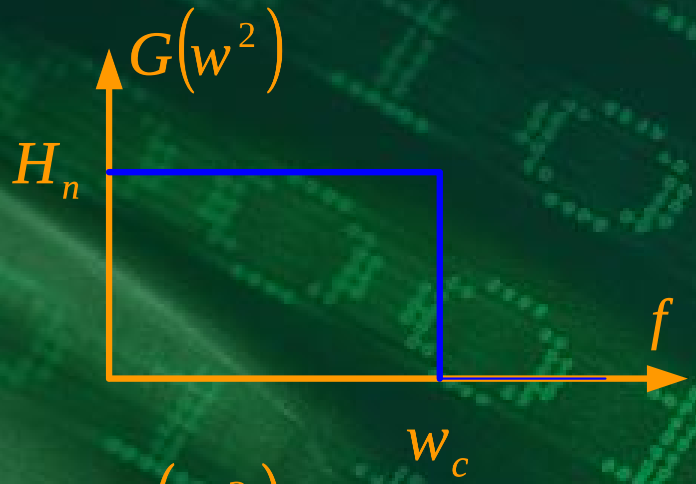
14. Butterworth 综 合

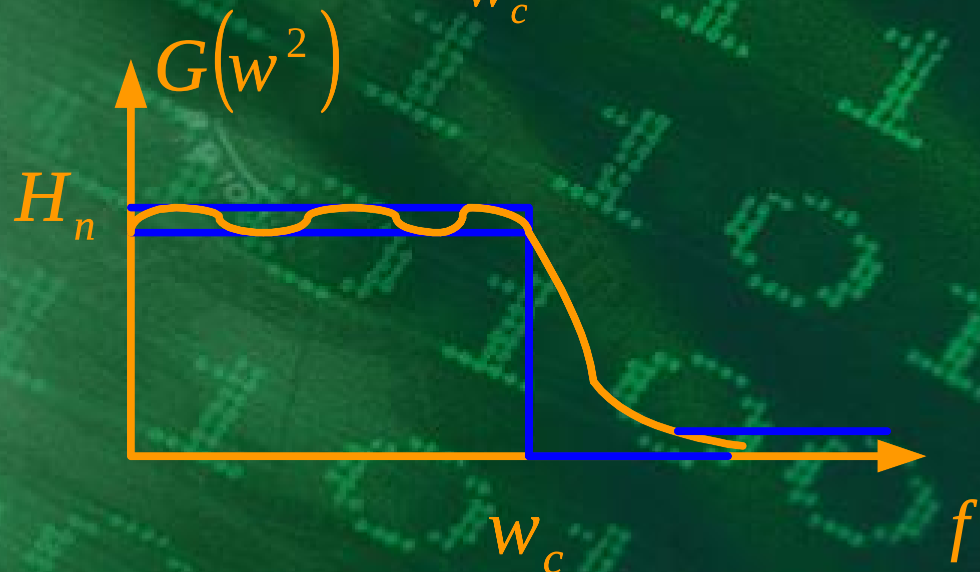
西安电子科技大学，电子工程学院

苏　涛

理想低通响应



可实现逼近响应



根据逼近函数不同：**Butterworth，Chebyshev**等

14. Butterworth综合

一、Butterworth逼近

二、Butterworth多项式

三、Butterworth多项式的n

四、Butterworth综合

14. Butterworth综合

一、Butterworth逼近

二、Butterworth多项式

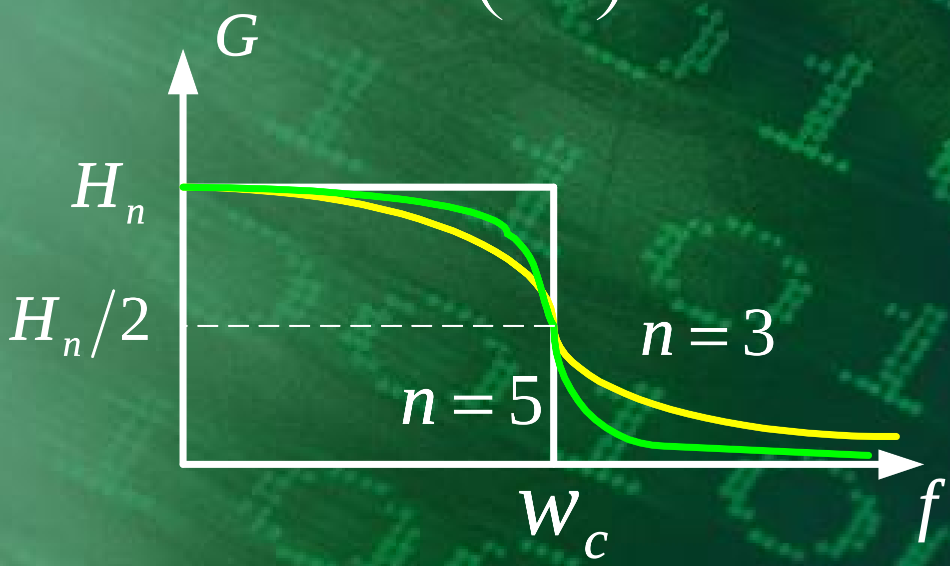
三、Butterworth多项式的n

四、Butterworth综合

采用下面的函数逼近理想低通响应，

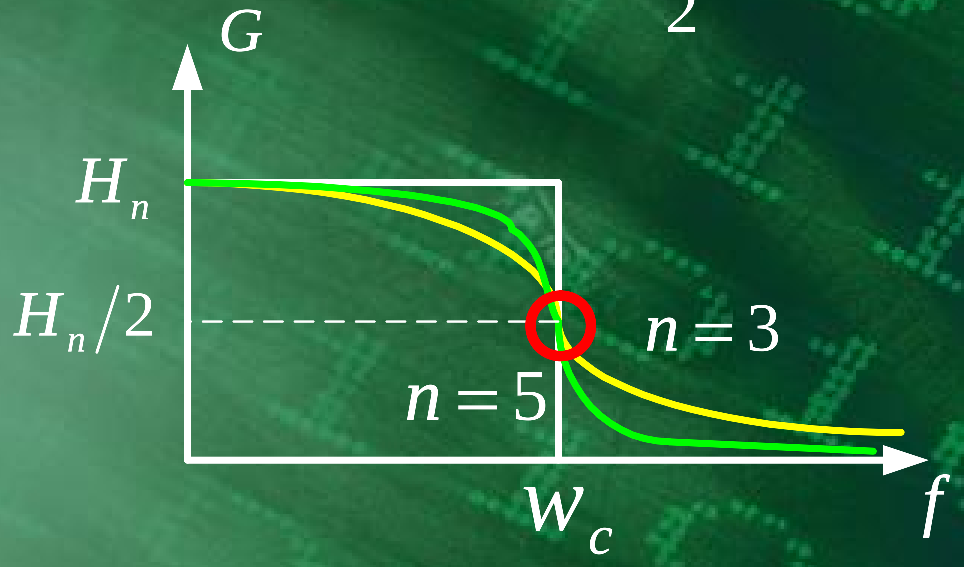
—— **Butterworth逼近**

$$G\left(w^{2}\right)=\frac{H_{n}}{1+\left(\frac{w}{w_{c}}\right)^{2n}}$$



1. 3dB特性

当 $w = w_c$ 时， $G\left(w^2\right) = \dfrac{H_n}{2}$



2. 偶函数特性

3. 最大平滑特性

当 $\overline{w}=w/w_c<1$ 时，

$$G\left(w^2\right)=\frac{H_n}{1+\overline{w}^{2n}}=H_n\left(1-\overline{w}^{2n}+\overline{w}^{4n}-\overline{w}^{6n}+\cdots\right)$$

显然，在 $\overline{w}=0$ 处的1，2，——，2n-1阶导数为零

当 $\overline{w}=\infty$ 时，令 $\overline{w}'=\dfrac{1}{w}$

$$G\left(w^{2}\right)=\frac{H_{n}}{1+\left(\dfrac{1}{\overline{w}'}\right)^{2n}}=\frac{H_{n}\overline{w}'^{2n}}{1+\overline{w}'^{2n}}$$

$$=H_{n}\left(\overline{w}'^{2n}-\overline{w}'^{4n}-\overline{w}'^{6n}+\mathbf{L}\right)$$

显然，在 $\overline{w}'=0\left(\overline{w}=\infty\right)$处的**1，2，——，2n-1**阶导数为零

Butterworth逼近函数在零点和无穷远点均具有最大平滑特性

14. Butterworth综合

一、Butterworth逼近

二、Butterworth多项式

三、Butterworth多项式的n

四、Butterworth综合

Butterworth逼近

$$G\left(w^2\right)=\frac{H_n}{1+\overline{w}^{2n}}$$

复延拓

$$\overline{s}=j\overline{w}$$

$$\overline{w}=-j\overline{s} \qquad \overline{w}^2=-\overline{s}^2 \qquad \overline{w}^{2n}=\left(-1\right)^n\overline{s}^{2n}$$

$$G\left(-\overline{s}^2\right)=\frac{H_n}{1+\left(-1\right)^n\overline{s}^{2n}}$$

$$G\left(-\bar{s}^2\right)=\frac{H_n}{1+(-1)^n\bar{s}^{2n}}$$

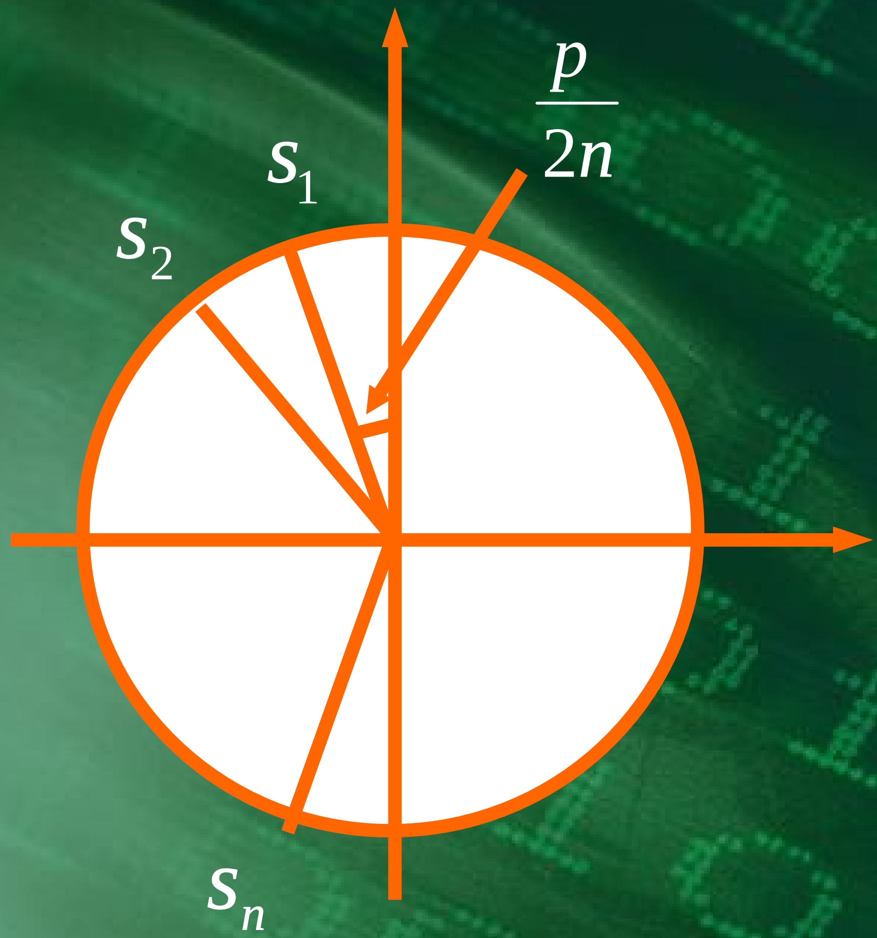
【定义】$1+(-1)^n\bar{s}^{2n}$ 方程左半平面的根组成 $B_n(\bar{s})$，称其为**Butterworth**多项式

有 $$1+(-1)^n\bar{s}^{2n}=B_n(\bar{s})\cdot B_n(-\bar{s})$$

解方程 $$1+(-1)^n\bar{s}^{2n}=0$$

$$\bar{s}^{2n}=(-1)^{n+1}=e^{j[(n+1)\pi+2k\pi]}$$

$$\bar{s}=e^{j\frac{2k+n+1}{2n}\pi} \qquad k=0,1,2,\cdots 2n-1$$



2n个根对称等间隔的分布在单位圆上。

【定理】Butterworth多项式是n阶多项式

$$B_n(\bar{s}) = b_0 + b_1\bar{s} + \cdots + b_n\bar{s}^n$$

其中，

$$b_0 = 1$$

$$b_k = b_{n-k}$$

$$b_k = \prod_{m=1}^{k} \frac{\cos\left(\frac{m-1}{2n}\pi\right)}{\sin\left(\frac{m}{2n}\pi\right)}$$

【证明】令 $$d = e^{j\frac{p}{2n}}$$

$$B_n(\bar{s}) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\bar{s} - d^{\,2k+n+1}\right) = \frac{\bar{s} - d^{\,n+1}}{\bar{s} - d^{\,3n+1}} \prod_{k=1}^{n}\left(\bar{s} - d^{\,2k+n+1}\right)$$

有，

$$d^{\,n+1} = e^{j\frac{n+1}{2n}p} = e^{j\frac{p}{2}} e^{j\frac{p}{2n}} = jd$$

$$d^{\,3n+1} = -jd$$

$$d^{\,2n} = 1$$

$$B_n(\bar{s})=\prod_{k=0}^{n-1}\left(\bar{s}-d^{2k+n+1}\right)=\frac{\bar{s}-d^{n+1}}{\bar{s}-d^{3n+1}}\prod_{k=1}^{n}\left(\bar{s}-d^{2k+n+1}\right)$$

$$=\frac{\bar{s}-jd}{\bar{s}+jd}\prod_{k=1}^{n}\left(\bar{s}-d^{2k+n+1}\right)$$

做符号代换， $k'=k-1$

$$B_n(\bar{s})=\frac{\bar{s}-jd}{\bar{s}+jd}\prod_{k'=0}^{n-1}\left(\bar{s}-d^{2k'+n+3}\right)=\frac{\bar{s}-jd}{\bar{s}+jd}\prod_{k'=0}^{n-1}d^{2}\left(\bar{s}d^{-2}-d^{2k'+n+1}\right)$$

$$=\frac{\bar{s}-jd}{\bar{s}+jd}\cdot d^{2n}\cdot\prod_{k'=0}^{n-1}\left(\bar{s}d^{-2}-d^{2k'+n+1}\right)$$

$$=-\frac{\bar{s}-jd}{\bar{s}+jd}\cdot B_n\left(\bar{s}d^{-2}\right)$$

$$B_n(\bar{s}) = -\frac{\bar{s} - jd}{\bar{s} + jd} \cdot B_n(\bar{s}d^{-2})$$

$$(\bar{s} + jd)\sum_{m=0}^{n} b_m \bar{s}^m + (\bar{s} - jd)\sum_{m=0}^{n} b_m d^{-2m} \bar{s}^m = 0$$

由于变量的任意性，即所有系数为零。寻找 $\bar{s}^{k+1}$ 系数

$m = k$　　　　$m = k$

$$(\bar{s} + jd)\sum_{m=0}^{n} b_m \bar{s}^m + (\bar{s} - jd)\sum_{m=0}^{n} b_m d^{-2m} \bar{s}^m$$

$m = k + 1$　　　　$m = k + 1$

$$b_k + jd\, b_{k+1} + b_k\, d^{-2k} - jd\, b_{k+1} d^{-2(k+1)} = 0$$

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{1+d^{-2k}}{jd^{-k}\left(d^{-(k+1)} - d^{k+1}\right)} = \frac{j\left(d^{k} + d^{-k}\right)}{-d^{-(k+1)} + d^{k+1}}$$

$$d = e^{j\frac{p}{2n}}$$

得到，

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{\cos\left(\frac{kp}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{k+1}{2n}p\right)}$$

显然，

$$b_0 = 1$$

$$b_k = b_{n-k}$$

$$b_k = \prod_{m=1}^{k} \frac{\cos\left(\dfrac{m-1}{2n} p\right)}{\sin\left(\dfrac{m}{2n} p\right)}$$

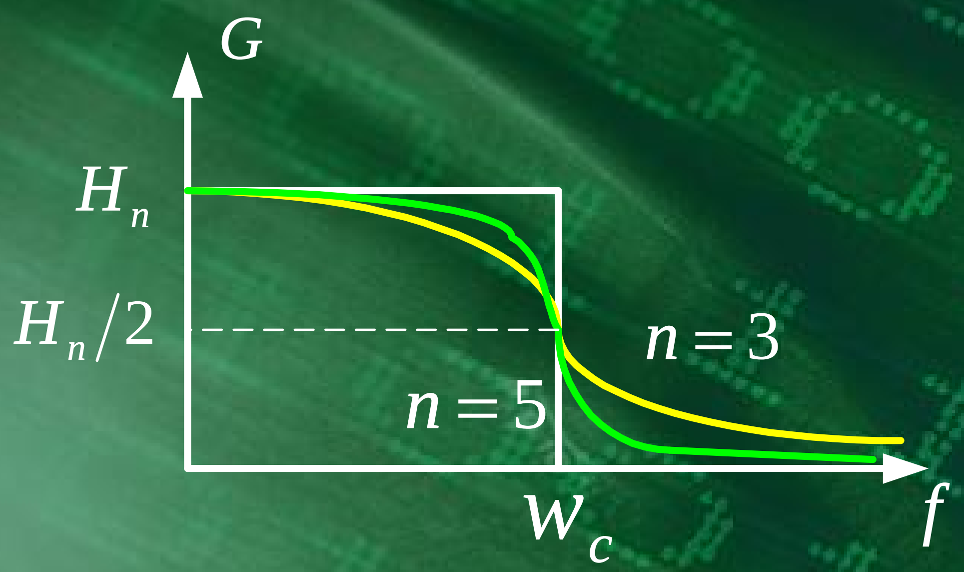
14. Butterworth综合

一、Butterworth逼近

二、Butterworth多项式

三、Butterworth多项式的n

四、Butterworth综合



n 是**Butterworth**多项式的唯一可变参量；

n 确定，波形确定；

n 与带外衰减指标相关。

衰减

$$L_B = -10\log G\left(\overline{w}^2\right) = -10\log H_n + 10\log\left(1+\overline{w}^{2n}\right)$$

令 ***Hn=1***，无耗情况；

带外指标 $\overline{w} = \overline{w}_s > 1$ 时， $L_B > AL$

$$AL = 10\log\left(1+\overline{w}_s^{2n}\right)$$

$$\boxed{n = \mathrm{int}\left[\frac{\log\left(10^{\frac{AL}{10}}-1\right)}{2\log\overline{w}_s}\right]+1}$$

14. Butterworth综合

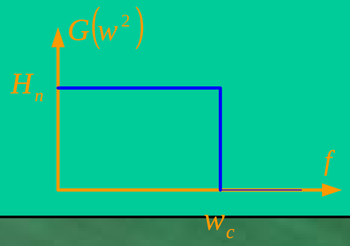
一、Butterworth逼近

二、Butterworth多项式

三、Butterworth多项式的n

四、Butterworth综合

理想响应



采用Buttworth逼近函数

$$G(-s^2)=S_{21}(s)S_{21}(-s)$$

网络无耗

$$S_{11}(s)S_{11*}(s)$$
$$=1-G(-s^2)$$

分解反射函数

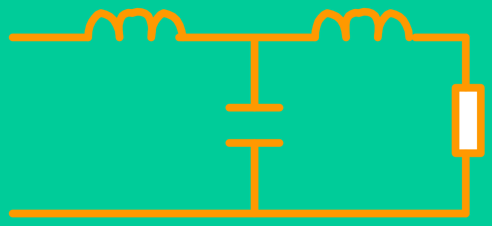
非唯一，可实现性

$$S_{11}(s)$$

阻抗函数

$$Z_{in}(s)=Z_0\frac{1\pm S_{11}(s)}{1\mp S_{11}(s)}$$

阶梯电抗网络



1. 求S11乘积

$$S_{11}(\bar{s})S_{11}(-\bar{s})=1-S_{21}(\bar{s})S_{21}(-\bar{s})$$

$$=1-G\left(-\bar{s}^{2}\right)=1-\frac{H_n}{1+(-1)^n\bar{s}^{2n}}=\frac{(1-H_n)+(-1)^n\bar{s}^{2n}}{1+(-1)^n\bar{s}^{2n}}$$

令 $K=(1-H_n)^{\frac{1}{2n}}$

$$S_{11}(\bar{s})S_{11}(-\bar{s})=(1-H_n)\frac{1+(-1)^2\left(\dfrac{\bar{s}}{K}\right)^{2n}}{1+(-1)^n\bar{s}^{2n}}=K^{2n}\frac{1+(-1)^n\bar{s}'^{2n}}{1+(-1)^n\bar{s}^{2n}}$$

$$\boxed{S_{11}(\bar{s})S_{11}(-\bar{s})=K^{2n}\frac{B_n(\bar{s}')B_n(-\bar{s}')}{B_n(\bar{s})B_n(-\bar{s})}}$$

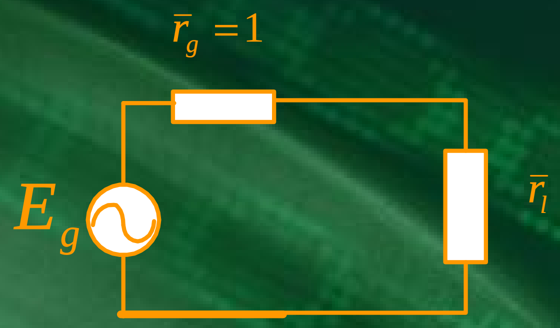
2. 提取S11

$$\boxed{S_{11}(\bar{s}) = \pm K^{n} \frac{B_n(\bar{s}')}{B_n(\bar{s})}}$$

注意：分解的过程不是唯一的；分母的根必须在左半平面；

【定理】 $\bar{r}_l \geq 1$ 取正号；$\bar{r}_l < 1$ 取负号；

【证明】



考虑直流情况，源和负载直接相连， $\bar{s} = 0$

$$S_{11}(0) = \frac{\bar{r}_l - 1}{\bar{r}_l + 1}$$

又，

$$S_{11}(0) = \pm(1 - H_n)^{\frac{1}{2}}$$

$$H_n = \frac{4\bar{r}_l}{(1 + \bar{r}_l)^2}$$

得到，$$S_{11}(0)=\pm\frac{|\bar{r}_l-1|}{\bar{r}_l+1}$$

显然地，

$\bar{r}_l \geq 1$ 取正号； $\bar{r}_l < 1$ 取负号；

3. 得到输入阻抗

$$\boxed{\bar{Z}_{in}(\bar{s})=\frac{1+S_{11}(\bar{s})}{1-S_{11}(\bar{s})}}$$

4. 输入阻抗辗转相除，得到电抗阶梯网络

【例】试综合Hn=1，n=2，Butterworth网络

【解】

$$G\left(-\bar{s}^2\right)=\frac{H_n}{1+\left(-1\right)^2\bar{s}^{2n}}=\frac{1}{1+\bar{s}^4}$$

$$S_{11}\left(\bar{s}\right)S_{11}\left(-\bar{s}\right)=1-\frac{1}{1+\bar{s}^4}=\frac{\bar{s}^4}{1+\bar{s}^4}$$

令：

$$B_2\left(\bar{s}\right)=1+a\bar{s}+\bar{s}^2$$

$$B_2\left(-\bar{s}\right)=1-a\bar{s}+\bar{s}^2$$

$$B_2(\bar{s})B_2(-\bar{s}) = 1 + \left(2 - a^2\right)\bar{s}^2 + \bar{s}^4 = 1 + \bar{s}^4$$

得到，

$$B_2(\bar{s}) = 1 + \sqrt{2}\bar{s} + \bar{s}^2$$

$$S_{11}(\bar{s})S_{11}(-\bar{s}) = \frac{\bar{s}^4}{1 + \bar{s}^4} = \frac{\bar{s}^2 \cdot (-\bar{s})^2}{B_2(\bar{s}) \cdot B_2(-\bar{s})}$$

取，

$$S_{11}(\bar{s}) = \frac{\bar{s}^2}{1 + \sqrt{2}\bar{s} + \bar{s}^2}$$

$$Z_{in}(\bar{s}) = \frac{1 - S_{11}(\bar{s})}{1 + S_{11}(\bar{s})} = \frac{2\bar{s}^2 + \sqrt{2}\bar{s} + 1}{\sqrt{2}\bar{s} + 1}$$

$$Z_{in}(\bar{s}) = \frac{2\bar{s}^2 + \sqrt{2}\bar{s} + 1}{\sqrt{2}\bar{s} + 1}$$

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{2}\bar{s}+1 \;\big)\; 2\bar{s}^2 + \sqrt{2}\bar{s} + 1 & \sqrt{2}\bar{s} \\
2\bar{s}^2 + \sqrt{2}\bar{s} & \\
\hline
1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
1 \;\big)\; \sqrt{2}\bar{s} + 1 & \sqrt{2}\bar{s} \\
\sqrt{2}\bar{s} & \\
\hline
1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
1 \;\big)\; 1 & 1 \\
1 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

得到电抗阶梯网络