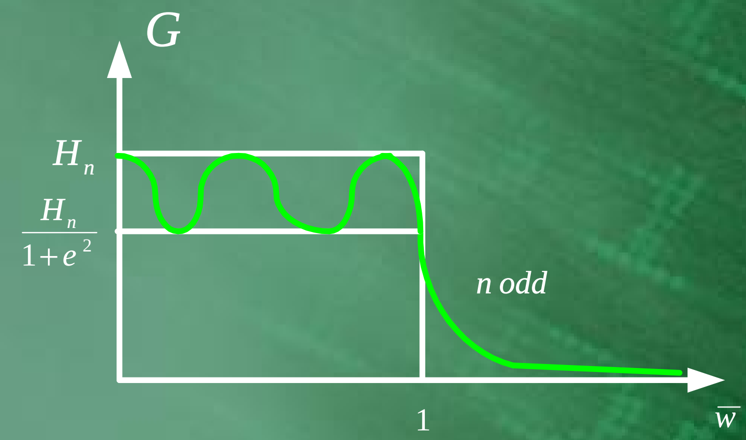
一、Chebyshev函数

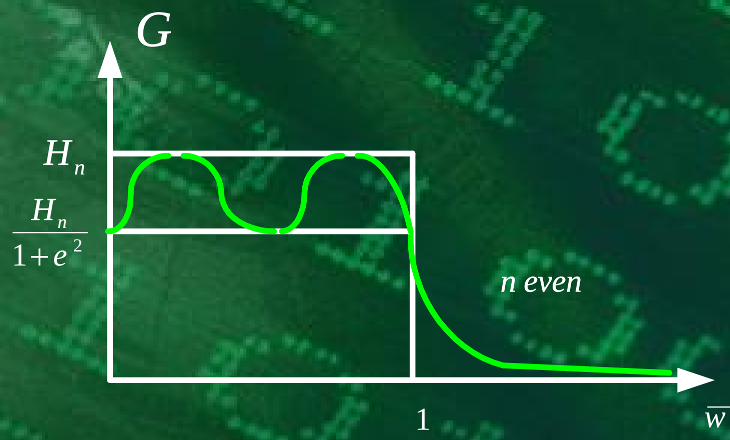
二、Chebyshev多项式逼近

三、修正的偶数阶Chebyshev函数

四、Chebyshev综合

$$G\left(\overline{w}^{2}\right)=\frac{H_n}{1+e^{2}T_n^{2}\left(\overline{w}\right)}$$





（1）直流特性

$$G(0)=\begin{cases} H_n & n\,odd \\ \boxed{\dfrac{H_n}{1+e^2} \qquad n\,even} \end{cases}$$

（2）带内特性

$$G_{\max}=H_n \qquad G_{\min}=\frac{H_n}{1+e^2}$$

$$\frac{G_{\max}}{G_{\min}}=1+e^2$$

e 等波纹系数；

$K=10\log\left(1+e^2\right)$ 分贝波纹；

（3）带外特性

$$G\left(\bar{w}^2\right) \cong \frac{H_n}{e^2 T_n^2\left(\bar{w}\right)} = \frac{H_n}{e^2 2^{2n-2} \bar{w}^{2n}} \qquad \bar{w} >> 1$$

（4）复延拓：Chebyshev多项式

$$G\left(\bar{w}^2\right) = \frac{H_n}{1+e^2 T_n^2\left(\bar{w}\right)} \xrightarrow{\bar{s} = j\bar{w}} G\left(-\bar{s}^2\right) = \frac{H_n}{1+e^2 T_n^2\left(-j\bar{s}\right)}$$

$$S_{11}\left(\bar{s}\right) S_{11}\left(-\bar{s}\right) = 1 - G\left(-\bar{s}^2\right) = \frac{e^2 T_n^2\left(-j\bar{s}\right)}{1+e^2 T_n^2\left(-j\bar{s}\right)}$$

拆分分母：Chebyshev多项式 $1+e^2T_n^2(-j\bar{s})=0$

即， $ch\left[nch^{-1}(-j\bar{s})\right]=\pm j\frac{1}{e}$

令， $ch^{-1}(-j\bar{s})=u+jv$

$$ch\left[n(u+jv)\right]=j\frac{1}{e}$$

$$chnu\cdot\cos nv+jshnu\cdot\sin nv=j\frac{1}{e}$$

$$\begin{cases} chnu\cdot\cos nv=0 \\ shnu\cdot\sin nv=\frac{1}{e} \end{cases}$$

$$\cos nv = 0 \quad \Rightarrow \quad v_k = \frac{(2k+1)p}{2n} \quad k = 0,1,2,\mathbf{L},2n-1$$

$$\sin nv = \frac{1}{e} \quad \Rightarrow \quad u_k = \frac{1}{n} sh^{-1}\left(\frac{1}{e}\right) = a$$

$$\bar{s} = jch(u + jv) = -shu \cdot \sin v + jchu \cdot \cos v$$

$$\boxed{\begin{gathered} \bar{s}_{k+1} = -sha \cdot \sin\frac{(2k+1)p}{2n} + jcha \cdot \cos\frac{(2k+1)p}{2n} \\ k = 0,1,2,\mathbf{L},2n-1 \end{gathered}}$$

显然，根的分布 $\bar{s}_{k+1} = \bar{s}_{k+1} + j\bar{w}_{k+1}$

$$\boxed{\left(\frac{\bar{s}_{k+1}}{sha}\right)^2 + \left(\frac{\bar{w}_{k+1}}{cha}\right)^2 = 1}$$

椭圆上的等分分布

（5）Chebyshev多项式的n

带外特性确定n，即元件数；

当 $\overline{w}=\overline{w}_s>1$时，要求 $L_s>AL$ ，

其中 AK 分贝波纹

$$L_s=-10\log G\left(\overline{w}^2\right)=-10\log H_n+10\log\left[1+e^2T_n^2\left(\overline{w}^2\right)\right]\geq AL$$

$$e=\sqrt{10^{\frac{AK}{10}}-1} \qquad H_n=1$$

$$n = \operatorname{int}\left[\frac{ch^{-1}\sqrt{\dfrac{10^{\frac{AL}{10}}-1}{10^{\frac{AK}{10}}-1}}}{ch^{-1}\overline{w}_s}\right]+1$$

注意：偶数阶Chebyshev多项式逼近的矛盾

$$G(0)=\begin{cases} H_n & n\ odd \\ \dfrac{H_n}{1+e^2} & n\ even \end{cases} \qquad G(0)=\frac{4\bar{r}_l}{(1+\bar{r}_l)^2} \quad ,\bar{r}_g=1$$

$n\ even$

$$H_n=(1+e^2)\frac{4\bar{r}_l}{(1+\bar{r}_l)^2}\le 1$$

$$e\le\frac{|\bar{r}_l-1|}{2\sqrt{\bar{r}_l}}$$

显然， $\bar{r}_l\neq 1$

偶数阶Chebyshev响应，负载不能等于特性阻抗。

15. Chebyshev 综 合

一、Chebyshev函数

二、Chebyshev多项式逼近

三、修正的偶数阶Chebyshev函数

四、Chebyshev综合

【定理】修正的偶数阶Chebyshev多项式Ln与标准Chebyshev多项式有如下关系：

$$L_n(x) = T_{n/2}\left(kx^2 + h\right)$$

其中，$k = 2\cos^2 q_0 , h = -\cos 2q_0 , q_0 = \dfrac{p}{2n}$

15. Chebyshev 综 合

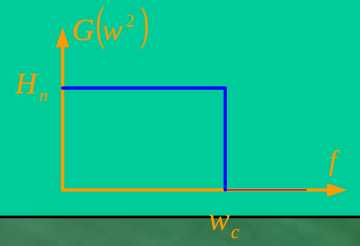
一、Chebyshev函数

二、Chebyshev多项式逼近

三、修正的偶数阶Chebyshev函数

四、Chebyshev综合

理想响应



采用Buttworth逼近函数

$$G(-s^2)=S_{21}(s)S_{21}(-s)$$

网络无耗

$$S_{11}(s)S_{11*}(s)$$
$$=1-G(-s^2)$$

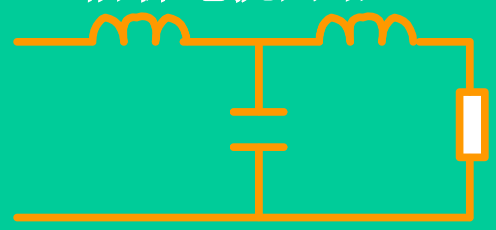
分解反射函数
非唯一，可实现性

$$S_{11}(s)$$

阻抗函数

$$Z_{in}(s)=Z_0\frac{1\pm S_{11}(s)}{1\mp S_{11}(s)}$$

阶梯电抗网络



$$G\left(-\bar{s}^2\right)=\frac{H_n}{1+e^2T_n^2\left(-j\bar{s}\right)}$$

$$S_{11}(\bar{s})S_{11}(-\bar{s})=1-G\left(-\bar{s}^2\right)=\frac{\left(1-H_n\right)+e^2T_n^2\left(-j\bar{s}\right)}{1+e^2T_n^2\left(-j\bar{s}\right)}$$

令： $$\hat{e}^2=\frac{e^2}{1-H_n}$$

$$S_{11}(\bar{s})S_{11}(-\bar{s})=\left(1-H_n\right)\frac{1+\frac{e^2}{\left(1-H_n\right)}T_n^2\left(-j\bar{s}\right)}{1+e^2T_n^2\left(-j\bar{s}\right)}$$

$$=\left(1-H_n\right)\frac{1+\hat{e}^2T_n^2\left(-j\bar{s}\right)}{1+e^2T_n^2\left(-j\bar{s}\right)}$$

$$=\frac{D_n(\bar{s})D_n(-\bar{s})}{C_n(\bar{s})C_n(-\bar{s})}$$

$$S_{11}(\bar{s})S_{11}(-\bar{s}) = \frac{D_n(\bar{s})D_n(-\bar{s})}{C_n(\bar{s})C_n(-\bar{s})}$$

$$S_{11}(\bar{s}) = \pm\frac{D_n(\bar{s})}{C_n(\bar{s})}$$

显然，分解非唯一；必须保证分母的根在左半平面。

【例】综合n=2的Chebyshev低通网络

$$G\left(-\bar{s}^2\right)=\frac{H_n}{1+e^2T_n^2\left(-j\bar{s}\right)}$$

$$T_2\left(-j\bar{s}\right)=2\left(-j\bar{s}\right)^2-1=-2\bar{s}^2-1$$

$$G\left(-\bar{s}^2\right)=\frac{1}{1+e^2\left(4\bar{s}^4+4\bar{s}^2+1\right)}$$

$$S_{11}(\bar{s})S_{11}(-\bar{s})=1-\frac{1}{1+e^2\left(4\bar{s}^4+4\bar{s}^2+1\right)}$$

$$=\frac{\left(\bar{s}^2+\frac{1}{2}\right)^2}{\bar{s}^4+\bar{s}^2+\frac{1+e^2}{4e^2}}$$

$$S_{11}(\bar{s})S_{11}(-\bar{s}) = \frac{\left(\bar{s}^{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left((-\bar{s})^{2}+\frac{1}{2}\right)}{\left(\bar{s}^{2}+a\bar{s}+b\right)\cdot\left(\bar{s}^{2}-a\bar{s}+b\right)}$$

待定系数a，b，得到

$$\begin{cases} a = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{e^{2}}}1-1} \\ b = \frac{\sqrt{1+e^{2}}}{2e} \end{cases}$$

$$S_{11}(\bar{s}) = \frac{\bar{s}^{2}+\frac{1}{2}}{\bar{s}^{2}+a\bar{s}+b}$$

$$Z_{in}(\bar{s}) = \frac{1 - S_{11}(\bar{s})}{1 + S_{11}(\bar{s})} = \frac{2\bar{s}^2 + a\bar{s} + b + \frac{1}{2}}{a\bar{s} + b - \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{a^2 = 2b - 1}$$

$$a\bar{s} + b - \frac{1}{2} \;\Big)\; 2\bar{s}^2 + a\bar{s} + b + \frac{1}{2} \;\Big|\; \frac{2}{a}\bar{s}$$

$$2\bar{s}^2 + \frac{2b-1}{a}\bar{s}$$

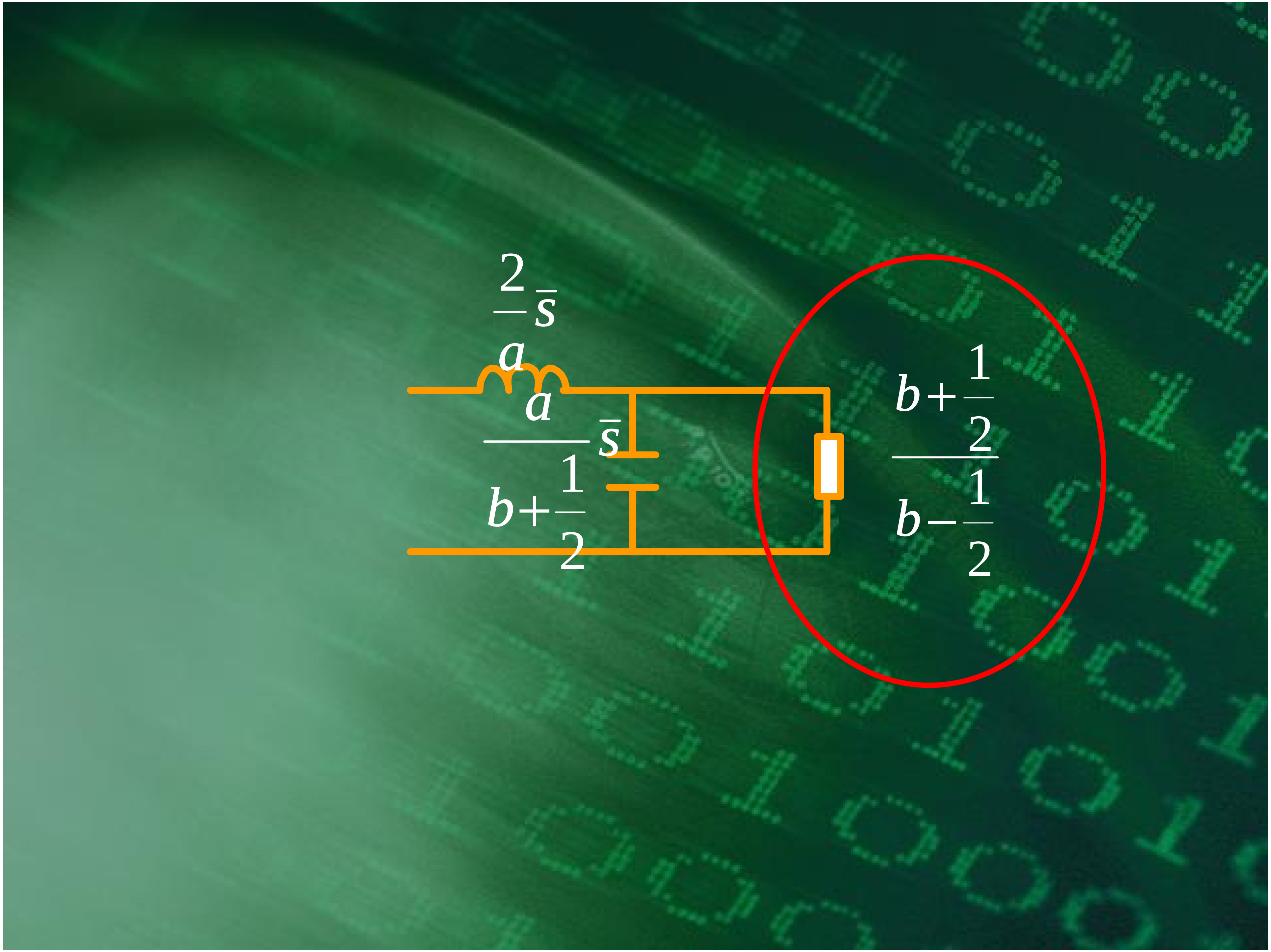
$$b + \frac{1}{2} \;\Big)\; a\bar{s} + b - \frac{1}{2} \;\Big|\; \frac{a}{b + \frac{1}{2}}\bar{s}$$

$$a\bar{s}$$

$$b - \frac{1}{2} \;\Big)\; b + \frac{1}{2} \;\Big|\; \frac{b + \frac{1}{2}}{b - \frac{1}{2}}$$

$$b + \frac{1}{2}$$

$$0$$



$\frac{2}{a}\bar{s}$
$\frac{a}{b+\frac{1}{2}}\bar{s}$
$\frac{b+\frac{1}{2}}{b-\frac{1}{2}}$