

第一章 传输线理论

- ◆ § 1.1 传输线方程及其解
- ◆ § 1.2 均匀无耗长线的工作状态
- ◆ § 1.3 圆图及阻抗匹配
- ◆ § 1.4 波导与同轴线
- ◆ § 1.5 平面传输线

§ 1.2 均匀无耗长线的工作状态

3、行驻波工作状态(部分反射情况)

(1) 沿线电压、电流分布

当均匀无耗长线终端接任意负载阻抗 $Z_L=R \pm jX$ 时，终端电压反射系数为：

$$\begin{aligned}\Gamma_L &= \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{R - Z_0 \pm jX}{R + Z_0 \pm jX} \\ &= \frac{R^2 - Z_0^2 + X^2}{(R + Z_0)^2 + X^2} \pm j \frac{2Z_0X}{(R + Z_0)^2 + X^2} \\ &= \Gamma_u + j\Gamma_v = |\Gamma_L| e^{j\varphi_L}\end{aligned}$$

式中反射系数的模与幅角分别为

$$|\Gamma_L| = \sqrt{\frac{(R - Z_0)^2 + X^2}{(R + Z_0)^2 + X^2}}, \quad \varphi_L = \arctan\left(\frac{\pm 2Z_0X}{R^2 - Z_0^2 + X^2}\right)$$

可以看出 $|\Gamma_L| < 1$ ，入射波功率部分被负载吸收，部分被反射

§ 1.2 均匀无耗长线的工作状态

$$U(z') = U_{i2} e^{j\beta z'} (1 + \Gamma_L e^{-j2\beta z'}) = U_{i2} (1 - \Gamma_L) e^{j\beta z'} + 2\Gamma_L U_{i2} \cos \beta z'$$

$$I(z') = I_{i2} e^{j\beta z'} (1 - \Gamma_L e^{-j2\beta z'}) = \frac{U_{i2}}{Z_0} (1 - \Gamma_L) e^{j\beta z'} + j2\Gamma_L \frac{U_{i2}}{Z_0} \sin \beta z'$$

从式中可以看出，此时传输线上的电压、电流波由两部分组成：一部分是行波，另一部分是驻波，各部分的大小取决于 Γ_L 。由于是两部分波的叠加，这样线上的电压与电流波就既有行波的性质，也有驻波的特点，所以称其为**行驻波**。线上电压电流的模值为

$$|U(z')| = |U_{i2}| \cdot |1 + |\Gamma_L| e^{-j(2\beta z' - \phi_L)}|$$

$$|I(z')| = |I_{i2}| \cdot |1 - |\Gamma_L| e^{-j(2\beta z' - \phi_L)}|$$

分析上式可知，沿线电压、电流呈非正弦的周期分布；离开负载端向电源方向出现第一个电压波腹点和波节点位置分别为

$$z'_{\max 1} = \frac{\phi_L}{4\pi} \lambda_p, \quad z'_{\min 1} = z'_{\max 1} \pm \frac{\lambda_p}{4}$$

§ 1.2 均匀无耗长线的工作状态

☆当负载阻抗为大于特性阻抗的纯电阻时，终端为电压波腹点、电流波节点，

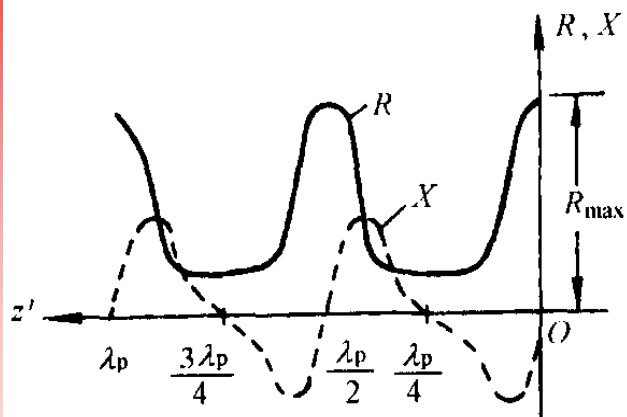
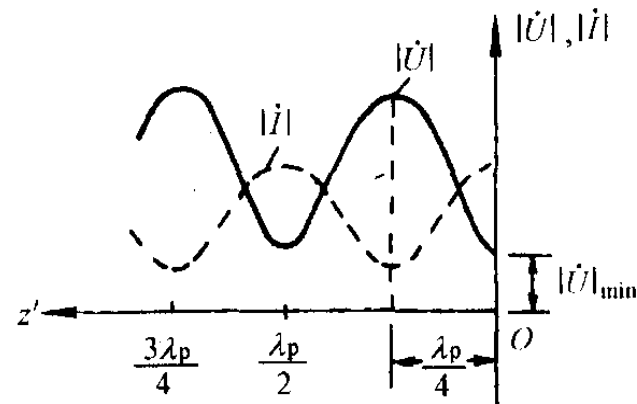
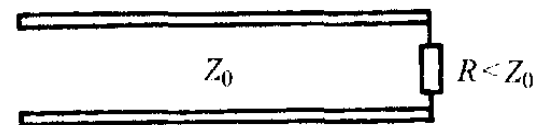
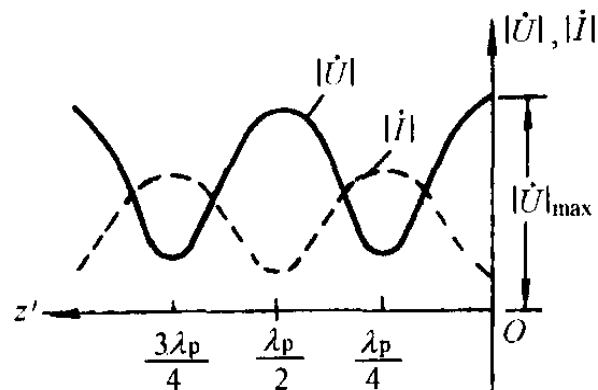
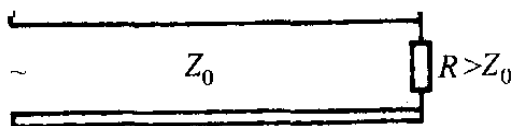
☆当负载阻抗为小于特性阻抗的纯电阻时，终端为电压波节点，电流波腹点。

☆当端接一感性负载时，在终端既不是电压的波腹点，也不是电压的波节点。但离开终端第一个出现的是电压波腹点，电流波节点。

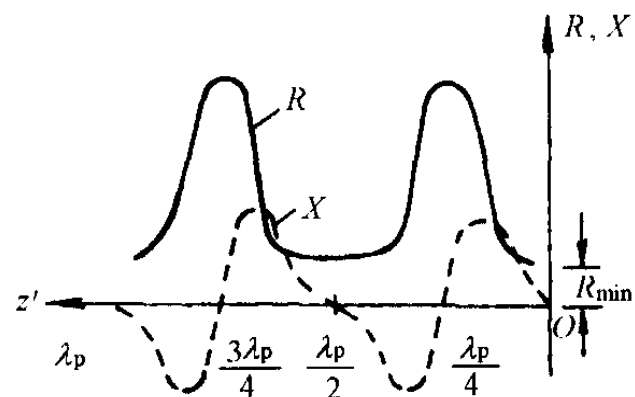
☆当端接一容性负载时，在终端既不是电压的波腹点，也不是电压的波节点。但离开终端第一个出现的是电压波节点、电流波腹点。

其沿线电压电流振幅分布如图所示。

§ 1.2 均匀无耗长线的工作状态

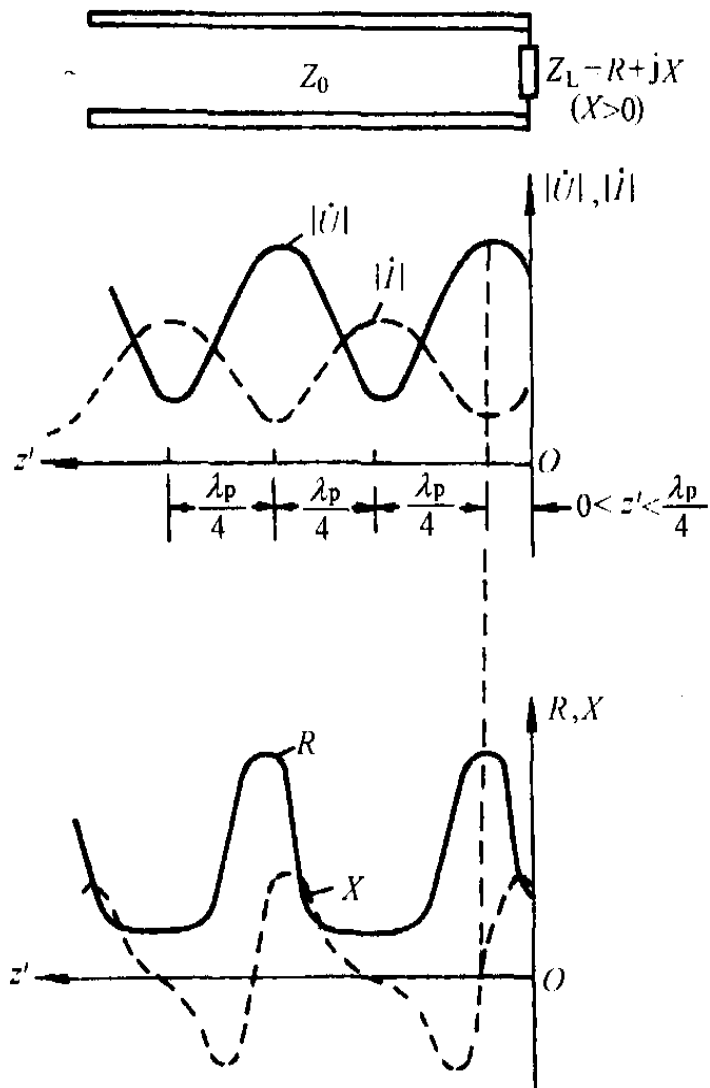


(a) $Z_L = R, R > Z_0$

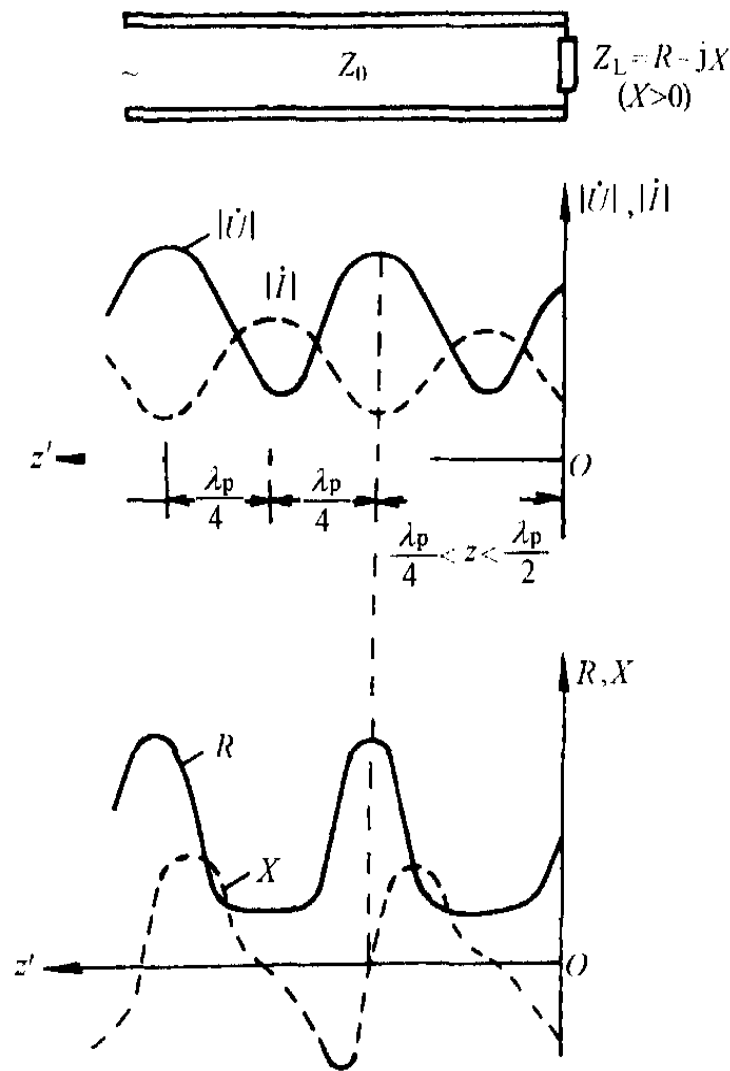


(b) $Z_L = R, R < Z_0$

§ 1.2 均匀无耗长线的工作状态



(c) $Z_L = R + jX, X > 0$



(d) $Z_L = R - jX, X > 0$

§ 1.2 均匀无耗长线的工作状态

(2) 沿线阻抗变化规律

终端接任意负载 $Z_L=R+jX$ 时，其阻抗为：

$$Z_{in}(z') = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta z'}{Z_0 + jZ_L \tan \beta z'} = R_{in} + jX_{in}$$

$$R_{in} = Z_0 \frac{RZ_0 \sec^2 \beta z'}{(Z_0 - X \tan \beta z')^2 + (R \tan \beta z')^2}$$

$$X_{in} = Z_0 \frac{(Z_0 - X \tan \beta z')(X + Z_0 \tan \beta z') - R^2 \tan \beta z'}{(Z_0 - X \tan \beta z')^2 + (R \tan \beta z')^2}$$

端接任意负载阻抗 Z_L 时，沿线阻抗分布有如下特点：

① 沿线阻抗值是非正弦周期函数，在电压波腹点和波节点处的输入阻抗为纯电阻，分别用 Z_{\max} 和 Z_{\min} 表示，可得：

$$Z_{\max} = R_{\max} = \rho Z_0 > Z_0$$

$$Z_{\min} = R_{\min} = KZ_0 < Z_0$$

$$R_{\max} \cdot R_{\min} = Z_0^2$$

§ 1.2 均匀无耗长线的工作状态

阻抗最大值与相邻阻抗最小值之间距离为 $\lambda/4$ ，并且最大电压与最大电流之比等于最小电压和最小电流的比值，都等于无耗传输线的特性阻抗 Z_0 。

②阻抗具有 $\lambda/4$ 的变换性和 $\lambda/2$ 的重复性。

(3) 传输功率与效率

均匀无耗传输线传输的功率沿线处处相等，故可由线上任一点的电压、电流来计算功率，并且该点输入阻抗的实部所吸收的功率就等于负载吸收的功率。传输线上任一点的复功率为：

$$\begin{aligned}\dot{P}(z) &= \frac{1}{2} U(z') I^*(z') \\ &= \frac{|U_{i2}|^2}{2Z_0} (1 - |\Gamma_L|^2) - j \frac{|U_{i2}|^2}{Z_0} |\Gamma_L| \sin(2\beta z' - \varphi_L) \\ &= P_L + j2\omega(W_m - W_e)\end{aligned}$$

§ 1.2 均匀无耗长线的工作状态

负载吸收的功率 P_L 为:

$$P_L = \frac{|U_{i2}|^2}{2Z_0} (1 - |\Gamma_L|^2) = \frac{|U_{i2}|^2}{2Z_0} - |\Gamma_L|^2 \frac{|U_{i2}|^2}{2Z_0} = P_i - P_r$$

传输线的效率定义为负载吸收的功率 P_L 与传输线输入功率 P_{in} 之比, 用 η 表示, 即

$$\eta = P_L / P_{in}$$

对于无耗传输线, $\eta = 1$ 。

对于有耗传输线, 传输功率为

$$P(z') = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} U(z') I(z')^* \right] = \frac{1}{2} \frac{|U_{i2}|^2}{Z_0} (e^{2\alpha z'} - |\Gamma_L|^2 e^{-2\alpha z'})$$

$$P_{in} = \frac{1}{2} \frac{|U_{i2}|^2}{Z_0} (e^{2\alpha l} - |\Gamma_L|^2 e^{-2\alpha l})$$

$$\eta = \frac{1 - |\Gamma_L|^2}{e^{2\alpha l} - |\Gamma_L|^2 e^{-2\alpha l}}$$

§ 1.2 均匀无耗长线的工作状态

[例1] 一根 75Ω 均匀无耗传输线，终端接有负载 $Z_L=R+jX$ ，欲使线上电压驻波比为3，则负载的实部 R 和虚部 X 应满足什么关系？

解：由驻波比 $\rho=3$ ，可得终端反射系数的模值应为

$$|\Gamma_L| = \frac{\rho - 1}{\rho + 1} = 0.5$$

于是可得

$$|\Gamma_L| = \left| \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \right| = 0.5$$

将 $Z_L=R+jX$ ， $Z_0=75$ 代入上式，整理得负载的实部 R 和虚部 X 应满足的关系式为

$$(R-125)^2 + X^2 = 100^2$$

即负载的实部 R 和虚部 X 应在圆心为 $(125, 0)$ 、半径为100的圆上，上半圆对应负载为感抗，而下半圆对应负载为容抗。

§ 1.2 均匀无耗长线的工作状态

[例2] 设有一无耗传输线, 终端接有负载 $Z_L=40-j30(\Omega)$:

- ① 要使传输线上驻波比最小, 则该传输线的特性阻抗应取多少?
- ② 此时最小的反射系数及驻波比各为多少?
- ③ 离终端最近的波节点位置在何处?
- ④ 画出特性阻抗与驻波比的关系曲线。

解: ① 要使线上驻波比最小, 实质上只要使终端反射系数的模值最小, 即

$$\frac{\partial |\Gamma_L|}{\partial Z_0} = 0$$

$$\text{而 } |\Gamma_L| = \left| \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \right| = \left(\frac{(40 - Z_0)^2 + 30^2}{(40 + Z_0)^2 + 30^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

将上式对 Z_0 求导, 并令其为零, 经整理可得: $40^2 + 30^2 - Z_0^2 = 0$

即当特性阻抗 $Z_0=50\Omega$ 时终端反射系数最小, 从而驻波比也为最小。

§ 1.2 均匀无耗长线的工作状态

② 此时终端反射系数及驻波比分别为

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{40 - j30 - 50}{40 + j30 + 50} = \frac{1}{3} e^{j\frac{3\pi}{2}}$$

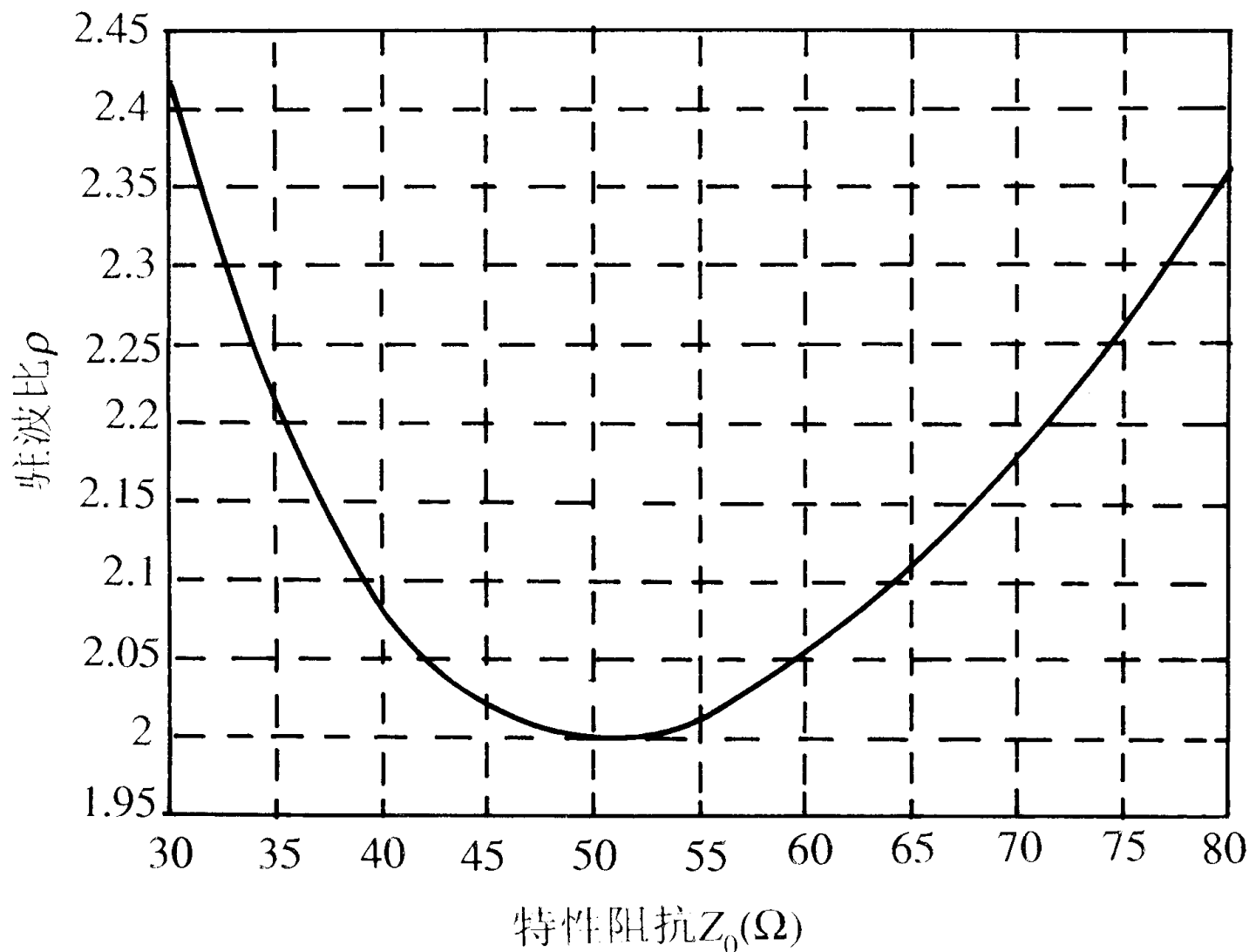
$$\rho = \frac{1 + |\Gamma_1|}{1 - |\Gamma_1|} = 2$$

③ 由于终端为容性负载，故离终端的第一个电压波节点位置为

$$z_{\min 1} = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi_L - \frac{\lambda}{4} = \frac{1}{8} \lambda$$

④ 终端负载一定时，传输线特性阻抗与驻波系数的关系曲线如图 所示。其中负载阻抗 $Z_L=40-j30 (\Omega)$ 。由图可见， 当 $Z_0=50\Omega$ 时驻波比最小，与前面的计算相吻合。

§ 1.2 均匀无耗长线的工作状态

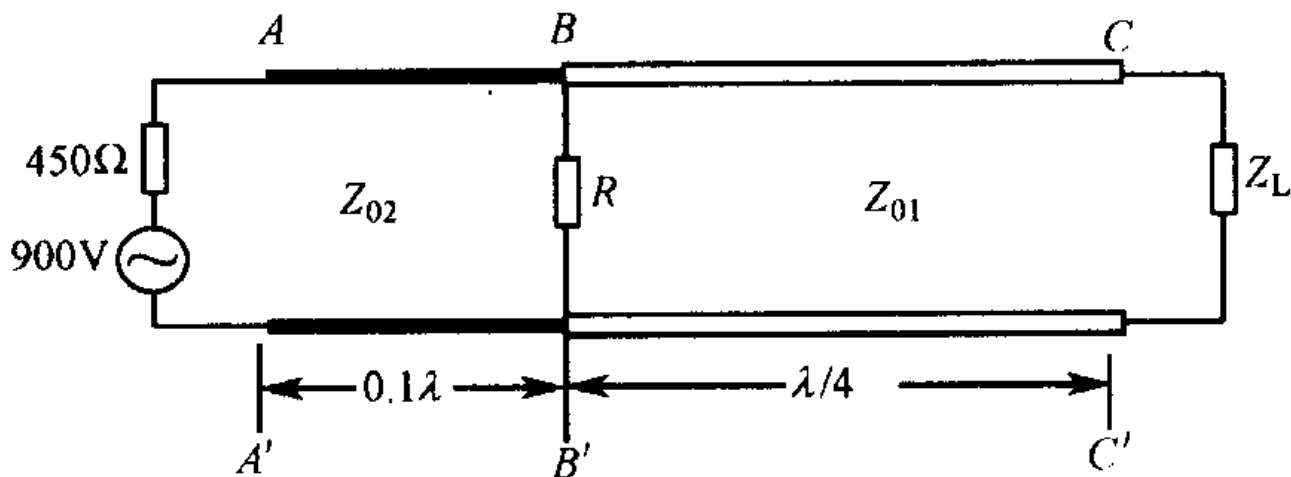


§ 1.2 均匀无耗长线的工作状态

[例3]如图所示,已知 $Z_{01}=600\Omega$, $Z_{02}=450\Omega$, $R=900\Omega$, $Z_L=400\Omega$ 。

(1) 画出沿线电压、电流和阻抗的振幅分布, 并求其最大值和最小值;

(2) 求负载吸收的总功率和 Z_L 吸收的功率。



解: (1) 由 $\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_{01}}{Z_L + Z_{01}} = -0.2$ 得

$$\rho = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|} = 1.5$$

§ 1.2 均匀无耗长线的工作状态

所以B-C 段传输行驻波， C 为电压波节， B 为电压波腹。

$$Z_{\text{LinB}} = \frac{Z_{01}^2}{Z_L} = \rho Z_{01} = 900 \Omega$$

$$Z_{\text{inB}} = Z_{\text{LinB}} // R = 450 \Omega = Z_{02}$$

即 A- B 段传输行波。

所以 $Z_{\text{inA}} = Z_{\text{inB}}$, $|U_A| = 450 \text{V}$, $|I_A| = 1 \text{A}$

A- B 段:

$$|U_B| = |U_A| = 450 \text{V}$$

$$|I_B| = |I_A| = 1 \text{A}$$

$$Z_{\text{inA}} = Z_{\text{inB}} = 450 \Omega$$

B-C 段: $|U_B| = |U_{\text{max}}| = 450 \text{V}$

$$|U_C| = |U_{\text{min}}| = \frac{|U_{\text{max}}|}{\rho} = 300 \text{V}$$

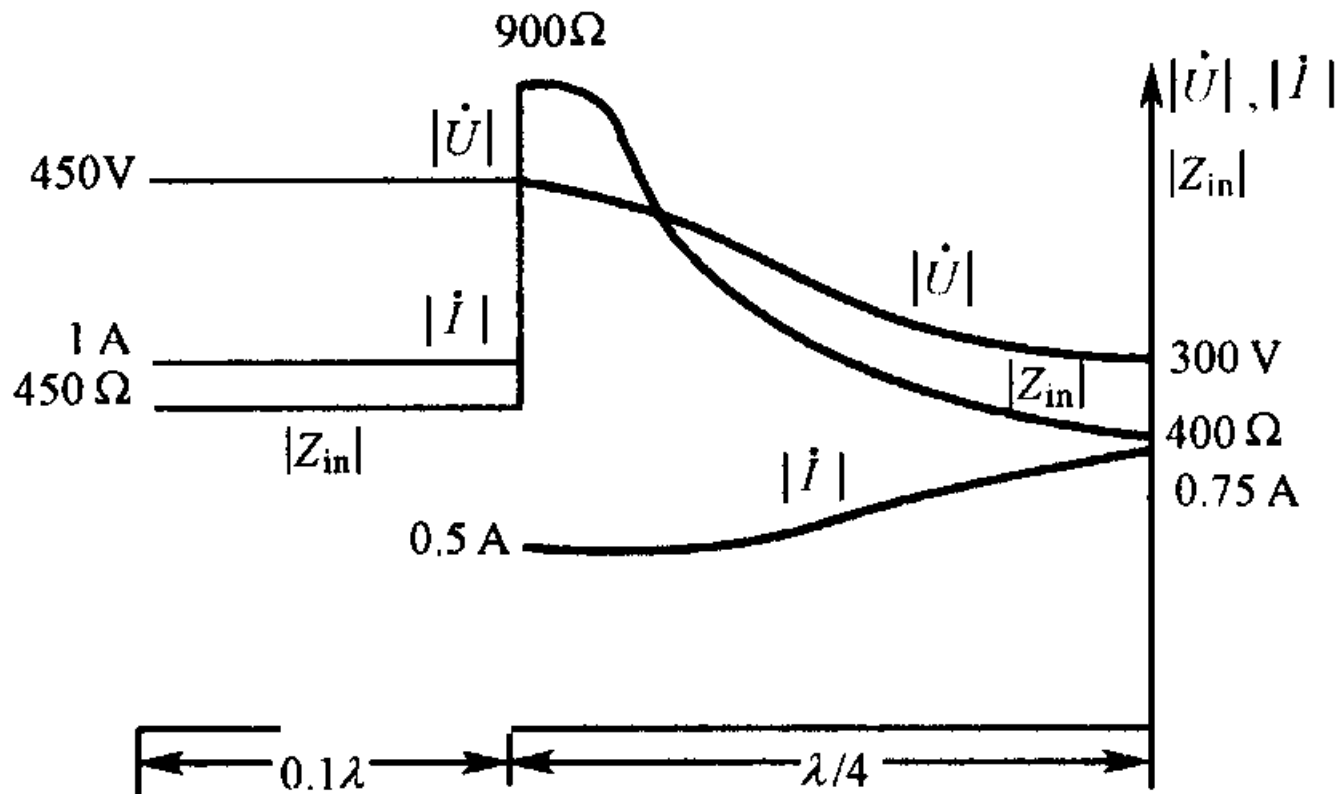
$$|I_{\text{min}}| = \frac{|I_B|}{2} = 0.5 \text{ A}$$

$$|I_C| = |I_{\text{max}}| = \rho |I_{\text{min}}| = 0.75 \text{ A}$$

$$R_{\text{max}} = Z_{\text{LinB}} = 900 \Omega$$

$$R_{\text{min}} = Z_L = 400 \Omega$$

§ 1.2 均匀无耗长线的工作状态



沿线电压、电流和阻抗的振幅分布图

§ 1.2 均匀无耗长线的工作状态

(2) 负载吸收的总功率为

$$P = \frac{1}{2} |U_A| |I_A| = 225 \text{ W}$$

Z_L 吸收的功率为

$$P_L = \frac{1}{2} |U_{\min}| |I_{\max}| = \frac{1}{2} Z_L |I_{\max}|^2 = 112.5 \text{ W}$$

§ 1.2 均匀无耗长线的工作状态

◆作业

习题一：6，7，8