

第一章 传输线理论

- ◆ § 1.1 传输线方程及其解
- ◆ § 1.2 均匀无耗长线的工作状态
- ◆ § 1.3 圆图及阻抗匹配
- ◆ § 1.4 波导与同轴线
- ◆ § 1.5 平面传输线

§ 1.3 圆图及阻抗匹配

从前面的讨论可以看出，分析长线的工作状态离不开计算阻抗、反射系数等参数，会遇到大量繁琐的复数运算。为了简化运算，图解法是常用的手段之一。在天线和微波工程设计中，经常会用到各种图形曲线，它们既简便直观，又具有足够的准确度，对天线和微波工程设计有着重要的影响作用。下面介绍阻抗圆图，也称Smith圆图。

一、圆图的构成

在传输线的输入阻抗与反射系数一节中，已知均匀无耗传输线上某点的反射系数与终端负载反射系数及某点的等效输入阻抗之间有下列关系

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma(z') = \Gamma_u + j\Gamma_v = \Gamma_L e^{-j2\beta z'} \\ \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = |\Gamma_L| e^{j\varphi_L} \\ \Gamma(z') = |\Gamma_L| e^{j(\varphi_L - 2\beta z')} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} Z_{in}(z') = Z_0 \frac{1 + \Gamma(z')}{1 - \Gamma(z')} \\ \Gamma(z') = \frac{Z_{in}(z') - Z_0}{Z_{in}(z') + Z_0} \end{array} \right. \quad (1-13f)$$

§ 1.3 圆图及阻抗匹配

阻抗千变万化，极难统一表述，因此引入归一化阻抗的概念，用 Z_0 归一化，统一起来作为一种情况加以研究。

归一化输入阻抗和负载阻抗定义为：

$$\overline{Z}_{in}(z') = \frac{Z_{in}(z')}{Z_0} = \frac{1 + \Gamma(z')}{1 - \Gamma(z')}, \quad \overline{Z}_L = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L}$$

归一化阻抗是一个无量纲量，因此也称为标称阻抗。同时：

$$\begin{cases} \Gamma(z') = \frac{\overline{Z}_{in}(z') - 1}{\overline{Z}_{in}(z') + 1} = \Gamma_u + j\Gamma_v = \Gamma_L e^{-j2\beta z'} \\ \Gamma_L = \frac{\overline{Z}_L - 1}{\overline{Z}_L + 1} = |\Gamma_L| e^{j\varphi_L} & \Gamma(z') = |\Gamma_L| e^{j(\varphi_L - 2\beta z')} \end{cases}$$

根据上述关系式在极坐标系中绘制的曲线图称为极坐标阻抗圆图，也称其为史密斯（Smith）圆图。

1、等反射系数圆

均匀无耗长线的特性阻抗为 Z_0 ，终端接负载阻抗 Z_L ， Γ_L 为终端电压反射系数，传输线上任一点 z' 的反射系数为：

$$\Gamma(z') = |\Gamma| e^{j\varphi} = \Gamma_u + j\Gamma_v \quad |\Gamma|^2 = \Gamma_u^2 + \Gamma_v^2$$

$$\varphi = \arctan \frac{\Gamma_v}{\Gamma_u} = \varphi_L - 2\beta z' \quad \Gamma_u = |\Gamma| \cos \varphi \quad \Gamma_v = |\Gamma| \sin \varphi$$

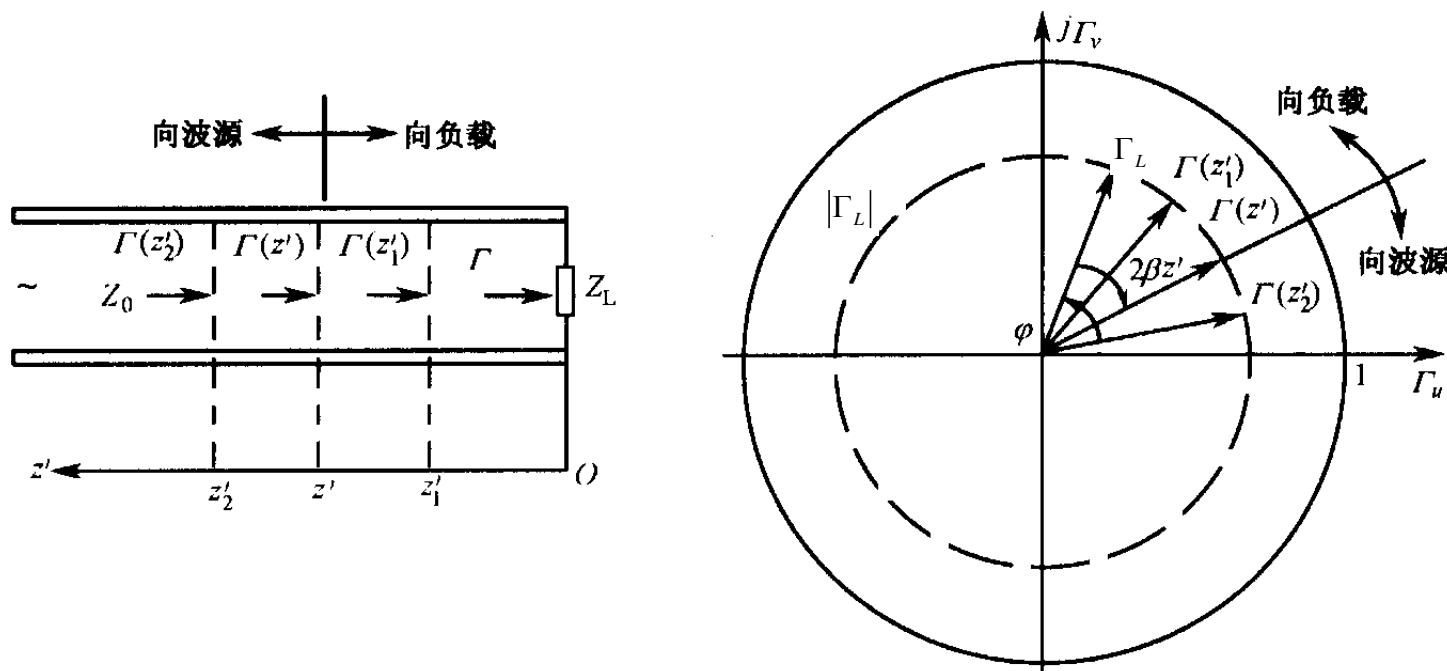
上式表明，在 $\Gamma = \Gamma_u + j\Gamma_v$ 复平面上等反射系数模的轨迹是以坐标原点为圆心、 $|\Gamma|$ 为半径的圆。不同的反射系数模，就对应不同大小的圆。

因为 $|\Gamma| \leq 1$ ，因此所有的反射系数圆都位于单位圆内。这一组圆族称为**等反射系数圆族**。

又因为反射系数模和驻波系数有一一对应的关系，故又称它为**等驻波系数圆族**。

半径为零，即坐标原点为匹配点；半径为1，表示最外面的单位圆为全反射圆。

§ 1.3 圆图及阻抗匹配



无耗传输线离终端 z' 处的电压反射系数为：

$$\Gamma(z') = |\Gamma_L| e^{j(\varphi_L - 2\beta z')}$$

无耗线上任意点的反射系数的相位比终端处的反射系数相位 φ_L 落后 $2\beta z'$ ，所以在反射系数圆上，向波源方向（ z' 增大方向）是顺时针方向；向负载方向（ z' 减小方向）是逆时针方向。

§ 1.3 圆图及阻抗匹配

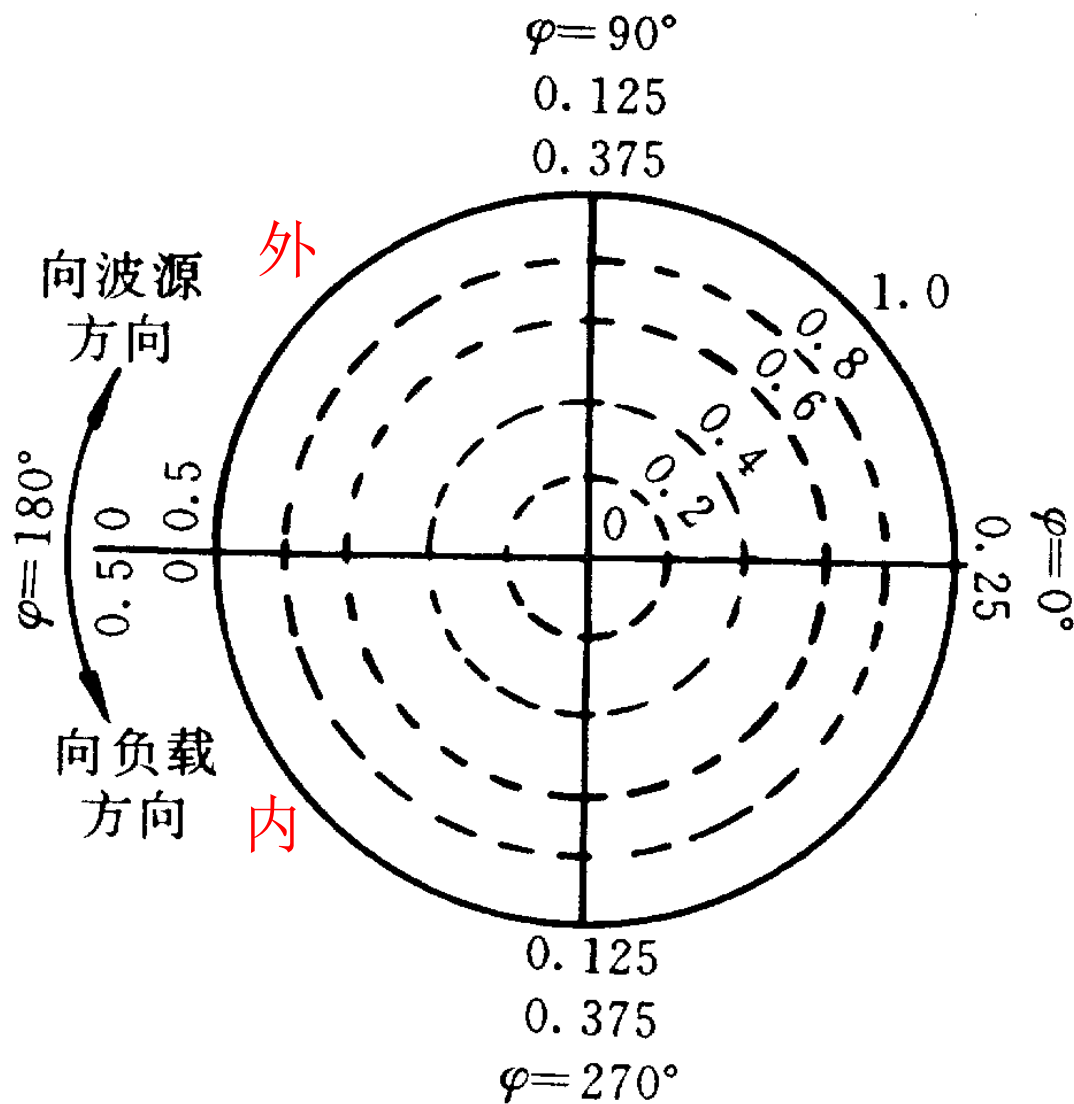
传输线上移动距离与圆图上转动角度的关系为：

$$\Delta\varphi = 2\beta\Delta z' = \frac{4\pi}{\lambda}\Delta z' = 4\pi\frac{\Delta z'}{\lambda} = 4\pi\Delta\bar{z}'$$

式中 $\Delta\bar{z}' = \Delta z' / \lambda$ 为电长度增量，当 $\Delta\bar{z}' = 0.5$ 时，则 $\Delta\varphi = 360^\circ$ ， 1° 对应的电长度是 $1 / 720$ ，这样就可以用电长度的改变量来描述反射系数幅角的变化。

电长度的零点可选在反射系数单位圆周上的任意位置，但由于 $Z_L = R + jX = 0$ 时，对应的反射系数为 -1 ，位于 $|\Gamma|=1$ 圆的 $(-1, 0)$ 点，即单位圆上的 $\varphi = \pi$ 点，在该点上恒有 $K=0$ 。为使图上的所有物理零点一致，故选电长度的零点位于 $(-1, 0)$ 处。

将标有角度及电长度的单位圆与复平面上的反射系数圆族相叠加，就得到了**反射系数圆**。为了使用方便，有的图上标有两个方向的电长度值，如图所示，向波源方向移动读外圈的值，向负载方向移动读里圈的值。



§ 1.3 圆图及阻抗匹配

反射系数圆的特点：

① 一个负载阻抗对应一个 Γ_L ，由 $|\Gamma_L|$ 确定一反射系数圆。该圆上不同的点代表传输线上不同位置的反射系数。

② 反射系数具有 $\lambda / 2$ 的重复性。电长度的零点选在物理零点 $(-1, 0)$ ，即 $\varphi=\pi$ 处，电长度增大的方向，也是向波源方向，是顺时针方向旋转。

③ 不同的工作状态对应的反射系数位于反射系数圆的不同区域，匹配工作时反射系数对应单位圆圆心；驻波工作时反射系数对应单位圆周；行驻波工作时反射系数模值在 $(0, 1)$ 之间。其中右半实轴上的点 $(\varphi=0, 0<|\Gamma_L|<1)$ 对应是纯电阻负载或电压波腹点输入阻抗反射系数的轨迹，左半实轴上的点 $(\varphi=\pi, 0<|\Gamma_L|<1)$ 对应是纯电阻或波节点输入阻抗反射系数的轨迹。

§ 1.3 圆图及阻抗匹配

2、阻抗圆图

由 $\overline{Z_{in}(z')} = \frac{1 + \Gamma(z')}{1 - \Gamma(z')}$, $\Gamma(z') = \Gamma_u + j\Gamma_v$ 可得:

$$\begin{aligned}\overline{Z_{in}(z')} &= \frac{1 + \Gamma_u + j\Gamma_v}{1 - \Gamma_u - j\Gamma_v} = \frac{1 - (\Gamma_u^2 + \Gamma_v^2)}{(1 - \Gamma_u)^2 + \Gamma_v^2} + j \frac{2\Gamma_u}{(1 - \Gamma_u)^2 + \Gamma_v^2} \\ &= r + jx\end{aligned}$$

令实部和虚部分别相等并整理化简,得到两个方程

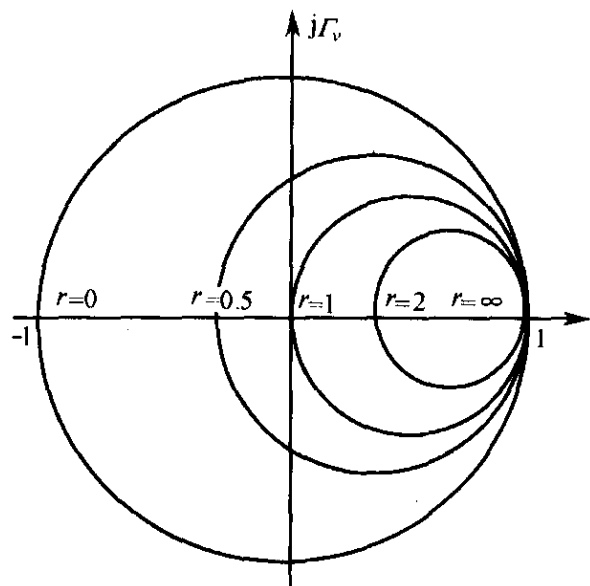
$$\left(\Gamma_u - \frac{r}{r+1}\right)^2 + \Gamma_v^2 = \left(\frac{1}{r+1}\right)^2$$

$$\left(\Gamma_u - 1\right)^2 + \left(\Gamma_v - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

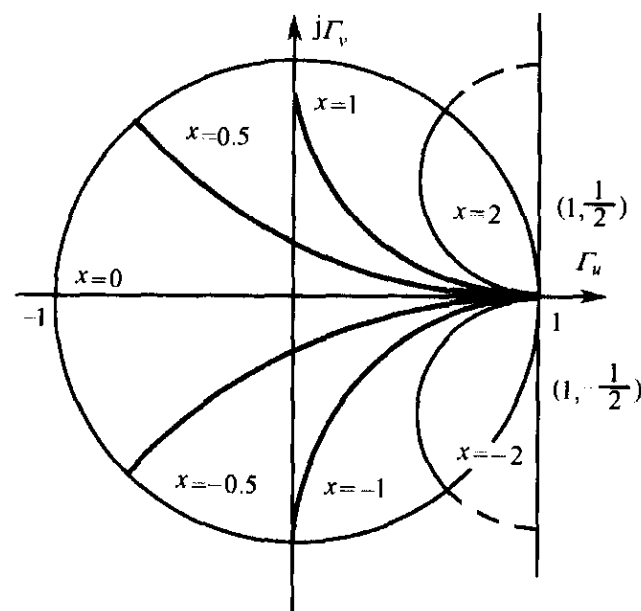
这就是 Γ 平面上等电阻 r 圆和等电抗 x 圆的方程。

§ 1.3 圆图及阻抗匹配

r	圆心 $\left(\frac{r}{1+r}, 0\right)$	半径 $\frac{1}{r+1}$
0	(0, 0)	1
$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{3}, 0\right)$	$\frac{2}{3}$
1	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$\frac{1}{2}$
2	$\left(\frac{2}{3}, 0\right)$	$\frac{1}{3}$
∞	(1, 0)	0



x	圆心 $\left(1, \frac{1}{x}\right)$	半径 $\frac{1}{x}$
0	$(1, \pm\infty)$	∞
± 0.5	$(1, \pm 2)$	2
± 1	$(1, \pm 1)$	1
± 2	$(1, \pm 0.5)$	0.5
$\pm\infty$	$(1, 0)$	0



§ 1.3 圆图及阻抗匹配

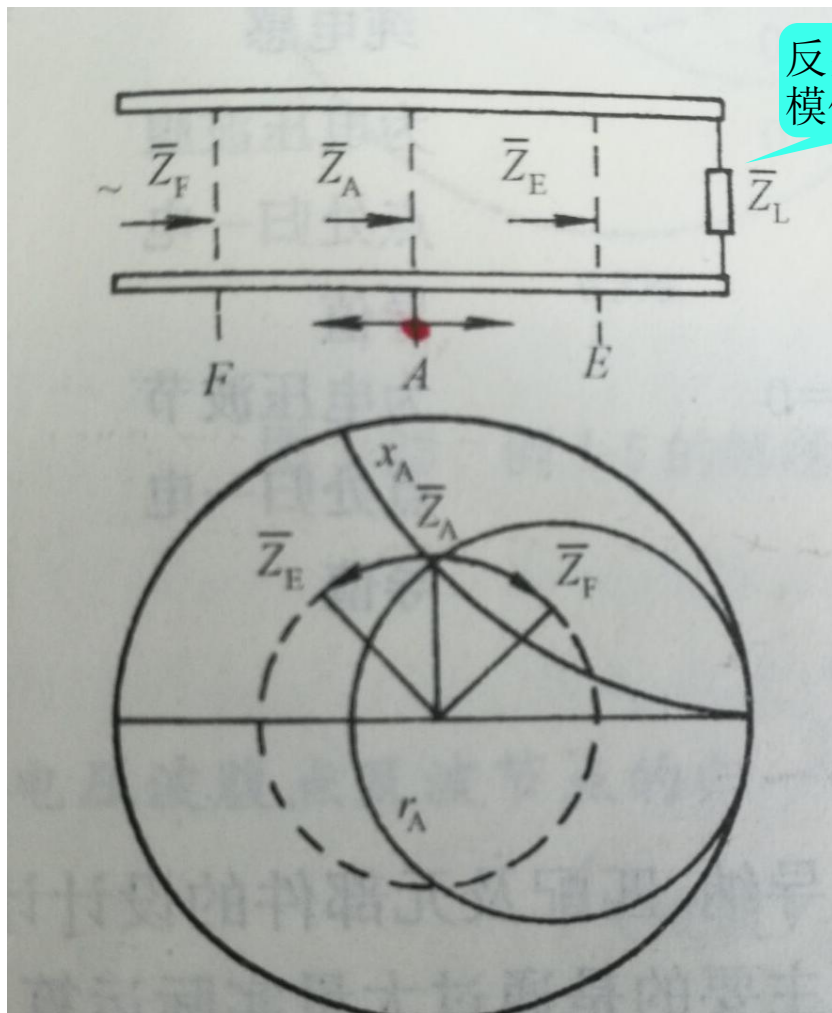
由方程和图形可以看出 r 、 x 都被限制在反射系数模为 1 的单位圆内，这就把一个无限的量用一个有限的图充分表示了出来，这也是它的一个最大优点。将上述两簇曲线与等反射系数圆套印在一起，就得到了阻抗圆图，也就是史密斯圆图，为了保持圆图的清晰，一般不画等反射系数圆。

阻抗圆图的特点：

- 1、上半圆为归一化的感抗，下半圆为归一化容抗；
- 2、行波，驻波，行驻波有对应点；
- 3、实轴左边对应电压波节点的阻抗 $R_{\min} = KZ_0$ 所以 $r = K$ 。
实轴右边对应电压波腹的阻抗 $R_{\min} = \rho Z_0$ 所以 $r = \rho$ 。
- 4、阻抗圆图能提供4个数据，即 $r, x, |\Gamma|$ (或 ρ, K), φ

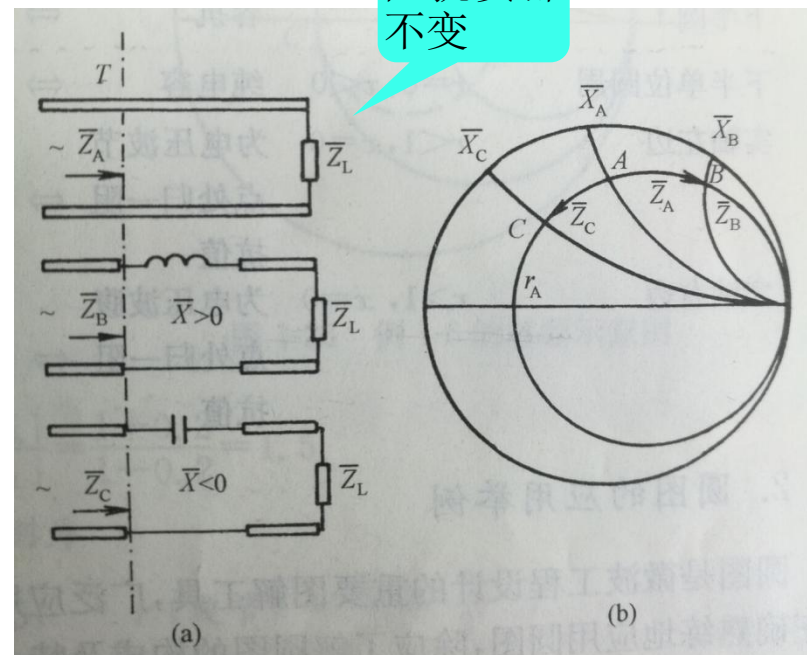
1-20g

§ 1.3 圆图及阻抗匹配



反射系数
模值不变

阻抗实部
不变



串联不同电抗后归一化阻抗的变化规律

观察点在长线上移动对应圆图的转动

§ 1.3 圆图及阻抗匹配

3、导纳圆图

实际微波电路常用并联元件构成，此时用导纳计算比较方便。导纳是阻抗的倒数，故归一化导纳为

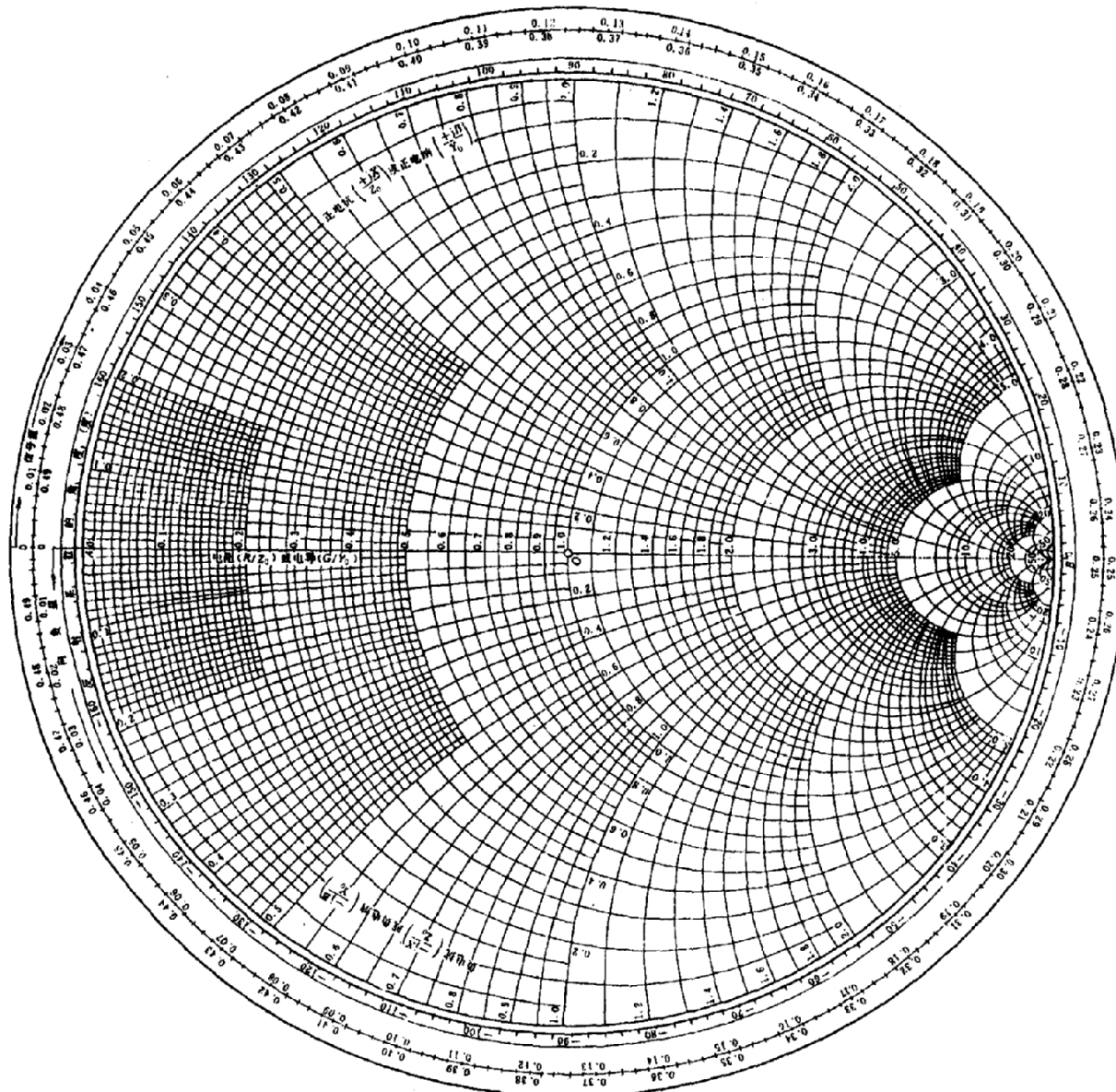
$$\overline{Y_{in}}(z') = \frac{1}{\overline{Z_{in}}(z')} = \frac{1 - \Gamma(z')}{1 + \Gamma(z')} = G + j\overline{B}$$

如果用电流反射系数来表示，因 $\Gamma(z') = -\Gamma_I(z')$ ，故有：

$$\overline{Y_{in}}(z') = \frac{1 + \Gamma_I(z')}{1 - \Gamma_I(z')}$$

这和阻抗与电压反射系数之间的关系完全相同。

§ 1.3 圆图及阻抗匹配



因此在 Γ_1 平面上导纳曲线圆与史密斯圆图完全一样，称其为导纳圆图。显然导纳圆图上任一点对应的是该点的归一导纳和电流反射系数。由于 $\Gamma(z') = -\Gamma_1(z')$ ，因此导纳圆图在 Γ_1 平面上的映像只需将史密斯圆图旋转 180° 即可得到，这样史密斯圆图既是阻抗圆图，也是导纳圆图，但在用史密斯圆图做导纳运算时应注意以下几点：

- ①图中的标称数字全部不变，计算阻抗时，认为是归一阻抗值。计算导纳时，认为是归一导纳值；
- ②在进行阻抗导纳互换运算时，沿等反射系数圆**转180度**即可得到；
- ③由导纳求电压反射系数时，沿等反射系数圆转180度；
- ④特殊点数值不变，但物理含义变化如下：

§ 1.3 圆图及阻抗匹配

(0,0)点	$r=1, x=0$	\Leftrightarrow	$G=1, \bar{B}=0$	匹配点
(1,0)点	$r=x=\infty$ 开路点	\Leftrightarrow	$G=\bar{B}=\infty$	短路点
(-1,0)点	$r=x=0$ 短路点	\Leftrightarrow	$G=\bar{B}=0$	开路点
上半圆	$x>0$ 感抗	\Leftrightarrow	$\bar{B}>0$	容抗
上半单位圆周	$r=0, x>0$ 纯电感	\Leftrightarrow	$G=0, \bar{B}>0$	纯电容
下半圆	$x<0$ 容抗	\Leftrightarrow	$\bar{B}<0$	感抗
下半单位圆周	$r=0, x<0$ 纯电容	\Leftrightarrow	$G=0, \bar{B}<0$	纯电感
实轴左边	$r<1, x=0$ 为电压波节点 处归一阻抗值	\Leftrightarrow	$G<1, \bar{B}=0$ 为电压波腹点处归一电 导值	
实轴右边	$r>1, x=0$ 为电压波腹 点处归一阻抗值	\Leftrightarrow	$G>1, \bar{B}=0$ 为电压波节点处归一电 导值	

§ 1.3 圆图及阻抗匹配

二、圆图的应用举例

例题 已知双线传输线的特性阻抗 $Z_0=300\Omega$ ，终接负载阻抗 $Z_L=180+j240\Omega$ ，求终端反射系数。

解：

(1) 计算归一化负载阻抗：

$$\overline{Z}_L = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{180 + j240}{300} = 0.6 + j0.8$$

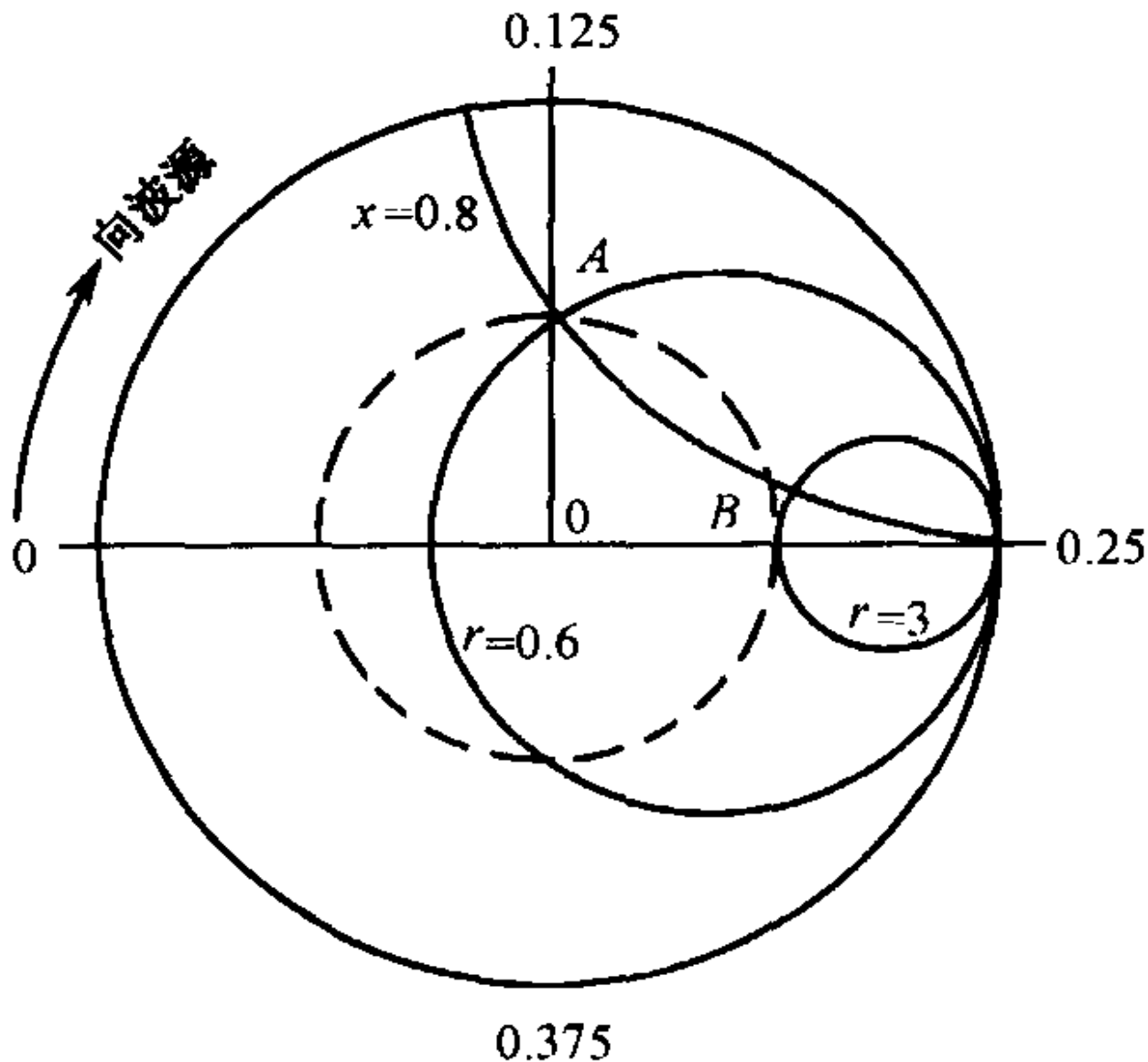
(2) 确定反射系数的模 $|\Gamma_L|$ 。通过 A 点的反射系数圆与右半段纯电阻线交于 B 点。B 点归一化阻抗 $r_B=3$ 即为驻波比值，因此

$$|\Gamma_L| = \frac{\rho - 1}{\rho + 1} = \frac{3 - 1}{3 + 1} = 0.5$$

(3) 计算 Γ_L 的相角 $\Delta\theta = 0.25 - 0.125 = 0.125$

$$\varphi_2 = \Delta\theta \times 4\pi = 90^\circ$$

§ 1.3 圆图及阻抗匹配



§ 1.3 圆图及阻抗匹配

例题 已知同轴线的特性阻抗 $Z_0=50\Omega$ ，信号波长 $\lambda=10\text{cm}$ ，终端反射系数 $\Gamma_L=0.2e^{j50^\circ}$ 。求1、电压波腹点和波节点的阻抗，2、端接负载阻抗 Z_L ，3、靠近终端第一个波腹点和波节点距终端的距离。

解：(1)由反射系数求驻波比：

$$\rho = \frac{1+|\Gamma_L|}{1-|\Gamma_L|} = \frac{1+0.2}{1-0.2} = 1.5$$

电压波腹点和波节点归一化阻抗分别为：

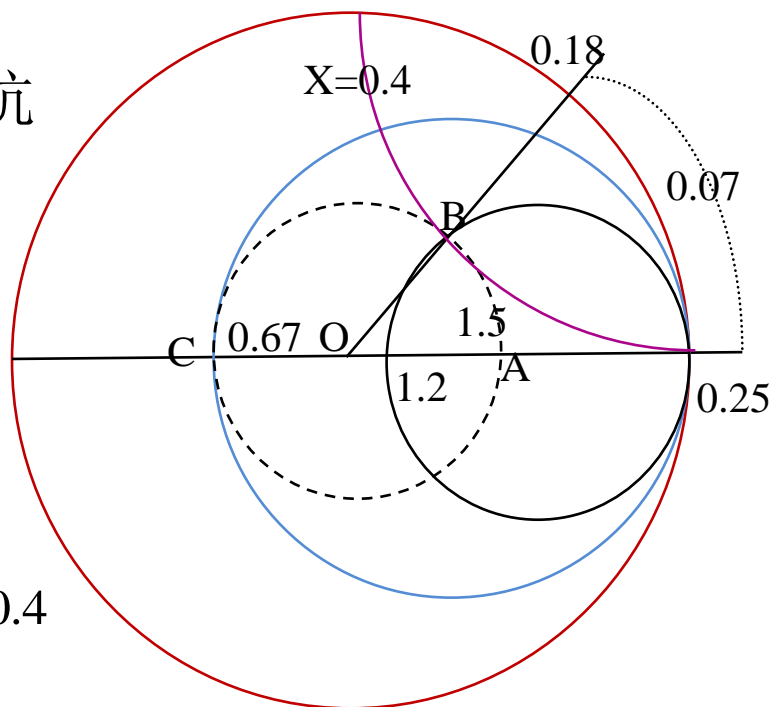
$$r_{\max} = \rho = 1.5 \quad r_{\min} = 1/\rho = 2/3$$

阻抗分别为：

$$Z_{\max} = r_{\max} Z_0 = 75 \quad Z_{\min} = r_{\min} Z_0 = 33.3$$

(2)确定阻抗 Z_L

$$\text{由 } \varphi_L = 50^\circ \text{ 得： } \bar{Z}_L = r + jx = 1.2 + j0.4$$



§ 1.3 圆图及阻抗匹配

$$Z_L = \bar{Z}_L Z_0 = (1.2 + j0.4) \times 50 = 60 + j20$$

(3) 由B点顺时针旋转到A点，对应第一个波腹点距离：

$$z' = \frac{50^\circ}{360^\circ} \lambda = 0.07\lambda = 0.7\text{cm}$$

再由 $\lambda/4$ 变换性，波节点距离为：

$$z'' = 0.07\lambda + 0.25\lambda = 3.2\text{cm}$$

