VI. 电磁场定理和网络性质

西安电子科技大学，电子工程学院

苏 涛

VI 电磁场定理和网络性质

6.1 电磁场定理

6.2 单端口网络性质

6.3 互易性质

6.4 无耗性质

6.5 对称双端口性质

VI 电磁场定理和网络性质

6.1 电磁场定理

- 6.1.1 电磁场唯一性定理
- 6.1.2 场的叠加原理
- 6.1.3 Poynting定理
- 6.1.4 互易定理
- 6.1.5 Foster定理

6.2 单端口网络性质

6.3 互易性质

6.4 无耗性质

6.5 对称双端口性质

6.1.1 电磁场唯一性定理

如果一个封闭面上的切向电场或者切向磁场已知，则内部区域的电磁场唯一确定。

如果我们做一个封闭面，包围作为网络的区域，封闭面的一部分通过网络端口的参考面，其余部分在电磁场为零的外部区域。此时，只需确定各个参考面上切向电场和切向磁场，则网络区域的场就唯一给定了。

根据上节关于模式电压和模式电流的定义，其与参考面上的切向电场和切向磁场成正比，且就是纵向变化函数。在某种规范化条件下，切向电场或切向磁场确定，即电压或电流确定；各种规范条件下，电压和电流的定义差一个比例常数。

电压和电流虽然非唯一，但仍然有意义。电压电流参量的网络参数可以在波网络中使用。

在微波分布网络中，参考面具有重要意义，它是网络与外部的连接面。一般默认采用参考面为截面的延展柱型传输线作为网络的连接，传输线的轮廓边界是理想金属导体（切向电场为零），即把参考面作为波导的截面。这样做即各个网络端口参考面之间是传输线连接，或者说各个参考面是传输线网络端口。数值计算时，所谓端口匹配，往往采用模拟连接无穷长传输线计算，该传输线界面即端口参考面，称其为波端口（wave port）。

6.1.2 场的叠加原理

对于线性媒质（ m ， e ，s 均与场强无关），Maxwell方程是线性的，场量满足叠加原理，即总的场是由各个源产生的场叠加而成。

线性媒质电磁场问题可以抽象为线性网络研究。

对应到各个端口，某一端口的响应是由各个端口的激励所产生的响应线性叠加而成。

对于线性网络，总是试图把研究的物理量分解为多个单位量的线性叠加，比如信号时域的冲击函数分解，信号频域的傅里叶分析，波导传输线的本征模分析等，这些是该线性空间的基，任何线性空间的量都是这些基的不同比例的加和，这个量就可以用这些系数表示，或者说矢量表达。

所谓线性网络，或者线性变换，就是输入和输出之间系数的变换。如果线性空间是N维的，显然变换可以用N*N矩阵表示。

选择不同的基，同一网络可以有不同的参数表达，比如二维空间，可以选择［1,0］和［0,1］作为基，也可以选择［1,1］和［1,-1］作为基。这是线性网络的基本矩阵理论。

6.1.3 Poynting定理

设曲面包围的区域，有

$$\frac{1}{2}\oiint_{s} \vec{E} \times \vec{H}^{*} \cdot \hat{n} ds = P_l + j2w(W_m - W_e)$$

将Poynting定理应用于端口网络

$$\frac{1}{2}\oiint_{s} \vec{E} \times \vec{H}^{*} \cdot \hat{n} ds = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\iint_{S_i} \vec{E}_t \times \vec{H}_t^{*} \cdot \hat{n} ds = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} V_i I_i^{*}$$

$$\frac{1}{2}[I]^{+}[V] = P_l + j2w(W_m - W_e)$$

网络的Poynting定理，它表明从各端口进入网络的复功率的实部等于网络中的损耗功率，虚部等于储能差。

当网络无耗时，$P_l = 0$ ；网络谐振时 $W_m = W_e$ 。

6.1.4 互易定理

设曲面S包围的区域，有

$$\oint\!\!\!\oint_S \left(\vec{E}^a \times \vec{H}^b - \vec{E}^b \times \vec{H}^a\right) \cdot \hat{n} ds$$
$$= \iiint_V \left(\vec{E}^a \cdot \vec{J}^b + \vec{H}^a \cdot \vec{M}^b - \vec{E}^b \cdot \vec{J}^a - \vec{H}^b \cdot \vec{M}^a\right) dv$$

如果**S**包围区域无源

$$\oint\!\!\!\oint_S \left(\vec{E}^a \times \vec{H}^b - \vec{E}^b \times \vec{H}^a\right) \cdot \hat{n} ds = 0$$

应用于端口网络，考虑到模式电压和模式电流与场的关系，以及在同一参考面上模式矢量函数和激励无关，得

$$\sum_{i=1}^{n}\left(V_i^a I_i^b - V_i^b I_i^a\right) = 0$$

$$\left[I^b\right]^T\left[V^a\right] = \left[V^b\right]^T\left[I^a\right]$$

上式称为网络的互易定理。

6.1.5 Foster定理

设曲面S包围的区域v中无耗，则电磁场的Foster定理为：

$$\oiint_S \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial w} \times \vec{H}^* - \frac{\partial \vec{H}}{\partial w} \times \vec{E}^* \right) \cdot \hat{n} ds = j4\left(W_m + W_e\right)$$

应用于端口网络，并考虑到模式矢量函数和与无关

$$\sum_{i=1}^{n} \oiint_S \left(\frac{\partial \vec{E}_t}{\partial w} \times \vec{H}_t^* - \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial w} \times \vec{E}_t^* \right) \cdot \hat{n} ds = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V_i}{\partial w} \times I_t^* + \frac{\partial I_i}{\partial w} V_t^* \right) = [I]^+ \frac{\partial [V]}{\partial w} + [V]^+ \frac{\partial [I]}{\partial w}$$

网络的Foster定理为

$$[I]^{+}\frac{\partial[V]}{\partial w}+[V]^{+}\frac{\partial[I]}{\partial w}=j4\left(W_{m}+W_{4}\right)$$

VI 电磁场定理和网络性质

6.1 电磁场定理

6.2 单端口网络性质

  6.2.1 阻抗特性

  6.2.2 无耗单端口网络的电抗斜率

  6.2.3 单端口网络阻抗的奇偶性

6.3 互易性质

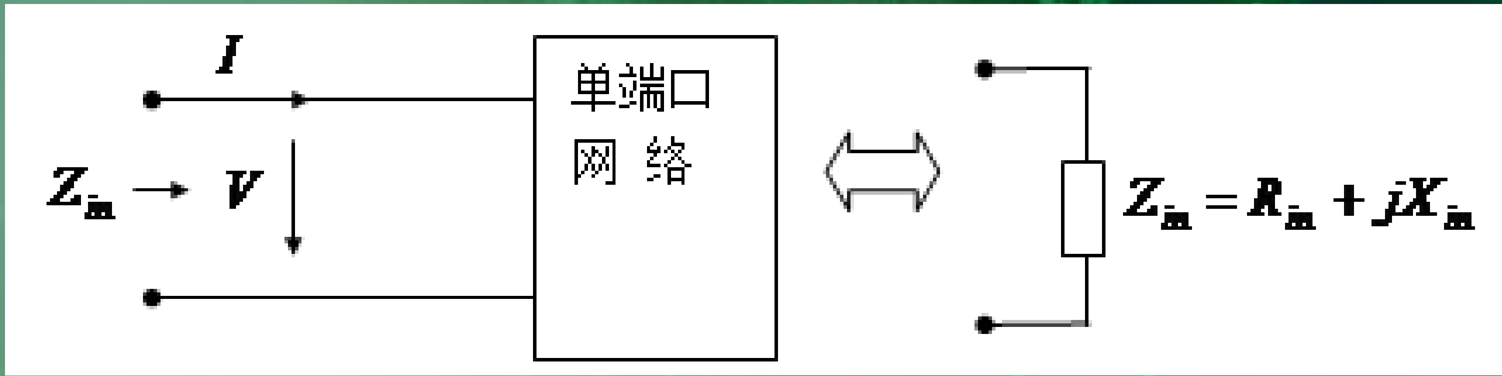
6.4 无耗性质

6.5 对称双端口性质

6.2.1 阻抗特性

根据Poynting定理

$$Z_{in}=\frac{V}{I}=\frac{VI^*}{|I|^2}=\frac{2P_l+j4w(W_m-W_e)}{|I|^2}=R_{in}+jX_{in}$$



6.2.2 无耗单端口网络的电抗斜率

网络无耗时，当网络中 $W_m > W_e$ 时，单端口网络呈感性， $Z_{in} = jX_{in}$，根据Foster定理，有

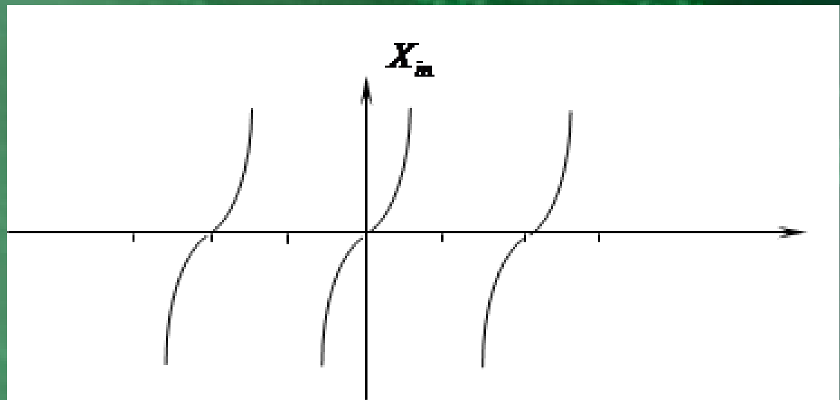
$$V^* \frac{\partial I}{\partial w} + I^* \frac{\partial V}{\partial w} = -jX_{in} I^* \frac{\partial I}{\partial w} + I^* \frac{\partial (jX_{in} I)}{\partial w}$$

$$= -jX_{in} I^* \frac{\partial I}{\partial w} + jX_{in} I^* \frac{\partial I}{\partial w} + j|I|^2 \frac{\partial X_{in}}{\partial w}$$

$$= j|I|^2 \frac{\partial X_{in}}{\partial w} = j4(W_m + W_e)$$

$$\frac{\partial X_{in}}{\partial w}=\frac{4\left(W_m+W_e\right)}{\left|I\right|^2}>0$$

无耗单端口网络的电抗关于频率的斜率始终为正，电抗随频率的增加而单调增加。如果单端口网络的电抗或电纳关于频率有无穷多个零点和极点，则这些零、极点在轴上一定是交替出现的



6.2.3 单端口网络阻抗奇偶性

根据Fourier变换有

$$V(w)=\frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty}v(t)e^{-jwt}dt$$

$$V(-w)=\frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty}v(t)e^{jwt}dt=V^{*}(w)$$

$$I(-w)=I^{*}(w)$$

得到

$$Z_{in}^{*}(w)=Z_{in}(-w)$$

阻抗的实部是频率的偶函数，虚部是频率的奇函数。

$$\Gamma_{in}^{*}(w)=\Gamma_{in}(-w)$$

反射系数的模式是频率的偶函数，相位是频率的奇函数。

VI 电磁场定理和网络性质

6.1 电磁场定理

6.2 单端口网络性质

6.3 互易性质

- 6.3.1 Z和Y矩阵
- 6.3.2 S矩阵
- 6.3.3 双端口网络的A和T矩阵

6.4 无耗性质

6.5 对称双端口性质

6.3.1 Z和Y矩阵

根据互易定理

$$\left[I^{b}\right]^{T}[Z]\left[I^{a}\right]=\left[I^{b}\right]^{T}[Z]^{T}\left[I^{a}\right]$$

$$\left[I^{b}\right]^{T}\left\{[Z]-[Z]^{T}\right\}\left[I^{a}\right]=0$$

得到

$$[Z]^{T}=[Z]$$

$$[Y]^{T}=[Y]$$

6.3.2 S矩阵

$$\begin{cases}[v]=\{[1]+[s]\}[a]\\ [i]=\{[1]-[s]\}[a]\end{cases}$$

根据互易定理

$$[i^b]^T[v^a]=[v^b]^T[i^a]$$

$$[a^b]^T\{[1]-[s]^T\}\{[1]+[s]\}[a^a]=[a^b]^T\{[1]+[s]^T\}\{[1]-[s]\}[a^a]$$

$$2\left[a^{b}\right]^{T}\left\{[s]-[s]^{T}\right\}\left[a^{a}\right]=0$$

网络互易，

$$[s]^{T}=[s]$$

6.3.3 双端口网络的A和T矩阵

双口网络，互易定理为

$$I_1^b V_1^a + I_2^b V_2^a = V_1^b I_1^a + V_2^b I_2^a$$

可以表示为，

$$\begin{bmatrix} V_1^a, I_1^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^b \\ I_1^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2^a, -I_2^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2^b \\ -I_2^b \end{bmatrix}$$

A矩阵的定义，代入

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

$$\left[V_2^a, -I_1^a\right][A]^T \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} [A] \begin{bmatrix} V_2^b \\ -I_2^b \end{bmatrix} = \left[V_2^a, -I_2^a\right] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2^b \\ -I_2^b \end{bmatrix}$$

电压和电流的任意性

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det[A] = 1$$

VI 电磁场定理和网络性质

6.1 电磁场定理

6.2 单端口网络性质

6.3 互易性质

6.4 无耗性质

- 6.4.1 Z和Y矩阵
- 6.4.2 S矩阵
- 6.4.3 双端口网络的A和T矩阵

6.5 对称双端口性质

6.4.1 Z和Y矩阵

网络无耗，根据Poynting定理

$$[I]^{+}[V]=j4w\left(W_{m}-W_{e}\right)$$

$$[I]^{+}[Z][I]=j4w\left(W_{m}-W_{e}\right)$$

两式相加，并注意到电流的任意性

$$[Z]^{+}=-[Z]$$

如果无耗网络也是互易的，则

$$[Z]^* = -[Z]$$

即，

$$Z_{ij}^* = -Z_{ij}$$

所以无耗互易网络的阻抗矩阵元素均为虚数。

6.4.2 S矩阵

$$[i]^{+}[v]=j4w(W_m-W_e)$$

$$[a]^{+}([1]-[s]^{+})([1]+[s]^{+})[a]=j4w(W_m-W_e)$$

即

$$[a]^{+}([1]-[s]^{+}[s])[a]+[a]^{+}([1]-[s]^{+})[a]=j4w(W_m-W_e)$$

左边第一项为实数，第二项为虚数；右边为虚数

$$\begin{cases} [a]^{+}\left([1]-[s]^{+}[s]\right)[a]=0 \\ [a]^{+}\left([s]-[s]^{+}\right)[a]=j4w\left(W_m-W_e\right) \end{cases}$$

入射波的任意性

$$[s]^{+}[s]=[1]$$

无耗网络的幺正性。

6.4.3 双端口网络的A和T矩阵

A矩阵和Z矩阵的关系，得到

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{11}}{a_{21}} & \dfrac{\det[a]}{a_{21}} \\ \dfrac{1}{a_{21}} & \dfrac{a_{22}}{a_{21}} \end{bmatrix}$$

无耗网络Z矩阵的性质

$$[z]^{+} = -[z]$$

$$\begin{cases} \dfrac{a_{11}^*}{a_{21}^*} = -\dfrac{a_{11}}{a_{21}} \\ \dfrac{a_{22}^*}{a_{21}^*} = -\dfrac{a_{22}}{a_{21}} \\ \dfrac{1}{a_{21}^*} = -\dfrac{\det[a]}{a_{21}} \end{cases}$$

对于无耗互易网络 $\det[a] = 1$

$$a_{21}^* = -a_{21}\ ,\ a_{11}^* = a_{11}\ ,\ a_{22}^* = a_{22}\ ,\ a_{12}^* = -a_{12}$$

即无耗互易双端口网络***a11,a22***为实数，***a12,a21***为纯虚数。

$$[t]=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22} & a_{11}-a_{12}+a_{21}-a_{22} \\ a_{11}-a_{21}+a_{12}-a_{22} & a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22} \end{bmatrix}$$

得到

$$t_{11}^{*}=t_{22}, \quad t_{12}^{*}=t_{21}$$

VI 电磁场定理和网络性质

6.1 电磁场定理

6.2 单端口网络性质

6.3 互易性质

6.4 无耗性质

6.5 对称双端口性质

所谓对称双端口网络是指网络的两个端口是对称的，即从网络端口1看出的情况与从端口2看去的情况完全一样。

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{22} & Z_{21} \\ Z_{12} & Z_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$Z_{11} = Z_{22}, Z_{12} = Z_{21}$$

对于对称网络

$$\begin{cases} Z_{11} = Z_{22}, & Z_{12} = Z_{21} \\ Y_{11} = Y_{22}, & Y_{12} = Y_{21} \\ s_{11} = s_{22}, & s_{12} = s_{21} \end{cases}$$

对于**A**矩阵，有

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$$

得到

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[A]} \begin{bmatrix} A_{22} & A_{12} \\ A_{21} & A_{11} \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} \det[A] = 1 \\ A_{11} = A_{22} \end{cases}$$

对称双端口网络首先是互易网络。