场论与复变函数


通信工程学院

场论与复变函数教学团队

5.1 孤立奇点

- 1. 定义
- 2. 分类
- 3. 性质
- 4. 零点与极点的关系

1. 定义

定义 若$f(z)$在z_0处不解析，但在z_0的某个去心邻域$0<|z-z_0|<\delta$内解析，则称z_0为$f(z)$的孤立奇点。

例如 $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ ----z=0为孤立奇点

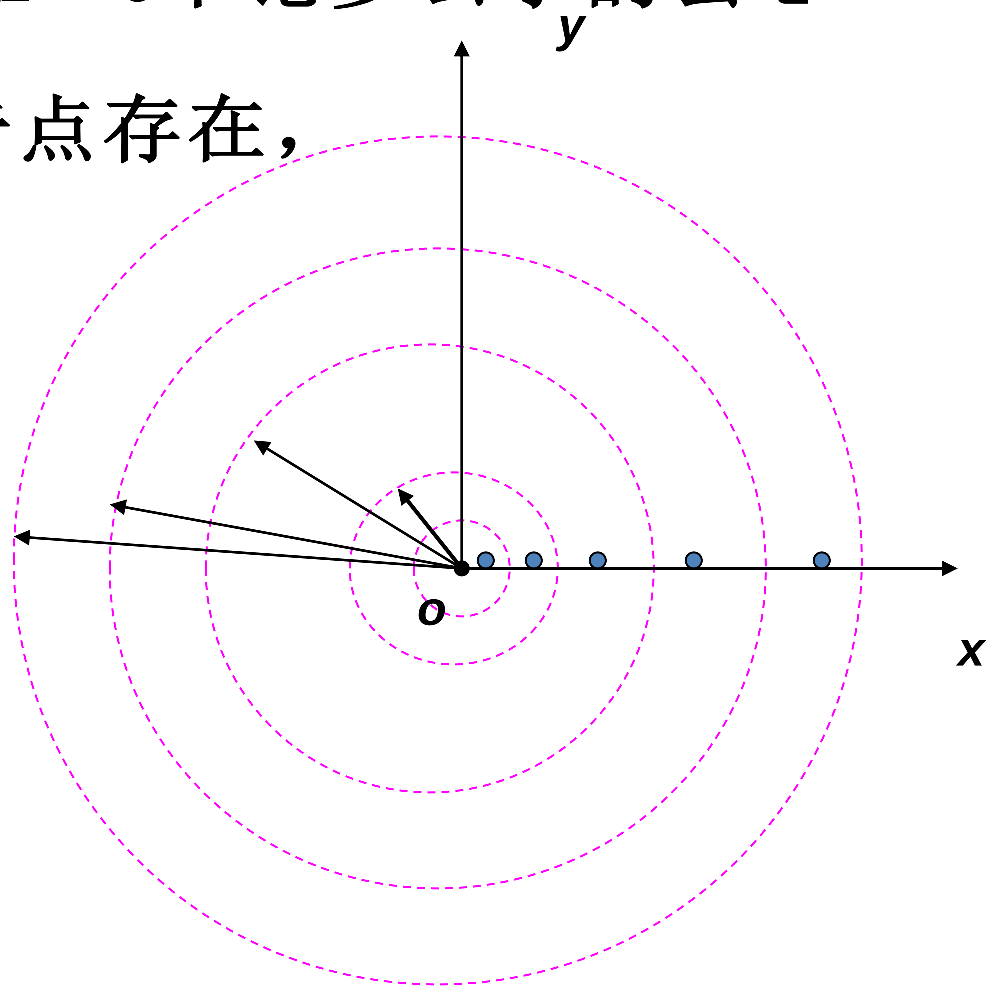
$$f(z)=\frac{1}{z-1}$$ ----z=1为孤立奇点

$$f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$$

----z=0及$z=1/n\pi\ (n=\pm1,\pm2,\cdots)$都是它的奇点

但$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\pi}=0$, $\therefore$ 在$z=0$不论多么小的去心邻域内,总有$f(z)$的奇点存在,

故$z=0$不是$\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}$的孤立奇点。



这说明奇点未必是孤立的。

2. 分类

以下将*f* (*z*)在孤立奇点的邻域内展成洛朗级数，根据展开式的不同情况，将孤立点进行分类。考察：

$$(1)\ \frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$$

特点：没有负幂次项

$$(2)\ \frac{e^z}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}=\frac{1}{z}+1+\frac{z}{2!}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{n!}+\cdots$$

特点：只有有限多个负幂次项

$$(3)\ e^{\frac{1}{z}}=1+z^{-1}+\frac{1}{2!}z^{-2}+\cdots+\frac{1}{n!}z^{-n}+\cdots$$

特点：有无穷多个负幂次项

定义 设z_0是$f(z)$的一个孤立奇点，在z_0的去心邻域内，若$f(z)$的洛朗级数

$$(i)\ f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

没有负幂次项，称$z=z_0$为可去奇点;

$$(ii)\ f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty}c_n(z-z_0)^n(c_{-m}\neq 0,\ m\geq 1)$$

只有有限多个负幂次项，称$z=z_0$为m级极点;

$$(iii)\ f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

有无穷多个负幂次项，称$z=z_0$为本性奇点。

3. 性质

- 若z_0为$f(z)$的可去奇点

$$\Leftrightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)=c_0$$

补充定义：$f(z_0)=c_0$ $\quad f(z)$在z_0解析.

- 若z_0为$f(z)$的m $(m\geq 1)$ 级极点

$$\Leftrightarrow f(z)=\sum_{n=-m}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n(\,c_{-m}\neq 0, m\geq 1\,)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}|f(z)|=\infty \Leftrightarrow f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z)$$

其中: $g(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+c_{-m+2}(z-z_0)^2+\cdots$,

$g(z)$在$|z-z_0|<\delta$内是解析函数且$g(z_0)\neq 0$.

例如: $f(z)=\dfrac{z^2-3z+2}{(z^2+1)(z-1)^4}$

$z=1$为$f(z)$的一个三级极点， $z=\pm i$为$f(z)$的一级极点。

- 若z_0为$f(z)$的本性奇点

$\Leftrightarrow f(z)$的洛朗级数有无穷多项负幂次项

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(z)$不存在，也不为$\infty$。

4. 零点与极点的关系

定义 不恒等于0的解析函数$f(z)$如果能表示成

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$$

其中：$\varphi(z_0)\neq 0,\varphi(z)$在$z_0$点解析,$m\in N$

则称$z=z_0$为$f(z)$的m级零点。

例如： $z=0$与$z=1$分别是$f(z)=z(z-1)^3$的一级与三级零点。

定理 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$

$$(\varphi(z_0)\neq 0,\varphi(z)\text{在}z_0\text{点解析},m\in N)$$

$$\Leftrightarrow\ f^{(n)}(z_0)=0(n=0,1,2,\cdots,m-1)\quad f^{(m)}(z_0)\neq 0.$$

事实上， $\because \varphi(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n \quad c_0=\varphi(z_0)\neq 0$

$$\therefore f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^{n+m}$$

由$Taylor$级数的系数公式有：

$$f^{(n)}(z_0)=0\ \ (n=0,1,2,\cdots,m-1),$$

而 $\dfrac{f^{(m)}(z_0)}{m!}=c_0\neq 0$　　必要性得证！　充分性略！

例如 $z=0$与$z=1$均为$f(z)=z(z-1)^3$的零点。

又$f'(z)=(z-1)^3+3z(z-1)^2$

$$f''(z)=6(z-1)^2+6z(z-1)$$

$$f'''(z)=12(z-1)+6(z-1)+6z$$

$\because\ f'(0)=(-1)^3\neq 0$

$\therefore z=0$为一级零点

$\because\ f'(1)=0\quad f''(1)=0\quad f'''(1)=6\neq 0$

$\therefore z=1$为三级零点

定理：若z_0是$f(z)$的m级极点$\Leftrightarrow$ z_0是$\dfrac{1}{f(z)}$的m级零点.

证明 “$\Rightarrow$” 若z_0为$f(z)$的m级极点

$$\Leftrightarrow f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z)\ \left(g(z)\text{在}z_0\text{解析,且}g(z_0)\neq 0\right)$$

$$\therefore \frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\frac{1}{g(z)}=(z-z_0)^m h(z)\quad (z\neq z_0)$$

$$\left(h(z)\text{在}z_0\text{解析,且}h(z_0)\neq 0\right).$$

$\because \lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{1}{f(z)}=0$, $\therefore$ 令$\dfrac{1}{f(z_0)}=0$, 则z_0是$\dfrac{1}{f(z)}$的m级零点.

"$\Leftarrow$" 若z_0是$\dfrac{1}{f(z)}$的m级零点,则

$$\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\varphi(z)\ \left(\varphi(z)\text{在}z_0\text{解析,且}\varphi(z_0)\neq 0\right).$$

当$z\neq z_0$时，
$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\boxed{\frac{1}{\varphi(z)}}=\frac{1}{(z-z_0)^m}\boxed{\psi(z)}$$

$$\left(\psi(z)\text{在}z_0\text{解析,且}\psi(z_0)\neq 0\right).$$

$\therefore\ z_0$是$f(z)$的m级极点.

例 求$f(z)=\dfrac{z}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})}$的奇点，

如果是极点指出它的级

解 显然，$z=\pm i$ 是$(1+z^2)$的一级零点

$\because e^{\pi z}+1=0,$ 即$e^{\pi z}=-1$

$\therefore \pi z=Ln(-1)=i(\pi+2k\pi)=(2k+1)\pi i$

故奇点为：$z_k=(2k+1)i \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$\because (1+e^{\pi z})'\Big|_{z=i(2k+1)}=\pi e^{\pi z}\Big|_{z=i(2k+1)}$

$=\pi[\cos\pi(2k+1)+i\sin\pi(2k+1)]=-\pi\neq 0$

$\therefore z_k=i(2k+1) \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$是$1+e^{\pi z}$的一级零点

综合 $z=\pm i$为$f(z)$的二级极点;

$z_k=i(2k+1)\quad(k=1,\pm 2,\cdots)$为$f(z)$的一级极点

练习：考察下列函数的孤立奇点，孤立奇点类型，如果是极点，指出它的级数

$$(1)\ f(z)=\frac{1}{z^2(e^z-1)}\qquad (2)\ f(z)=\frac{\ln(1+z)}{z}$$

$$(3)\ f(z)=\frac{1}{z\left(z^2+1\right)^2}\qquad (4)\ f(z)=\frac{\sin z}{z^3}$$

5.2 留数(Residue)

- 1. 留数的定义
- 2. 留数定理
- 3. 留数的计算规则

1. 留数的定义

$$\oint_c f(z)dz=\begin{cases}0 & f(z)\text{在}c\text{所围成的区域内解析}\\ \text{未必为}0 & c\text{所围成的区域内含有}f(z)\text{的奇点}\end{cases}$$

设$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n, 0<|z-z_0|<r$

(z_0是$f(z)$的孤立奇点，c包含z_0在其内部)

对上式两边沿简单闭曲线c逐项积分得：

$$\oint_c f(z)dz=c_{-1}\oint_c\frac{dz}{z-z_0}=2\pi i c_{-1}$$

定义 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点， $f(z)$ 在 z_0 邻域内的洛朗级数中负幂次项 $(z-z_0)^{-1}$ 的系数 c_{-1} 称为 $f(z)$ 在 z_0 的**留数**，记作 $\mathrm{Res}\,[f(z), z_0]$ 或 $\mathrm{Res}\, f(z_0)$。

由留数定义， $\mathrm{Res}\,[f(z), z_0] = c_{-1}$ **(1)**

故 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = c_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)dz$ (2)

2. 留数定理

定理 设c是一条简单闭曲线函数$f(z)$在c内有有限个孤立奇点$z_1, z_2, \cdots, z_n$, 除此以外, $f(z)$在c内及c上解析, 则

$$\oint_c f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k] \qquad (3)$$

证明 用互不包含互不相交的正向简单闭曲线c_k $(k = 1,2,\cdots n)$将c内孤立奇点z_k围绕,

由复合闭路定理得：

$$\oint_{c} f(z)dz = \oint_{c_1} f(z)dz + \oint_{c_2} f(z)dz + \cdots + \oint_{c_n} f(z)dz$$

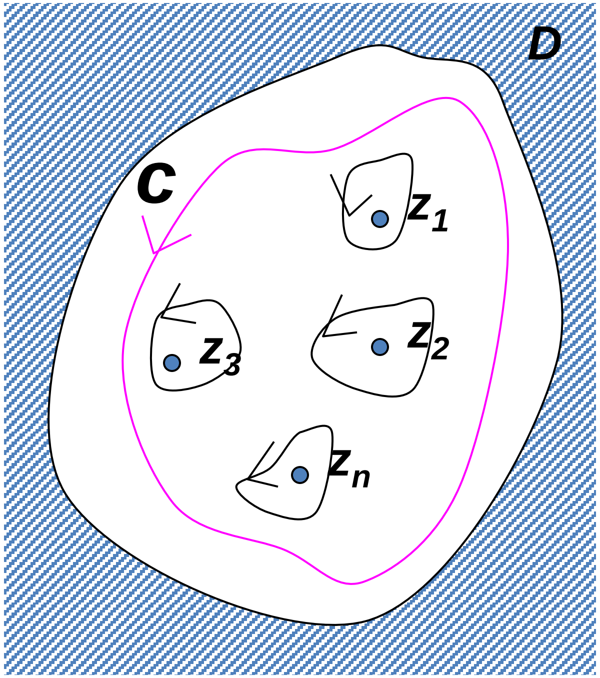
用$2\pi i$ 除上式两边得:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_k} f(z)dz$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k]$$

故$\oint_{c} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k]$

得证！



✌ 求沿闭曲线c的积分，归之为求在c中各孤立奇点的留数。

3. 留数的计算规则

一般求 Res $[f(z), z_0]$ 是采用将 $f(z)$ 在 z_0 邻域内展开成洛朗级数求系数 c_{-1} 的方法，但如果能先知道奇点的类型，对求留数更为有利。

以下就三类孤立奇点进行讨论：

(i)若$z = z_0$为可去奇点$\Rightarrow c_{-1} = 0 \Rightarrow \mathrm{Res}[f(z), z_0] = 0$

(ii)若$z=z_0$为本性奇点$\Rightarrow f(z)\overset{\text{展开}}{=}\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$

$\Rightarrow \text{Re}\, s[f(z),z_0]=c_{-1}$

(iii)若$z=z_0$为极点时，求$\text{Re}\, s[f(z),z_0]$有以下几条规则

规则I 若z_0是$f(z)$的一级极点$\Rightarrow$

$$\text{Re}\, s[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) \qquad (4)$$

规则II 若z_0是$f(z)$的m级极点$\Rightarrow$

$$\text{Re}\, s[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right] \qquad (5)$$

事实上，由条件

$$f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+c_{-1}(z-z_0)^{-1}$$

$$+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots,\quad (c_{-m}\neq 0)$$

以$(z-z_0)^m$乘上式两边得

$$(z-z_0)^m f(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}$$

$$+c_0(z-z_0)^m+\cdots$$

两边求$m-1$阶导数得

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\}=(m-1)!c_{-1}+m!(z-z_0)+\cdots$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]=(m-1)!c_{-1}$$，移项得(5)式.

当$m=1$时，式(5)即为式(4).

规则III 设$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ $P(z),Q(z)$在z_0处解析,

$$P(z_0)\neq 0, Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0 \Rightarrow$$

z_0是$f(z)$的一级极点,且 $\text{Res}[f(z),z_0]=\dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$ (6)

事实上, $\because Q(z_0)=0$及$Q'(z_0)\neq 0$

$\therefore z_0$为$Q(z)$的一级零点从而z_0为$\dfrac{1}{Q(z)}$的一级极点.

因此, $\dfrac{1}{Q(z)}=\dfrac{1}{z-z_0}\varphi(z)$ $\big(\varphi(z)$在z_0处解析且$\varphi(z_0)\neq 0\big)$

故$f(z)=\dfrac{1}{z-z_0}g(z)\quad (g(z)=\varphi(z)P(z)$在$z_0$解析,

且$g(z_0)\neq 0)$, 则z_0为$f(z)$的一级极点,由规则I

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{\dfrac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}\quad (Q'(z_0)\neq 0)\quad 得证!$$

例1 计算：$\oint_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)^2}dz$

解 $f(z)=\frac{5z-2}{z(z-1)^2}$ 在 $|z|=2$ 的内部有一个一级极点 $z=0$ 和一个二级极点 $z=1$

由规则I

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{5z-2}{(z-1)^2}=-2$$

由规则II

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\{(z-1)^2\frac{5z-2}{z(z-1)^2}\}$$

$$=\lim_{z\to 1}(\frac{5z-2}{z})'=\lim_{z\to 1}\frac{2}{z^2}=2$$

$$\therefore \oint_{|z|=2} f(z)dz=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),0]+2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),1]=0$$

例2 计算 $\oint_c \frac{z}{z^4-1}dz \quad c:$ 正向 $|z|=2$

解 $\because f(z)$有4个一级极点：$\pm1,\pm i$都在圆周c内，

由规则III $\quad \frac{P(z)}{Q'(z)}=\frac{z}{4z^3}=\frac{1}{4z^2}$

故 $\oint_c \frac{z}{z^4-1}dz$

$$=2\pi i\{\mathrm{Re}\,s[f(z),-1]+\mathrm{Re}\,s[f(z),1]+\mathrm{Re}\,s[f(z),i]+\mathrm{Re}\,s[f(z),-i]\}$$

$$=2\pi i\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right]=0$$

例3 计算$\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}dz$

解 $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3}$有一个$z=0$的三级极点

由规则I

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{1}{(3-1)!}\frac{d^2}{dz^2}[z^3 f(z)]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}(\cos z)''=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\int_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}dz=2\pi i\operatorname{Res}[f(z),0]=2\pi i(-\frac{1}{2})=-\pi i$$

例4 计算 $\oint_{|z|=n} \tan \pi z dz \quad (n \in N)$

解 $\tan \pi z = \dfrac{\sin \pi z}{\cos \pi z}$ 令 $\cos \pi z = 0$

解得 $\pi z = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ 即, $z = k + \dfrac{1}{2}(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

$$\because (\cot \pi z)'\Big|_{z=k+\frac{1}{2}} = -\pi \csc^2 \pi z\Big|_{z=k+\frac{1}{2}} \neq 0$$

$\therefore z = k + \dfrac{1}{2}$ 为一级极点由规则III得

$$\operatorname{Re}s\left[\tan \pi z, k + \frac{1}{2}\right] = \frac{\sin \pi z}{(\cos \pi z)'}\Bigg|_{z=k+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi} \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$$

故 由留数定理得：

$$\oint_{|z|=n} \tan \pi z dz = 2\pi i \sum_{\left|k+\frac{1}{2}\right|<n} \operatorname{Res}\left[\tan \pi z, k+\tfrac{1}{2}\right] = 2\pi i\left(-\frac{2n}{\pi}\right) = -4ni$$

✌ **(1)要灵活运用规则及洛朗级数展开来求留数，不要死套规则。**

如 $$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{z-\sin z}{z^6}$$

由于$p(0)=0 \quad p'(0) = (1-\cos z)\big|_{z=0} = 0$

$$p''(0) = \sin z\big|_{z=0} = 0 \quad p'''(0) = \cos z\big|_{z=0} = 1 \neq 0$$

$\therefore z=0$是$p(z)$的三级零点，是$f(z)$的三级极点。

由规则II $\mathrm{Re}\,s\left[\dfrac{z-\sin z}{z^6},0\right]=\dfrac{1}{(3-1)!}\lim\limits_{z\to 0}\left[\dfrac{z-\sin z}{z^3}\right]''$

若将$f(z)$作*Laurent*级数展开:

$$\frac{z-\sin z}{z^6}=\frac{1}{z^6}\left[z-\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}-\frac{1}{5!}\frac{1}{z}+\cdots$$

$$\therefore\ \mathrm{Re}\,s\left[\frac{z-\sin z}{z^6},0\right]=-\frac{1}{5!}$$

---该方法较规则II更简单！

✌ **(2) 由规则II 的推导过程知，在使用规则II 时，可将 *m* 取得比实际级数高，这可使计算更简单。**

如

$$\operatorname{Re}s\left[\frac{z-\sin z}{z^6},0\right]=\frac{1}{(6-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^5}{dz^5}\left[z^6\left(\frac{z-\sin z}{z^6}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}\frac{d^5}{dz^5}(z-\sin z)=\frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}(-\cos z)=-\frac{1}{5!}$$

函数在无穷远点的性态

- 如果函数$f(z)$在无穷远点$z=\infty$的去心领域$R<|z|<+\infty$内解析，那么称点∞为$f(z)$的孤立奇点。

- 作变换$t=\dfrac{1}{z}$,并规定这个变换把扩充z平面上的无穷远点$z=\infty$映射成扩充t平面上的点$t=0$,扩充z平面上向$z=\infty$收敛的序列和扩充t平面上向零收敛的序列相对应，则：

$$f(z)=f\left(\frac{1}{t}\right)=\varphi(t)$$

规定：如果$t=0$是$\varphi(t)$的可去奇点，m级极点或本性奇点，那么称点$z=\infty$是$f(z)$的可去奇点，m级极点或本性奇点。

由于$f(z)$在$R<|Z|<+\infty$内解析，可展开成罗朗级数：

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$$

$t=\dfrac{1}{z}$变换得：

$$\varphi(t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}t^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n t^{-n}$$

$i)$不含t负幂项，$ii)$有限t负幂项，$iii)$无穷t负幂项，则$t=0$为$i)$可去奇点，$ii)$极点，$iii)$本性奇点。

由于$f(z)$在$R<|Z|<+\infty$内解析，可展开成罗朗级数：

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$$

$i)$不含z正幂项，

$ii)$有限z正幂项，

$iii)$无穷z正幂项，则

$z=\infty$为$f(z)$的

$i)$可去奇点，

$ii)$极点，

$iii)$本性奇点。

$t=0$是否为$\varphi(t)$的可去奇点，极点和本性奇点可以通过求极限$\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t)$是否存在，是否为无穷和不存在也不为无穷大来判断。

例：判断$z=\infty$为$f(z)=\dfrac{z}{z^4-1}$的奇点类型。

解：$f(z)=f(\dfrac{1}{t})=\dfrac{t^3}{1-t^4}=\varphi(t)$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^3}{1-t^4}=0$$

因此，$t=0$为可去奇点，$z=\infty$为可去奇点。

无穷远点的留数

函数$f(z)$在$R<|z|<+\infty$内解析，C为这圆环域内围绕原点的任意一条正向简单闭曲线，积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c^-} f(z)dz$$

的值与C无关，则称此值为$f(z)$在∞的留数，记做：

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c^-} f(z)dz=-c_{-1}$$

注意：这里的积分路径是负方向，即顺时针方向

留数定理

定理：如果函数$f(z)$在扩充复平面内只有有限个孤立奇点，那么$f(z)$在所有奇点(包括∞点)的留数的总和必等于零。

证明：除∞点外，设$f(z)$的有限个奇点为$z_k\ (k=1,2,\cdots,n)$，C为一条绕原点的并将$z_k\ (k=1,2,\cdots,n)$包含在内的正向简单闭曲线，由无穷远点留数的定义，有：

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]+\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f(z),z_k)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)dz+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}f(z)dz=0$$

留数计算规则IV

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty] = -\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\bullet\frac{1}{z^2},0\right]$$

例：计算积分$\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz$，$C$为正向圆周$|z|=2$.

解：函数$\frac{z}{z^4-1}$在$|z|=2$的外部，除∞外没有其他奇点，因此

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz = -2\pi i \operatorname{Res}[f(z),\infty]$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{z}{1-z^4},0\right] = 0$$

5.3 留数定理在计算实积分中的应用

- 1. 形如I式的定积分
- 2. 形如II式的定积分
- 3. 形如III式的定积分

1.如$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$的积分，

令$z=e^{i\theta}$，那么$dz=ie^{i\theta}d\theta$，

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)=\frac{z^2-1}{2iz},$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=\frac{z^2+1}{2z}$$

从而，所设积分化为沿正向单位圆周的积分

$$\oint_{|z|=1} R\left[\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right]\frac{dz}{iz}=\oint_{|z|=1} f(z)dz$$

其中$f(z)$为z的有理函数，且在单位圆周$|z|=1$上分母不为零，所以满足留数定理的条件。

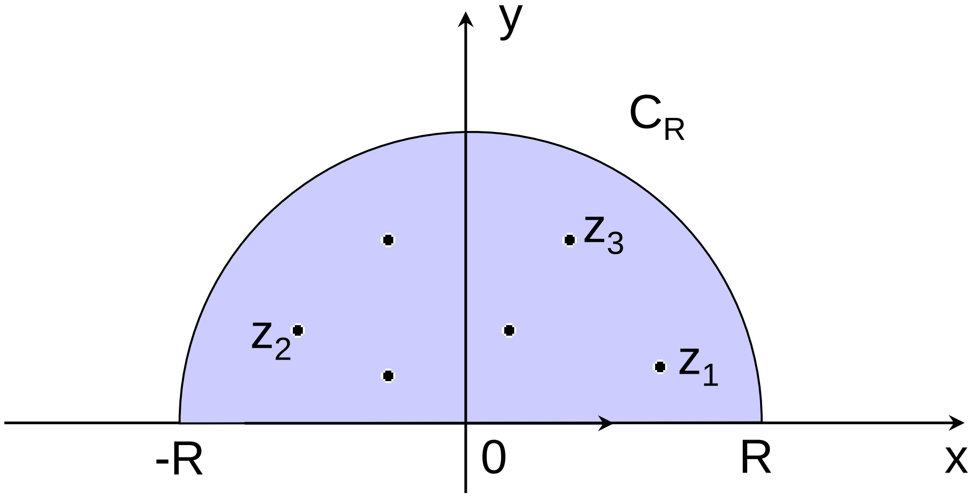
根据留数定理，得所求的积分值：

$$2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[f(z),z_k\right],$$

其中$z_k\ (k=1,2,\cdots,n)$为包含在单位圆周$|z|=1$内的$f(z)$的孤立奇点。

2.如$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$的积分

设$R(z)=\dfrac{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots a_n}{z^m+b_1z^{m-1}+\cdots b_m}, m-n\geq 2$



根据留数定理得:

$$\int_{-R}^{R} R(x)dx+\int_{C_R} R(z)dz = 2\pi i\sum \mathrm{Res}[R(z),z_k]$$

这个等式，不因C_R的半径R不断增大而有所改变，

因为：$|R(z)| = \dfrac{1}{|z|^{m-n}} \cdot \dfrac{|1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}|}{|1 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}|}$

$$\le \frac{1}{|z|^{m-n}} \cdot \frac{1 + |a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}|}{1 - |b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}|}$$

而当$|z|$充分大时，总可使

$$|a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}| < \frac{1}{10}, |b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}| < \frac{1}{10}$$

由于$m - n \ge 2$，故有：

$$|R(z)| < \frac{1}{|z|^{m-n}} \cdot \frac{1 + \frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} < \frac{2}{|z|^2}$$

因此，在半径R充分大的C_R上，有：

$$\left|\int_{C_R} R(z)dz\right| \le \int_{C_R} |R(z)|\,ds \le \frac{2}{R^2}\cdot \pi R = \frac{2\pi}{R}$$

所以，当$R\to+\infty$时，$\int_{C_R} R(z)dz \to 0$，从而由

$$\int_{-R}^{R} R(x)dx + \int_{C_R} R(z)dz = 2\pi i\sum \operatorname{Res}[R(z), z_k]$$

得$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i\sum \operatorname{Res}[R(z), z_k]$

如果$R(x)$为偶数，那么$\int_{0}^{+\infty} R(x)dx = \pi i\sum \operatorname{Res}[R(z), z_k]$

3.形如$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{aix}dx\ (a>0)$的积分

由于$m-n\geq 1$，故对于充分大的$|z|$，有$|R(x)|<\dfrac{2}{|z|}$

因此，在半径R充分大的C_R上，有

$$\left|\int_{C_R} R(z)e^{aiz}dz\right| \leq \int_{C_R} |R(z)||e^{aiz}|ds < \frac{2}{R}\int_{C_R} e^{-ay}ds$$

$$= 2\int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta}d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\theta}d\theta \leq 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR(\frac{2\theta}{\pi})}d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{aR}\left(1-e^{-aR}\right)$$

于是，当 $R\to+\infty$ 时，$\int_{C_R} R(z)e^{aiz}dz\to 0$，因此得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}dx = 2\pi i\sum \mathrm{Res}\left[R(z)e^{aiz}, z_k\right],$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos ax\,dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin ax\,dx$$

$$= 2\pi i\sum \mathrm{Res}\left[R(z)e^{aiz}, z_k\right]$$

西安電子科技大學
XIDIAN UNIVERSITY

The End.