概率论与数理统计大作业 Part1

教师：许述文 班级：1402011 班 姓名：许述文 学号：

2015.12.7

1.一架长机和两架僚机一同前往某一目的地进行轰炸，但要到目的地必须有无线电导航不可，而只有长机具有此项设备。一旦到达目的地，各飞机独立地进行轰炸，且轰炸目标的概率均为 0.3。在达到目的地之前，须经过高射炮区，此时任一飞机被击落的概率为 0.2，求目标被击毁的概率。

解：设 B_i $(i=0,1,2,3)$ 表示事件"三架飞机中有 i 架通过高射炮区"，A表示事件"目标被击毁"，则

$$P(B_3) = P(\text{三架全通过}) \underbrace{=}_{\text{独立性}} P(\text{长机通过})\cdot P(\text{僚机1通过})\cdot P(\text{僚机2通过})$$

$$= (1-0.2)^3 = 0.512$$

$P(B_2) = 0.8\times0.8\times0.2 + 0.8\times0.2\times0.8 = 0.256$，$P(B_1) = 0.8\times0.2\times0.2 = 0.032$

$P(B_0) = 1 - P(B_1) - P(B_2) - P(B_3) = 0.2$，　　公式为 $P(C_1\cup C_2) = P(C_1)+P(C_2)-P(C_1\cap C_2)$

则 $P(A|B_0) = 0$，$P(A|B_1) = 0.3$，$P(A|B_2) = \underline{0.3+0.3-0.3\times0.3} = 0.51$

$P(A|B_3) = 3\times0.3 - 3\times0.3^2 + 0.3^3 = 0.657$，则 $P(A) = \underbrace{\sum_{i=0}^{3} P(B_i)P(A|B_i)}_{\text{全概率公式}} = 0.4765$.

2.设连续型随机变量 X 的概率密度函数为：

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & -1<x<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

令 $Y = X^2+1$，求：

（1）Y 的概率密度；（2）$P(-1<Y<\frac{3}{2})$.

解：(1) 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则 $F_Y(y) = P(Y\le y) = P(X^2\le y-1)$

当 $y<1$ 时，$F_Y(y) = 0$

当 $1\le y<2$ 时，$F_Y(y) = P(-\sqrt{y-1}\le x\le\sqrt{y-1}) = \int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} |x|dx$

$$= 2\int_0^{\sqrt{y-1}} x\,dx = y-1$$

当 $y\ge2$ 时，$F_Y(y) = 1$　故 Y 的概率密度为 $f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} 1, & 1<y<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(2) $P(-1<Y<\frac{3}{2}) = F_Y(\frac{3}{2}) - F_Y(-1) = F_Y(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$

或 $P(-1<Y<\frac{3}{2}) = \int_1^{\frac{3}{2}} dy = \frac{1}{2}$.

3.设二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}21x^2y/4, x^2\le y\le 1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$$

求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 与 $f_{Y|X}(y|x)$。

边缘概率

解：先求 $f_{X|Y}(x|y)$. $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2y\,dx=\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

因此，$\forall\, 0<y<1$，$f_Y(y)>0$，X的条件概率为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2y^{-\frac{3}{2}}, & -\sqrt{y}<x<\sqrt{y}\\ 0, & 其他\end{cases}$$

再求 $f_{Y|X}(y|x)$。 条件概率

由于 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2y\,dy=\frac{21}{8}x^2(1-x^4), -1<x<1$

因此，$\forall -1<x<1$，$f_X(x)>0$，Y的条件概率为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{2y}{1-x^4}, \quad x^2<y<1$$

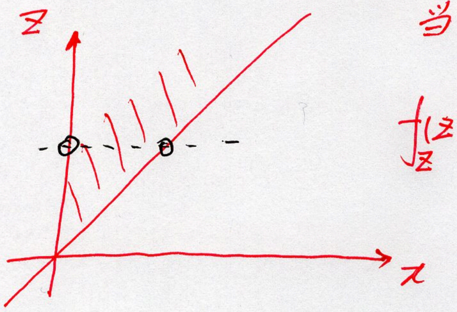
4.设二维连续型随机变量（X,Y）的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}, x>0, y>0\\ 0, \quad 其他\end{cases}$$

求 Z=X+Y 的概率密度。

解：因为 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$

由 $\begin{cases}x>0\\ z-x>0\end{cases}$，得 $z>x$，从而 $z>0$，故当 $z>0$ 时，$f_Z(z)>0$，当 $z\le 0$ 时，$f_Z(z)=0$，



当 $x>0$ 时，$0<x<z$，从而Z的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\int_0^z\frac{1}{2}(x+z-x)e^{-(x+z-x)}dx$$

$$=\frac{1}{2}z^2e^{-z}, \quad z>0$$

因此

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}z^2e^{-z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

5.设二维连续型随机变量（X,Y）的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin(x+y),0\le x\le\frac{\pi}{2},0\le y\le\frac{\pi}{2}\\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 其他\end{cases}$$

试求随机变量 X，Y 的相关系数 ρ_{XY}。

解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\,dxdy=\frac{\pi}{4}$，$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}-2$

$D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2$. 同理. $E(Y)=\frac{\pi}{4}$，$D(Y)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)\,dxdy=\frac{\pi}{2}-1$，从而 $cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$

$=\frac{\pi}{2}-1-\frac{\pi^2}{16}$

故. $\rho_{XY}=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{\frac{\pi}{2}-1-\frac{\pi^2}{16}}{\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2}$，

6.设 X_1、X_2 为来自总体 X 的一个样本，$E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2>0,\bar{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$,随机变量 $Y_1=X_1-\bar{X},Y_2=X_2-\bar{X}$, 求 Y_1 与 Y_2 的协方差 $\mathrm{cov}(Y_1,Y_2)$ 以及 Y_1 与 Y_2 的相关系数 $\rho_{Y_1Y_2}$。

解：由题设知

$E(Y_1)=E(X_1-\bar{X})=EX_1-E\bar{X}=0$

$E(Y_2)=E(X_2-\bar{X})=EX_2-E\bar{X}=0$

$D(Y_1)=D(X_1-\bar{X})=D\left[\frac{1}{2}(X_1-X_2)\right]=\frac{1}{4}[DX_1+DX_2]=\frac{1}{2}\sigma^2$

同理可得 $DY_2=\frac{1}{2}\sigma^2$

(1) $cov(Y_1,Y_2)=E(Y_1Y_2)-EY_1\cdot EY_2$

$=E\left[(X_1-\bar{X})(X_2-\bar{X})\right]=-\frac{1}{4}E\left[X_1^2-2X_1X_2+X_2^2\right]$

$=-\frac{1}{4}\left[EX_1^2-2EX_1\cdot EX_2+EX_2^2\right]$

$=-\frac{1}{4}\left[DX_1+(EX_1)^2-2\mu^2+DX_2+(EX_2)^2\right]$

$=-\frac{1}{2}\sigma^2$

(2) $\rho_{Y_1Y_2}=\frac{cov(Y_1,Y_2)}{\sqrt{DY_1}\sqrt{DY_2}}=\frac{-\frac{1}{2}\sigma^2}{\sqrt{\frac{1}{2}\sigma^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\sigma^2}}=-1.$