



西安电子科技大学  
XIDIAN UNIVERSITY

# 场论与复变函数



通信工程学院

场论与复变函数教学团队



### 第一节 复数项级数

### 第二节 幂级数

### 第三节 泰勒级数

### 第四节 罗朗级数



## 第一节 复数项级数



### 1. 复数列的极限



### 2. 级数的概念



## 一. 复数列极限

**定义** 已知复数列  $\{\alpha_n\} = \{a_n + ib_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  
 $\alpha = a + ib$  为复常数.

若  $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \exists n > N$ , 恒有  $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$ ,  
那么  $\alpha$  称为复数列  $\{\alpha_n\}$  当  $n \rightarrow \infty$  时的极限,  
记作  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$ , 或当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\alpha_n \rightarrow \alpha$ ,  
此时, 也称复数列  $\{\alpha_n\}$  收敛于  $\alpha$ .



## 定理1 (数列收敛的充要条件)

数列  $\{a_n\}$  收敛于  $a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

**证明**  $\Rightarrow: \forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{当 } n > N \text{ 时, } |a_n - a| < \varepsilon$

即  $|(a_n + ib_n) - (a + ib)| = |(a_n - a) + i(b_n - b)| < \varepsilon$

$$\text{又 } \because |a_n - a| \leq |a_n - a| < \varepsilon,$$

$$|b_n - b| \leq |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$



## 定理1 (数列收敛的充要条件)

数列  $\{\alpha_n\}$  收敛于  $\alpha \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

**证明**  $\Leftarrow \because \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{ 当 } n > N \text{ 时,}$

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore |\alpha_n - \alpha| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$$



### 定理1 (数列收敛的充要条件)

数列  $\{a_n\}$  收敛于  $a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

**定理一说明:** 可将复数列的敛散性转化为  
判别两个实数列的敛散性.



## 课堂练习:

下列数列是否收敛? 如果收敛, 求出其极限.

$$(1) z_n = \frac{1+ni}{1-ni};$$

$$(2) z_n = (-1)^n + \frac{i}{n+1};$$

$$(3) z_n = \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)^{-n}.$$

$$(4) z_n = e^{-\frac{n\pi}{2}i};$$

$$(5) z_n = \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi i}{2}}.$$





$$(1) \quad z_n = \frac{1+ni}{1-ni};$$

$$\text{解: } z_n = \frac{1+ni}{1-ni} = \frac{1-n^2}{1+n^2} + i \frac{2n}{1+n^2}$$

$$\text{我们就有 } x_n = \frac{1-n^2}{1+n^2}; \quad y_n = \frac{2n}{1+n^2},$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n^2}{1+n^2} = -1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{1+n^2} = 0.$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = -1$$



$$(2) z_n = (-1)^n + \frac{i}{n+1};$$

$$(3) z_n = \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)^{-n}.$$

$$\begin{aligned} \text{解: } z_n &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^{-n} \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{-n} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \left[\cos\left(-\frac{n}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{n}{6}\pi\right)\right]$$



$$(3) \quad z_n = \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)^{-n}.$$

解:  $z_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^{-n} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \left[\cos\left(-\frac{n}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{n}{6}\pi\right)\right]$

$$\therefore x_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \cos \frac{n}{6}\pi, \quad y_n = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \sin \frac{n}{6}\pi$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0,$$



$$(4) z_n = e^{-\frac{n\pi}{2}i};$$

$$(5) z_n = \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi i}{2}}.$$

解:

$$z_n = \cos \frac{n}{2} \pi - i \sin \frac{n}{2} \pi,$$

$\because \cos \frac{n}{2} \pi, \sin \frac{n}{2} \pi$  在  $n \rightarrow \infty$  时, 极限不存在。

$\therefore$  这个序列极限不存在。



## 二、级数的概念

1. 定义 设 $\{\alpha_n\} = \{a_n + b_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ )为一复数列,

表达式 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$$

称为复数项无穷级数.

**部分和** 其最前面  $n$  项的和  $s_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$

称为级数的部分和.



### ■ 级数的前面 $n$ 项的和

$$s_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad \text{--- 级数的部分和}$$

$$\begin{aligned} \text{■ 若部分和数列 } \{s_n\} \left\{ \begin{array}{l} \text{收敛} \quad \text{--- 级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{ 称为收敛} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \text{ 称为级数的和} \\ \text{不收敛} \quad \text{--- 级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{ 称为发散} \end{array} \right. \end{aligned}$$

**说明：**与实数项级数相同, 判别复数项级数敛散性的基本方法是: 利用极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ .



例如, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  :

**解:**  $s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z} \quad (z \neq 1),$

由于当  $|z| < 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{1}{1 - z},$

所以当  $|z| < 1$  时级数收敛.



## 定理2 (判别定理)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{ 收敛} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 和 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 均收敛}$$

**证明** 令  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  的部分和分别为  $s_n, \sigma_n, \tau_n$

$$\text{则 } s_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \sigma_n + i\tau_n$$

而由定理1知,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s = \sigma + i\tau$

**定理1 (数列收敛的充要条件)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau$

$$\text{数列 } \{\alpha_n\} \text{ 收敛于 } \alpha \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

$n=1$

$n=1$

$n=1$





**例如** 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right)$  是否收敛?

**解** 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散;

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛.}$$

所以原级数发散.



## 推论（收敛的必要条件）

若  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  收敛  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$

**证明** 由  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  收敛  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛

从而有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

所以得出  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$

**重要结论:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \neq 0 \Rightarrow$  级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  发散.



例如,级数  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in}$  :

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{in} \neq 0$ ,

不满足必要条件, 所以原级数发散.

**启示:** 判别级数的敛散性时, 可先考察  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \neq 0$

如果  $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \neq 0, & \text{级数发散;} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, & \text{应进一步判断.} \end{cases}$



## 2. 绝对收敛与条件收敛

**定理3** 若  $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$  收敛  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  收敛, 且  $\left| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ .

**证明**

$$(1) \because |\alpha_n| = |a_n + ib_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\therefore |a_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

$$|b_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

由比较判定法

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  均绝对收敛,

由定理2得  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  收敛。

**注意**  $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$  的各项都是非负的实数,



**定理3** 若  $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$  收敛  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  收敛, 且  $\left| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ .

**证明**

$$(2) \text{ 由于 } \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k|$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \quad \text{即} \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$$



### 绝对收敛

若  $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$  收敛, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  为绝对收敛

### 条件收敛

非绝对收敛的收敛级数称为条件收敛.

注

$$\because \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leq |a_n| + |b_n|$$

$\therefore$  若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  绝对收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  也绝对收敛

故:  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  绝对收敛  $\Leftrightarrow \sum a_n, \sum b_n$  绝对收敛



判断复数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  是否绝对收敛的方法：

方法一：判断正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$  是否收敛，

方法二：分出  $\alpha_n$  的实部  $a_n$  与虚部  $b_n$ ，

判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  是否绝对收敛.



例1 判断下列各级数是否收敛, 如果收敛, 是绝对收敛还是条件收敛

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6+5i)^n}{8^n}$$

$$\text{解: } \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(6+5i)^n}{8^n} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{6+5i}{8} \right|^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\sqrt{61}}{8} \right)^n$$

这个是公比小于1的几何级数, 所以 (a) 级数是绝对收敛





$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}$$

$$\text{解:} \because \cos(in) = \frac{e^{-n} + e^n}{2} \quad \therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n} + e^n}{2^{n+1}},$$

$$\text{又} \because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-n} + e^n}{2^{n+1}} = +\infty,$$

$$\therefore \text{级数 } (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n} \text{ 发散}$$



$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$$

$$\text{解: } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i}{n} \right|^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} \right)^n$$

而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} \right)^n$  是发散,

$\therefore$  原级数不是绝对收敛的。

$$\therefore \frac{i^n}{n} = \frac{(\cos \frac{1}{2} \pi + i \sin \frac{1}{2} \pi)^n}{n} = \frac{(\cos \frac{n}{2} \pi + i \sin \frac{n}{2} \pi)}{n}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos \frac{n}{2} \pi + i \sin \frac{n}{2} \pi)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n}{2} \pi}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n}{2} \pi}{n}$$



$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$$

$$\text{解: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n}{2} \pi}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n}{2} \pi}{n}$$

$$\text{又} \because \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n}{2} \pi}{n} \text{ 和 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n}{2} \pi}{n} \text{ 是收敛的,}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} \text{ 是收敛的。}$$

$\therefore$  原级数是条件收敛的。



$$(d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8i)^n}{n!}$$

解  $\therefore \left| \frac{(8i)^n}{n!} \right| = \frac{8^n}{n!}$

而  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$  收敛 (由正向级数比值法知)

$\therefore$  原级数绝对收敛.



$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{i}{2^n} \right]$$

解  $\because \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  条件收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  绝对收敛

$\therefore$  原级数条件收敛.

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( 1 + \frac{i}{n} \right)$$

解  $\because \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛,  $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( 1 + \frac{i}{n} \right)$  发散.



$$(g) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n}$$

解  $\frac{i^n}{\ln n} = \frac{(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})^n}{\ln n} = \frac{1}{\ln n} \left( \cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2} \right)$

而  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \cos \frac{n\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln 2k}$  条件收敛

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \sin \frac{n\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(2k+1)} \quad \text{条件收敛}$$

$\therefore$  原级数条件收敛.



## 小结

- 复数列极限

若  $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \exists n > N$ , 恒有  $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$ ,

那么  $\alpha$  称为复数列  $\{\alpha_n\}$  当  $n \rightarrow \infty$  时的极限

- 复数列收敛的充要条件

数列  $\{\alpha_n\}$  收敛于  $\alpha \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$



## 小结

- 复数列级数

复数列:  $\{\alpha_n\} = \{a_n + ib_n\} (n = 1, 2, \dots),$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots \text{--- 无穷级数}$$

- 复数列级数的收敛性

若部分和数列  $\{s_n\}$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{收敛} \quad \text{--- 级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{ 称为收敛} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \text{ 称为级数的和} \\ \text{不收敛} \quad \text{--- 级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{ 称为发散} \end{array} \right.$





# 小结

- 复数列级数的收敛性
  - 部分和数列 $\{s_n\}$ 的敛散性
  - $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  收敛  $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  均收敛
  - 若  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  收敛  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$



# 小结

- 复数列级数的绝对收敛性

$$\text{若 } \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{ 收敛, 且 } \left| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|.$$

$$\text{故: } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{ 绝对收敛} \Leftrightarrow \sum a_n, \sum b_n \text{ 绝对收敛}$$



## 第二节 幂级数

-  1. 幂级数的概念
-  2. 收敛定理
-  3. 收敛圆与收敛半径
-  4. 收敛半径的求法
-  5. 幂级数的运算和性质



# 一、幂级数的基本概念

## 1. 复变函数项级数

**定义** 设复变函数  $f_n(z)$  在区域  $G$  内有定义,

(1) 称  $\{f_n(z)\}_{n=1,2,\dots}$  为区域  $G$  内的复变函数序列。

(2) 称  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots$  为区域  $G$  内

的复变函数项级数, 简记为  $\sum f_n(z)$ 。

(3) 称  $s_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$  为级数  $\sum f_n(z)$  的部分和。

得到区域  $G$  内的复变函数序列  $\{s_n(z)\}_{n=1,2,\dots}$



(1) 称  $s_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$  为级数  $\sum f_n(z)$  的部分和。

得到区域  $G$  内的复变函数序列  $\{s_n(z)\}_{n=1,2,\dots}$

(2) 对  $G$  内的某一点  $z_0$ , 得到区域  $G$  内的复数列  $\{s_n(z_0)\}_{n=1,2,\dots}$

若  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(z_0) = s(z_0)$ , 则称复变函数项级数  $\sum f_n(z)$

在  $z_0$  点收敛。此时有  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0) = s(z_0)$ 。

(3) 如果存在区域  $D \subseteq G$ ,  $\forall z \in D$ , 有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(z) = s(z)$ ,

则称级数  $\sum f_n(z)$  在区域  $D$  内收敛。此时, 称  $s(z)$

为和函数,  $D$  为收敛域。



$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots \text{为区域 } G \text{ 内}$$

的复变函数项级数，简记为  $\sum f_n(z)$ 。

## 2. 幂级数的概念

**定义** 称由下式给出的复变函数项级数为幂级数：

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n = a_0 + a_1 (z-a) + a_2 (z-a)^2 + \cdots, \quad (\text{I})$$

其中， $a_n, a$  为复常数。特别地，当  $a=0$  时有

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots. \quad (\text{II})$$



### 3. 收敛定理

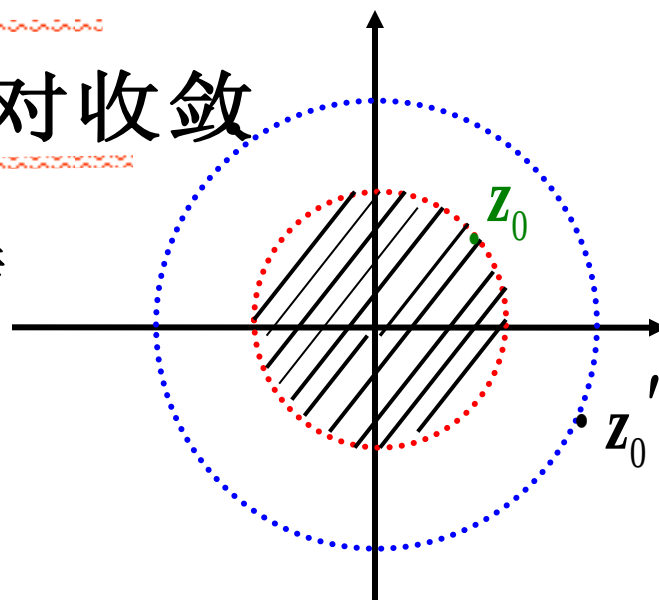
同实变函数一样，复变幂级数也有所谓的收敛定理：

#### 定理1 (阿贝尔(Able)定理)

(1) 若级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$  在  $z = z_0 (\neq 0)$  收敛，

则对满足  $|z| < |z_0|$  的  $z$ ，级数必绝对收敛

(2) 若级数在  $z = z_0$  发散，则对满足  $|z| > |z_0|$  的  $z$ ，级数必发散





证明:

$$(1) \because |c_n z^n| = |c_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z_0^n \text{ 收敛, } \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} c_n z_0^n = 0, \text{ 即}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \exists n > N, \text{ 恒有 } |c_n z_0^n| < \varepsilon$$

$$\text{取 } M = \max \{ \varepsilon, |c_0|, |c_1 z_0|, |c_2 z_0^2|, \dots, |c_N z_0^N| \}$$

$$\text{故 } |c_n z_0^n| < M, n = 0, 1, 2, \dots$$





$$(1) \because |c_n z^n| = |c_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \quad |c_n z_0^n| < M, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{若 } |z| < |z_0|, \quad \frac{|z|}{|z_0|} = q < 1. \quad |c_n z^n| = |c_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n < Mq^n,$$

由于  $\sum_{n=0}^{+\infty} Mq^n$  收敛, 由比较判别法得  $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n z^n|$  收敛,

$$\therefore \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \text{ 绝对收敛。}$$



(2)若级数在 $z = z_0$ 发散,则对满足 $|z| > |z_0|$ 的 $z$ ,级数必发散

**证明:** 用反证法,

设 $\exists z_1, \exists |z_1| > |z_0|$ , 有 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z_1^n$ 收敛,

由(1)知 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z_0^n$ 收敛与假设矛盾, 得证



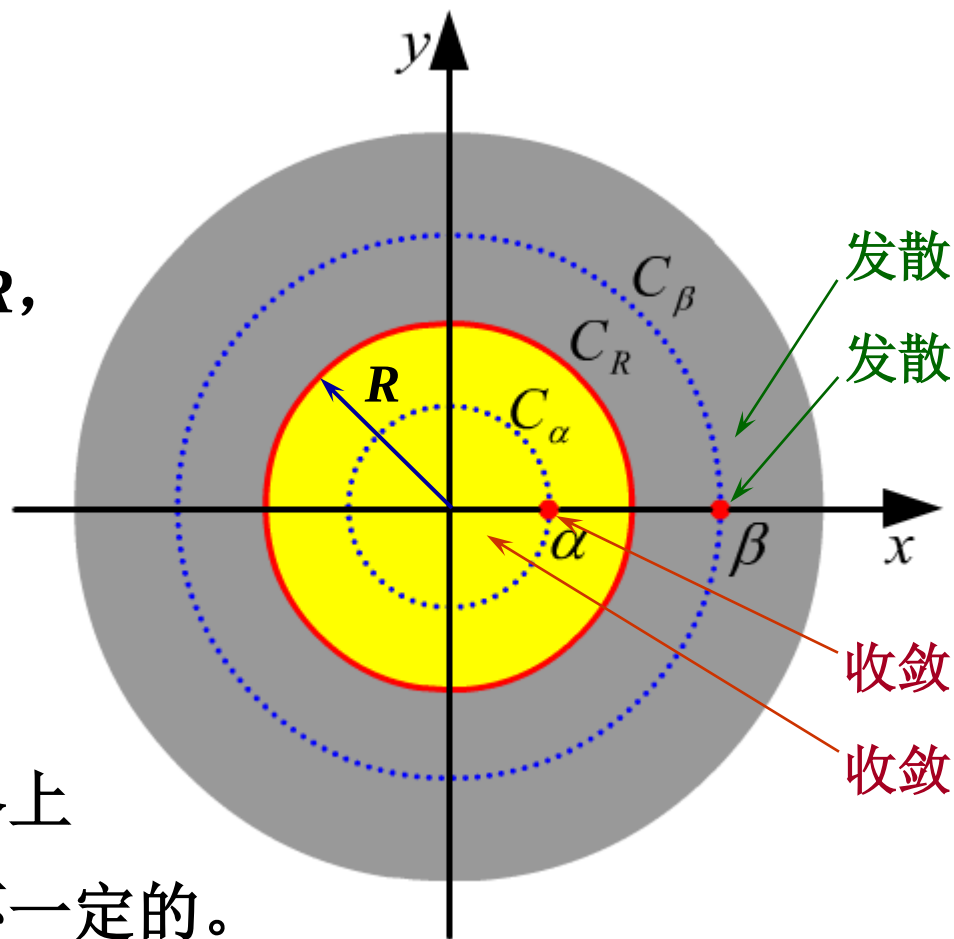
## 4. 收敛圆与收敛半径

**定义** 如图设  $C_R$  的半径为  $R$ ,

(1) 称圆域  $|z| < R$   
为收敛圆。

(2) 称  $R$  为收敛半径。

**注意** 级数在收敛圆的边界上  
各点的收敛情况是不一定的。





例如, 级数:  $R$  均为1, 收敛圆周  $|z|=1$

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \rightarrow$  收敛圆周上无收敛点;

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n} \rightarrow$  在点  $z=1$  发散, 在其它点都收敛;

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \rightarrow$  在收敛圆周上处处收敛.



对于一个幂级数，由Able定理，其收敛半径的情况有三种：

(1) **级数在复平面内处处绝对收敛.**

例如，级数  $1 + z + \frac{z^2}{2^2} + \cdots + \frac{z^n}{n^n} + \cdots$

对任意固定的 $z$ ，从某个 $n$ 开始，总有  $\frac{|z|}{n} < \frac{1}{2}$ ，

于是有  $\left| \frac{z^n}{n^n} \right| < \left( \frac{1}{2} \right)^n$ ，故该级数对任意的 $z$ 均收敛.

**约定**  $R = +\infty$  表示级数在整个复平面上 收敛。



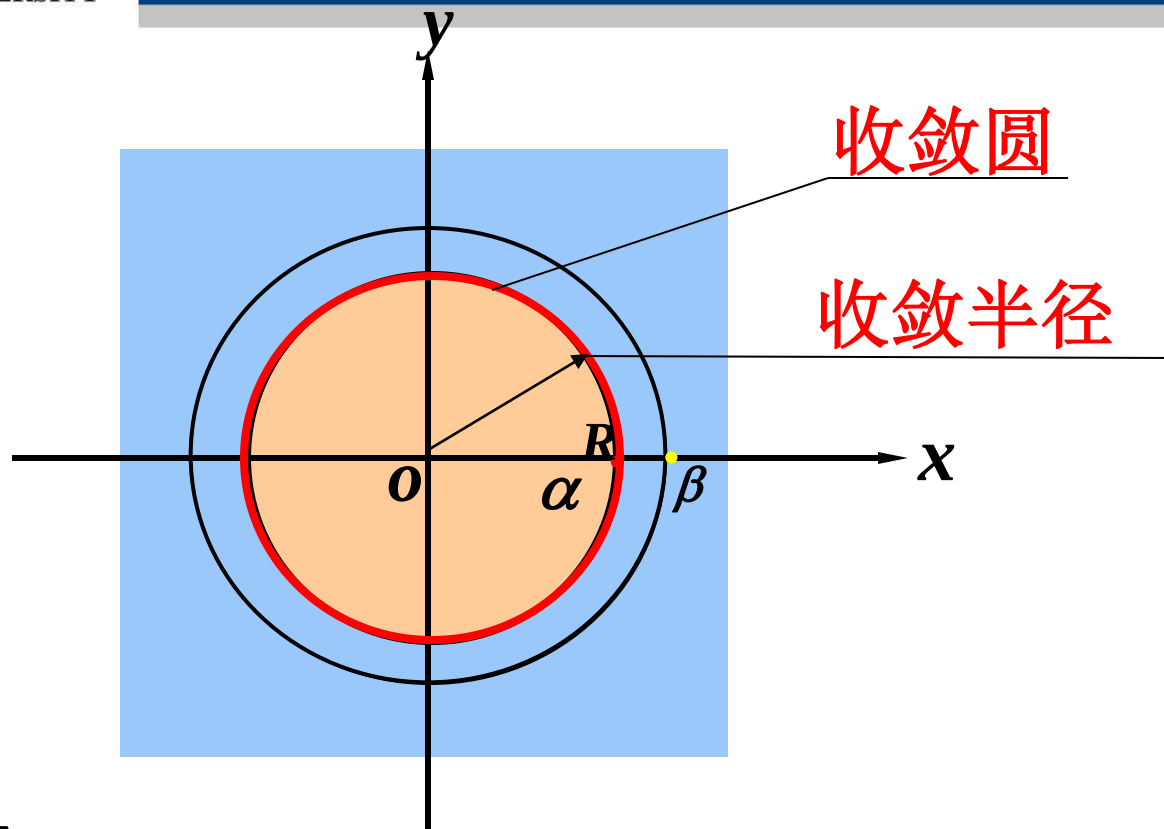
### (2) 级数在复平面内除原点外处处发散.

例如,级数  $1 + z + 2^2 z^2 + \cdots + n^n z^n + \cdots$

当  $z \neq 0$  时, 通项不趋于零, 故级数发散.

约定  $R = 0$  表示级数仅在  $z = 0$  点收敛;

### (3) 既存在使级数发散的点, 也存在使级数收敛的点.



幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  的收敛范围是以原点为中心的圆域。

**问题：** 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$  的收敛范围是何区域？

**答案：** 是以  $z = a$  为中心的圆域。



## 5. 求收敛半径的方法

对于幂级数  $\sum a_n z^n$ , 有

(1) **比值法** 如果  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lambda$ , 则收敛半径为  $R = \frac{1}{\lambda}$ .

**推导** 考虑正项级数  $\sum |a_n z^n|$ , 利用达朗贝尔判别法:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot |z| = \lambda |z|,$$

当  $\lambda |z| < 1$  即  $|z| < 1/\lambda$  时, 正项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| |z^n|$  收敛.

当  $\lambda |z| > 1$  即  $|z| > 1/\lambda$  时, 正项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| |z^n|$  发散.





根据上节定理三, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  在圆  $|z| = \frac{1}{\lambda}$  内收敛,

假设在圆  $|z| = \frac{1}{\lambda}$  外有一点  $z_0$ , 使级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  收敛,

在圆  $|z| = \frac{1}{\lambda}$  外再取一点  $z_1$ , 使  $|z_1| < |z_0|$ ,

据阿贝尔定理, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| |z_1|^n$  必收敛.



然而此时  $|z_1| > \frac{1}{\lambda}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}| |z_1|^{n+1}}{|c_n| |z_1|^n} = \lambda |z_1| > 1$ .

与  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| |z_1|^n$  收敛相矛盾, 即假设不成立.

故  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  在圆  $|z| = \frac{1}{\lambda}$  外发散,

所以收敛半径为  $R = \frac{1}{\lambda}$ . [证毕]



**注意：** 定理中极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$  存在且不为零。

如果：

1.  $\lambda = 0$ , 则级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  在复平面内处处收敛,  
即  $R = \infty$ .

2.  $\lambda = \infty$  (极限不存在),

则级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  对于复平面内除  $z = 0$  以外的一切  
 $z$  均发散, 即  $R = 0$ .

**例1：**求幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$  ( $p$ 为正整数) 的收敛半径.

**解** 因为  $c_n = \frac{1}{n^p}$ ,

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p} = 1.$$

$$\text{所以 } R = \frac{1}{\lambda} = 1.$$



例2 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$

的收敛范围及和函数。

解  $\because \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = 1 \quad \therefore R = 1$

$$\text{又 } s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

$$\because \text{当 } |z| < 1 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - z}.$$

$$\because \text{当 } |z| = 1 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} z^n \neq 0, \therefore \text{级数发散}$$

综上  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \begin{cases} \text{收敛, 且和函数为 } \frac{1}{1 - z} & \text{当 } |z| < 1 \text{ 时;} \\ \text{发散} & \text{当 } |z| \geq 1 \text{ 时.} \end{cases}$



例3.求下列级数的收敛半径.

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} (\cos in) z^n$$

解  $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(e^{n+1} + e^{-n-1})}{2}}{\frac{(e^n + e^{-n})}{2}} = e \quad \therefore R = \frac{1}{e}$



$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$$

**解**  $\because \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1, \quad \therefore R = 1$

收敛圆  $C_R: |z-1|=1$  其中  $z=0, z=2$  在圆上,

而  $z=0$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  收敛;  $z=2$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散

可见, 收敛圆  $C_R$  上, 有收敛点, 也有发散点.



## 方法2: 根值法(定理三)

如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lambda \neq 0$ , 那末收敛半径  $R = \frac{1}{\lambda}$ .

说明:

$$\text{如果 } \lambda = \begin{cases} 0 & \longrightarrow R = \infty \\ \infty & \longrightarrow R = 0 \end{cases}$$

(与比值法相同)





**例** 求幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (z-1)^n$  的收敛半径与收敛圆。

**解** 由于  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

故级数的收敛半径为  $R = \frac{1}{e}$ , 收敛圆为  $|z-1| < \frac{1}{e}$ .



## 6、幂级数的性质

### 6.1. 幂级数的运算性质

性质 设  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ ,  $|z| < r_1$ ,  $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ ,  $|z| < r_2$ ,

令  $r = \min(r_1, r_2)$ , 则在  $|z| < r$  内有

$$f(z) \pm g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \pm \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \pm b_n) z^n;$$

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n$$



## 6.2. 幂级数的分析性质

**性质** 设  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ ,  $|z - z_0| < R$ , 则

(1) 函数  $f(z)$  在收敛圆  $|z - z_0| < R$  内**解析**。

(2) 函数  $f(z)$  的导数可由其幂函数**逐项求导**得到, 即

**简言之: 在收敛圆内, 幂级数的和函数解析;**

**幂级数可逐项求导, 逐项积分.**

(3) 在收敛圆内可以**逐项积分**, 即

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}.$$



## 7、幂级数的性质

### 7.3. 幂级数的代换(复合)性质

**性质** 设级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  在  $|z| < R$  内收敛, **和函数** 为  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ ,

又设函数  $g(z)$  在  $|z| < r$  内解析, 且满足  $|g(z)| < R$ , 则

当  $|z| < r$  时, 有  $f[g(z)] = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n [g(z)]^n$ .

● 在把函数展开成幂级数时, 上述三类性质有着重要的作用。



例 把函数  $\frac{1}{(1-z)^2}$  表示成形如  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  的幂级数。

解 方法一 利用乘法运算性质

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^2} &= \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z} = (1+z+z^2+\cdots)(1+z+z^2+\cdots) \\ &= 1+2z+3z^2+\cdots+(n+1)z^n+\cdots, \quad |z|<1.\end{aligned}$$

方法二 利用逐项求导性质

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^2} &= \left(\frac{1}{1-z}\right)' = (1+z+z^2+\cdots)' \\ &= 1+2z+3z^2+\cdots+(n+1)z^n+\cdots, \quad |z|<1.\end{aligned}$$



**例** 把函数  $\frac{1}{z-b}$  表成形如  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$  的幂

级数, 其中  $a$  与  $b$  是不相等的复常数.

**解** 把函数  $\frac{1}{z-b}$  写成如下的形式:

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a) - (b-a)} = -\frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{b-a}}$$

↓                                  ↓                                  凑出

$$\frac{1}{1-g(z)}$$

代数变形, 使其分母中出现  $(z-a)$



$$\frac{1}{z-b} = -\frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{b-a}} \quad \text{当 } \left| \frac{z-a}{b-a} \right| < 1 \text{ 时,}$$

$$\frac{1}{1 - \frac{z-a}{b-a}} = 1 + \left( \frac{z-a}{b-a} \right) + \left( \frac{z-a}{b-a} \right)^2 + \cdots + \left( \frac{z-a}{b-a} \right)^n + \cdots,$$

$$\text{故 } \frac{1}{z-b} = -\frac{1}{b-a} - \frac{1}{(b-a)^2}(z-a) - \frac{1}{(b-a)^3}(z-a)^2 \\ - \cdots - \frac{1}{(b-a)^{n+1}}(z-a)^n - \cdots$$

设  $|b-a| = R$ , 若  $|z-a| < R$ , 级数收敛, 且其和为  $\frac{1}{z-b}$ .



**例** 求级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1)z^{n-1}$  的收敛半径与和函数.

**解** 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 1}{2^n - 1} = 2$ , 所以  $R = \frac{1}{2}$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1)z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n-1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} z^{n-1} = \frac{2}{1-2z}$$

$$\text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1)z^{n-1} = \frac{2}{1-2z} - \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-2z)(1-z)}.$$





**例** 计算  $\oint_c (\sum_{n=-1}^{\infty} z^n) dz$ , 其中  $c$  为  $|z| = \frac{1}{2}$ .

**解** 在  $|z| < \frac{1}{2}$  内,  $\sum_{n=-1}^{\infty} z^n$  收敛,

$$\text{和函数 } S(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } I &= \oint_c \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} \right) dz = \oint_c \frac{1}{z} dz + \oint_c \frac{1}{1-z} dz \\ &= 2\pi i + 0 = 2\pi i. \end{aligned}$$



作业： 1,3,6,11



由 § 4.2 幂级数的性质知：一个幂级数的和函数在它的收敛圆内部是一个解析函数。

现在研究与此相反的问题：

**一个解析函数能否用幂级数表达？**

(或者说,一个解析函数能否展开成幂级数? 解析函数在解析点能否用幂级数表示? )

本节给出了肯定回答：

**任何解析函数都一定能用幂级数表示。**



## 第三节 泰勒(*Taylor*)级数



1. 泰勒展开定理



2. 展开式的唯一性



3. 简单初等函数的泰勒展开式



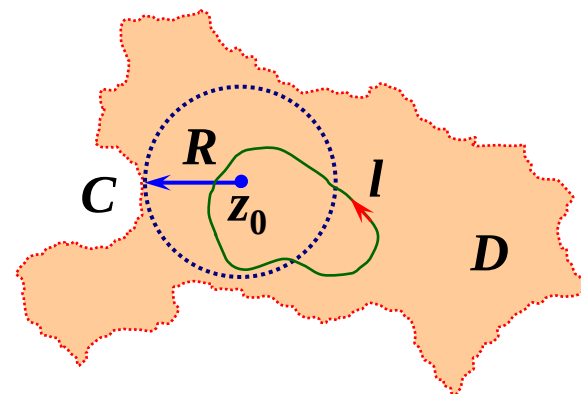
## 一、泰勒(Taylor)定理

**定理** 设函数  $f(z)$  在区域  $D$  内解析,  $C$  为  $D$  的边界,  $z_0 \in D$ ,

$R = \min_{z \in C} |z - z_0|$ , 则当  $|z - z_0| < R$  时, 有

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

其中,  $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$



$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad \left( l \text{ 为 } D \text{ 内包围 } z_0 \text{ 点的} \right. \\ \left. \text{的任意一条闭曲线。} \right)$$



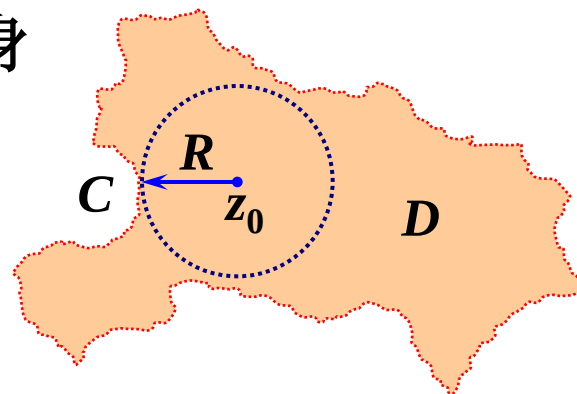
## 一、泰勒(Taylor)定理

**注** (1) 为什么只能在圆域  $|z - z_0| < R$  上展开为幂级数，而不是在整个解析区域  $D$  上展开？

**回答** 这是由于受到幂级数本身的收敛性质的限制：

- 幂级数的收敛域必须是圆域。

- 幂级数一旦收敛，其和函数一定解析。





## 一、泰勒(Taylor)定理

**注** (2) 展开式中的系数  $a_n$  可以用下列方法直接给出。

**方法一**  $f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_{n-1}(z - z_0)^{n-1} +$

$$a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \cdots,$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(z) = 0 + n!a_n + (z - z_0)p(z),$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(z_0) = n!a_n,$$

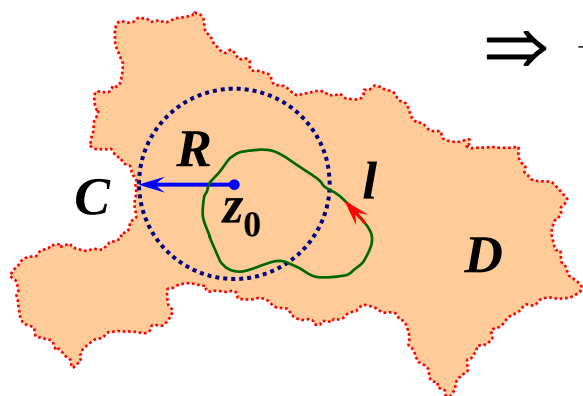
$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$$



## 一、泰勒(Taylor)定理

注 (2) 展开式中的系数  $a_n$  可以用下列方法直接给出。

方法二  $f(z) = a_0 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots$



$$\Rightarrow \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{a_0}{(z - z_0)^{n+1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{(z - z_0)^2} +$$

$$\boxed{\frac{a_n}{z - z_0}} + a_{n+1} + \cdots,$$

$$\Rightarrow \oint_l \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = 0 + 2\pi i a_n + 0,$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$$





## 一、泰勒(Taylor)定理

**注** (3) 对于一个给定的函数, 用任何方法展开为幂级数, 其结果都是一样的, 即具有唯一性。

**比如** 将函数  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  在  $z=0$  点展开为幂级数。

**方法一** 利用已知的结果 (§ 4.2):

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots, \quad (|z| < 1).$$

**方法二** 利用泰勒定理:  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1.$

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_{n-1}(z - z_0)^{n-1} +$$



## 一、泰勒(Taylor)定理

**注** (4) 对于一个给定的函数，能不能在不具体展开为幂级数

的情况下，就知道其收敛域？ 可以知道。

**结论** 函数  $f(z)$  在  $z_0$  点展开为泰勒级数，其收敛半径

等于从  $z_0$  点到  $f(z)$  的最近一个奇点  $\tilde{z}$  的距离。

**理由** (1) 幂级数在收敛圆内解析，因此奇点  $\tilde{z}$  不可能

在收敛圆内；

(2) 奇点  $\tilde{z}$  也不可能在收敛圆外，不然收敛半径

还可以扩大，故奇点  $\tilde{z}$  只能在收敛圆周上。



## 二、将函数展开为泰勒级数的方法 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$

### 1. 直接展开法

● 利用泰勒定理，直接计算展开系数  $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ .

**例** 将函数  $f(z) = e^z$  在  $z = 0$  点展开为幂级数。

**解**  $f^{(n)}(0) = e^z \big|_{z=0} = 1,$

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \quad |z| < +\infty.$$

因为  $e^z$  在复平面内处处解析,

所以级数的收敛半径  $R = \infty$ .



## 二、将函数展开为泰勒级数的方法 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$

### 1. 直接展开法

● 利用泰勒定理，直接计算展开系数  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ .

● 同理可得

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots, \quad |z| < +\infty.$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots, \quad |z| < +\infty.$$



## 二、将函数展开为泰勒级数的方法

### 2. 间接展开法

- 根据唯一性，利用一些已知的展开式，通过有理运算、代换运算、逐项求导、逐项求积等方法展开。
- 两个重要的已知展开式

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 \cdots, \quad |z| < 1.$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \quad |z| < +\infty.$$



例 将函数  $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$  在  $z=i$  点展开为幂级数。

解 函数  $f(z)$  有奇点  $z=1$ ，故收敛半径  $R=|1-i|=\sqrt{2}$ 。

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{(1-i)-(z-i)} = \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}} \\ &= \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{z-i}{1-i} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}, \quad |z-i| < \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$(2) \quad \frac{1}{(1-z)^2} = \left( \frac{1}{1-z} \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(z-i)^{n-1}}{(1-i)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{(1-i)^{n+2}} (z-i)^n,$$

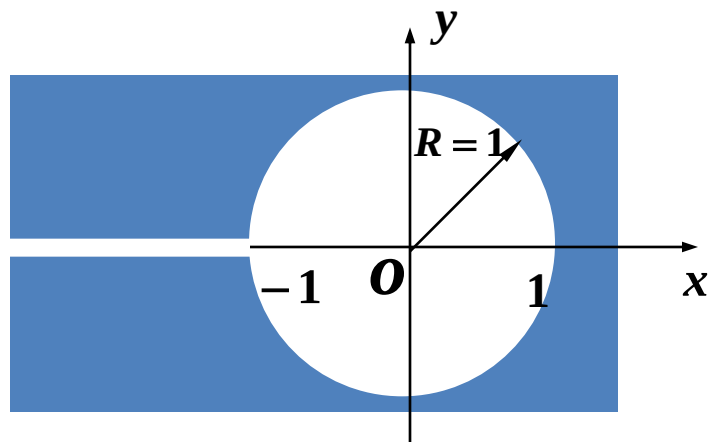
$$|z-i| < \sqrt{2}.$$



**例2** 求对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式.

**分析**  $\ln(1+z)$ 在从 $-1$ 向左沿负实轴剪开的平面内是解析的, $-1$ 是它的一个奇点, 所以它在 $|z|=1$ 内可以展开成 $z$ 的幂级数.

如图,





对于主值分支:  $\ln z = \ln|z| + i \arg z \quad (-\pi < \arg z \leq \pi)$

显然  $z \neq 0$  时,  $\ln|z|$  处处连续

而  $\arg z$  在  $z = 0$  及负实轴上不连续

$$\left( \because \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ (\operatorname{Im} z > 0)}} \arg z = \pi \quad \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ (\operatorname{Im} z < 0)}} \arg z = -\pi \quad \therefore \lim_{z \rightarrow z_0} \arg z \text{ 不存在} \right)$$

故  $\ln z$  除  $z = 0$  及负实轴上点处处连续

$$\text{且由求导法则} \quad \frac{d \ln z}{dz} = \frac{1}{\frac{de^w}{dw}} = \frac{1}{z} \quad (z \neq 0 \text{ 及负实轴上点})$$

从而  $\ln z$  在除  $z = 0$  及负实轴上点外处处解析





**例2** 求对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 处的  
泰勒展开式.

解  $[\ln(1+z)]' = \frac{1}{1+z}$

$$= 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad (|z| < 1)$$

设 $C$ 为收敛圆 $|z| < 1$ 内从 $0$ 到 $z$ 的曲线,

将展开式两端沿 $C$ 逐项积分, 得

$$\int_0^z \frac{1}{1+z} dz = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n dz$$

$$\text{即 } \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad |z| < 1$$



**例** 将函数  $f(z) = \ln(1+z)$  在  $z=1$  点展开为幂级数。

**解**

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+(z-1)/2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-1)^n, \quad |z-1| < 2.$$

$$\int_1^z f'(z) dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \int_1^z (z-1)^n dz \right],$$

$$f(z) - f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{n+1} (z-1)^{n+1},$$

$$f(z) = \ln 2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{n+1} (z-1)^{n+1}, \quad |z-1| < 2.$$



**例** 将函数  $f(z) = \frac{2z^2 - 3}{(z-2)(z^2 + 1)}$  在  $z=0$  点展开为幂级数。

**解** 
$$f(z) = \frac{A}{z-2} + \frac{Bz+C}{z^2+1} = \frac{1}{z-2} + \frac{z+2}{z^2+1},$$

$$(1) \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad |z| < 2.$$

$$(2) \frac{z+2}{z^2+1} = \frac{z+2}{1-(-z^2)} = (z+2) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad |z| < 1.$$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^n z^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n+1}, \quad |z| < 1.$$



例 将函数  $f(z) = e^z \sin z$  在  $z = 0$  点展开为幂级数。

解 
$$f(z) = e^z \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i} (e^{(1+i)z} - e^{(1-i)z})$$

$$= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{n!} z^n - \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-i)^n}{n!} z^n \quad |z| < +\infty.$$

$$= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{n!} z^n$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{n!} \sin \frac{n\pi}{4} z^n, \quad |z| < +\infty.$$



**例** 将函数  $f(z) = \sin^2 z$  在  $z = 0$  点展开为幂级数。

**解**

$$\begin{aligned}\sin^2 z &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2z) = \frac{1}{2}\left[1 - \left(1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - \frac{(2z)^6}{6!} + \cdots\right)\right] \\ &= \frac{(2z)^2}{2 \cdot 2!} - \frac{(2z)^4}{2 \cdot 4!} + \frac{(2z)^6}{2 \cdot 6!} - \cdots, \quad |z| < +\infty.\end{aligned}$$

**例** 将函数  $f(z) = \sin z$  在  $z = 1$  点展开为幂级数。

**解**

$$\sin z = \sin[1 + (z - 1)] = \sin 1 \cos(z - 1) + \cos 1 \sin(z - 1)$$

$$\begin{aligned}&= \sin 1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(z - 1)^{2n}}{(2n)!} + \\ &\quad \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - 1)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |z - 1| < +\infty.\end{aligned}$$



$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^{2k-1}}{(2k-1)!!}$$

$$\text{又 } \cos z = (\sin z)'$$

$$= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$\therefore \sin z, \cos z$  在全平面上解析,  $\therefore$  它们的半径  $R = \infty$



**\*例** 将函数  $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$  在  $z=0$  点展开为幂级数。

**解**  $f(z)$  有一个奇点  $z=1$ ,  $\therefore$  展开域为  $|z| < 1$

**法1: 直接法**

$$f'(z) = e^{\frac{1}{1-z}} \cdot \frac{1}{(1-z)^2} = f(z) \cdot \frac{1}{(1-z)^2},$$

$$\Rightarrow (1-z)^2 f'(z) - f(z) = 0,$$

$$(1-z)^2 f''(z) + (2z-3)f'(z) = 0,$$

$$(1-z)^2 f'''(z) + (4z-5)f''(z) + 2f'(z) = 0,$$

.....

$$\Rightarrow f(0) = e, f'(0) = e, f''(0) = 3e, f'''(0) = 13e, \dots,$$

$$\Rightarrow f(z) = e + ez + \frac{3e}{2!}z^2 + \frac{13e}{3!}z^3 + \dots, \quad |z| < 1.$$



## 法2 待定系数法

$$\text{令 } f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

$$\text{则由 } (1-z)^2 f'(z) = f(z)$$

$$\begin{aligned} \text{得 } (1-z)^2 (c_1 + 2c_2 z + \cdots + nc_n z^{n-1} + \cdots) \\ = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots \end{aligned}$$

$$\text{比较得: } c_0 = f(0) = e, c_1 = c_0 = e, c_2 = \frac{3}{2}c_1 = \frac{3}{2}e, \cdots$$

$$\therefore e^{\frac{1}{1-z}} = e \left( 1 + z + \frac{3}{2!} z^2 + \cdots \right) \quad |z| < 1$$





例6 求  $f(z) = \frac{z}{z+2}$  在  $z=1$  处的泰勒展开式.

**解**  $f(z)$  的奇点为  $z=-2$

$$\therefore \text{展开域 } |z-1| < |1-(-2)| = 3$$

$$\begin{aligned} \text{而 } f(z) &= \frac{z}{z+2} = 1 - \frac{2}{z+2} = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-1}{3}} \\ &= 1 - \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} (z-1)^n \\ &= \frac{1}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2}{3^{n+1}} (z-1)^n, \quad |z-1| < 3 \end{aligned}$$



## 小结

一、*Taylor*展开定理

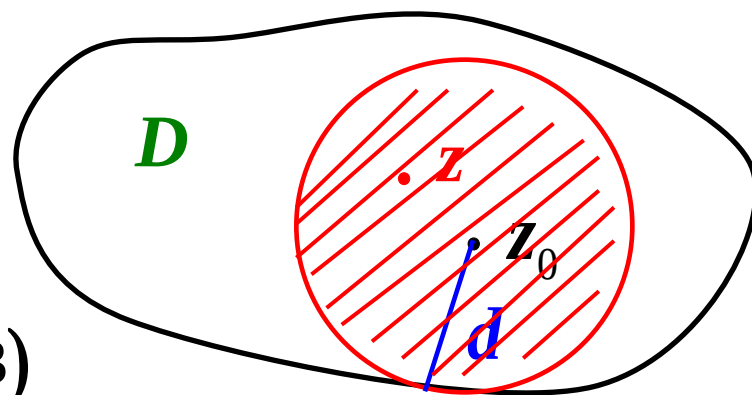
二、函数展开为T—级数的方法：  
-----直接法及间接法

定理 (*Taylor*展开定理)

设 $f(z)$ 在区域 $D$ 内解析,  $z_0 \in D$ ,  $d = \min_{z \in \partial D} \{ |z - z_0| \}$ ,

则当  $|z - z_0| < d$  时,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (3) \end{aligned}$$



(3)式称为 $f(z)$ 在 $z_0$ 点的泰勒展开式, 且展开式惟一.

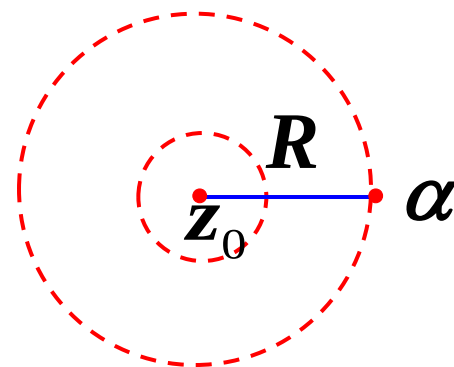
其中 $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (n = 0, 1, 2, \dots)$ 称为*Taylor*系数

而 $|z - z_0| < d$ 为 $f(z)$ 在 $D$ 内 $z_0$ 点的最大展开范围.



**注** 1° 由定理可得：若  $f(z)$  在  $z_0$  点解析，则可在  $z_0$  的解析邻域内  $T$ -展开。

而最大展开邻域半径  $R$  等于  $z_0$  到  $f(z)$  的最近奇点  $\alpha$  的距离，即  $R = |z_0 - \alpha|$ 。



2°  $f(z)$  在  $z_0$  点解析  $\Leftrightarrow f(z)$  在  $z_0$  点可展开为  $T$ -级数.  
(判别解析的另一定理)

3° 特别的，当  $z_0 = 0$  时，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$



## 函数展开成泰勒级数的几种常用办法

- 1. 泰勒公式法
- 2. 代换法
- 3. 逐项求导或逐项积分
- 4. 利用公式  $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$  和  $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ ,  $|z| < 1$
- 5. 幂级数的乘法
- 6. 待定系数法



$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \quad (|z| < +\infty)$$

$$\begin{aligned} \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \\ &\quad + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad (|z| < +\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \\ &\quad + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (|z| < +\infty) \end{aligned}$$



$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1}, \quad |z| < 1$$

- 作业: 12,16



由 § 4.3 知,

若  $f(z)$  在  $z_0$  点解析, 则  $f(z)$  总可以在  $z_0$  的某一个圆域  $|z - z_0| < R$  内展开成  $z - z_0$  的幂级数。

若  $f(z)$  在  $z_0$  点不解析, 在  $z_0$  的邻域中就不可能展开成  $z - z_0$  的幂级数, 否则  $f(z)$  在  $z_0$  点解析。

但如果在圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  内解析, 那么,  $f(z)$  能否用级数表示呢?





## 第四节 洛朗级数

- 一、含有负幂次项的“幂级数”
- 二、洛朗 (Laurent) 定理
- 三、将函数展开为洛朗级数的方法



# 一、含有负幂次项的“幂级数”

## 1. 问题分析

**引例** 根据前面的讨论已知，函数  $\frac{1}{1-z}$  在  $z=0$  点的幂级数

$$\text{展开式为 } \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots, (|z| < 1).$$

- 事实上，该函数在整个复平面上仅有  $z=1$  一个奇点，但正是这样一个奇点，使得函数只能在  $|z| < 1$  内展开为  $z$  的幂级数，而在  $|z| > 1$  如此广大的解析区域内不能展开为  $z$  的幂级数。

- 有没有其它办法呢？



# 一、含有负幂次项的“幂级数”

## 1. 问题分析

设想 由  $|z| > 1$ , 有  $\frac{1}{|z|} < 1$ , 从而可得

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \cdots.$$

● 这样一来, 在整个复平面上就有

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots, (|z| < 1);$$

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \cdots, (|z| > 1).$$



## 一、含有负幂次项的“幂级数”

### 1. 问题分析

**启示** 如果**不限制**一定要展开为只含正幂次项的幂级数的话，即如果引入负幂次项，那么就有可能将一个函数在整个复平面上(除了奇点所在的圆周上)展开。

● 下面将讨论下列形式的级数：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \cdots + a_{-2} (z - z_0)^{-2} + a_{-1} (z - z_0)^{-1} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots.$$

● 在引入了负幂次项以后，“幂级数”的收敛特性如何呢？



## 一、含有负幂次项的“幂级数”

2. 级数  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$  的收敛特性

分析 将其分为两部分：正幂次项部分与负幂次项部分。

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots; \quad (A)$$

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z - z_0)^n = a_{-1} (z - z_0)^{-1} + a_{-2} (z - z_0)^{-2} + \cdots. \quad (B)$$

根据上一节的讨论可知：

(1) 对于 (A) 式，其收敛域的形式为  $|z - z_0| < R_2$ ；

(2) 对于 (B) 式，其收敛域的形式为  $|z - z_0| > R_1$ ；



例 求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^n}$  的收敛域, 其中  $a, b$  为复数.

解:  $\because \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{z^n}$  在  $\left| \frac{a}{z} \right| < 1$  即  $|z| > |a|$  内收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{b^n}$  在  $\left| \frac{z}{b} \right| < 1$  即  $|z| < |b|$  内收敛

$\therefore$  当  $|a| < |b|$  时, 收敛域为  $|a| < |z| < |b|$

当  $|a| > |b|$  时, 处处发散.



## 一、含有负幂次项的“幂级数”

2. 级数  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$  的收敛特性

结论 (1) 如果级数  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$  收敛,

则其收敛域“一定”为环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$ .

特别地 ① 如果只含正幂次项(或者加上有限个负幂次项),  
则其收敛域为:  $0 \leq |z - z_0| < R$  或  $0 < |z - z_0| < R$ .

② 如果只含负幂次项(或者加上有限个正幂次项),  
则其收敛域为:  $R < |z - z_0| < +\infty$ .

● 上述两类收敛域被看作是一种特殊的环境。



## 一、含有负幂次项的“幂级数”

2. 级数  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$  的收敛特性

结论 (1) 如果级数  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$  收敛,

则其收敛域“一定”为环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$ .

(2) 级数  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$  在收敛域内其和函数是解析的,

而且具有与幂级数同样的运算性质和分析性质。

- 因此, 下面将讨论如何将一个函数在其解析环域内展开为上述形式的级数。





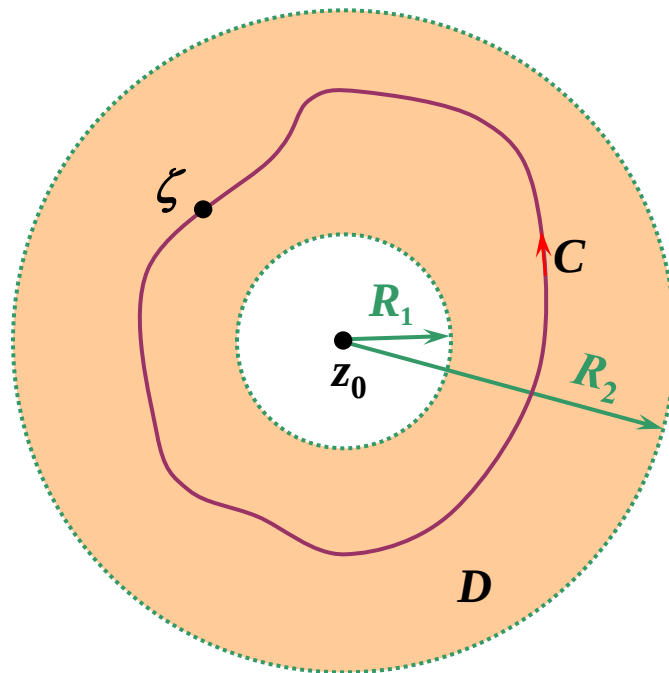
## 二、洛朗 (Laurent) 定理

**定理** 设函数  $f(z)$  在圆环域  
 $D: R_1 < |z - z_0| < R_2$  内  
解析, 则  $f(z)$  一定能  
在此圆环域中展开为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

$$\text{其中, } a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$C$  为在圆环域内绕  $z_0$  的任何一条简单闭曲线。





## 二、洛朗 (Laurent) 定理

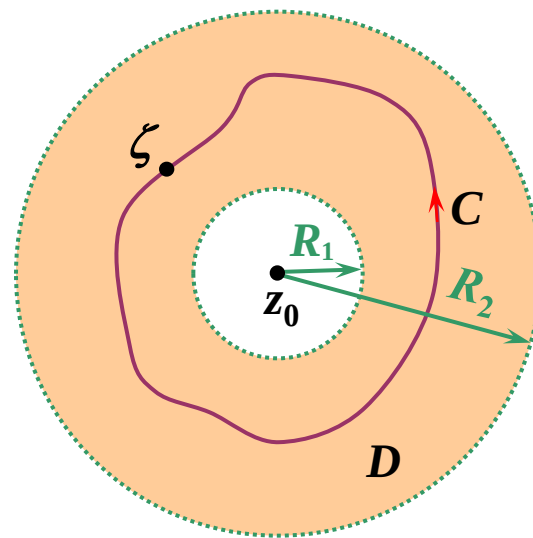
注 (1) 展开式中的系数  $a_n$  可以用下面得方法直接给出。

$$f(z) = \cdots + a_{n-1}(z - z_0)^{n-1} + a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} = \cdots + \frac{a_{n-1}}{(z - z_0)^2} + \boxed{\frac{a_n}{z - z_0}} + a_{n+1} + \cdots,$$

$$\Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = 0 + 2\pi i a_n + 0,$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$





## 二、洛朗 (Laurent) 定理

注 (2) 洛朗级数中的正幂次项和负幂次项分别称为洛朗级数的

解析部分和主要部分。

(3) 一个在某圆环域内解析的函数展开为含有正负幂次项

的级数是唯一的。  $\because f(z)$  在  $c$  内不是处处解析的

(4) 系数  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \neq \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$

(5) 若函数  $f(z)$  在圆环  $0 \leq |z - z_0| < R$  内解析, 则  $f(z)$  在此圆环内的洛朗展开式就是泰勒展开式。

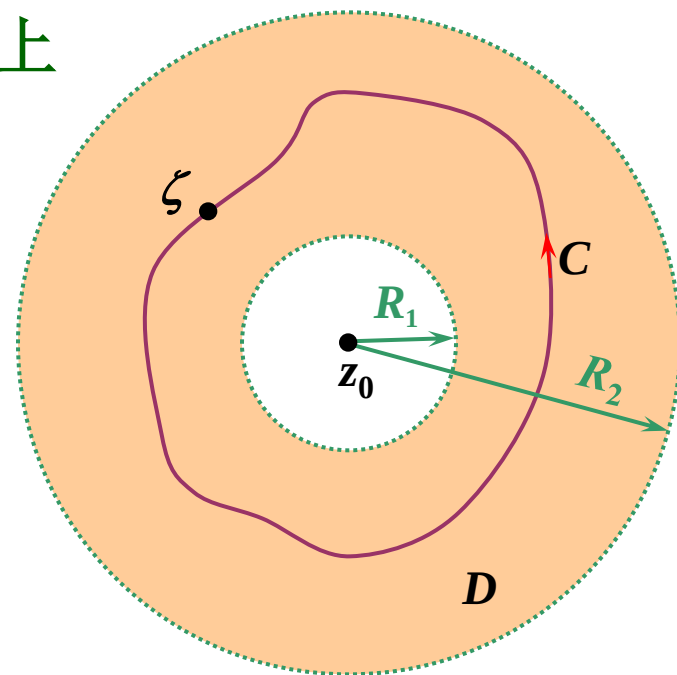


## 三、将函数展开为洛朗级数的方法

### 1. 直接展开法

- 根据洛朗定理，在指定的解析环上直接计算展开系数：

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$



### 2. 间接展开法

- 根据唯一性，利用一些已知的展开式，通过有理运算、代换运算、逐项求导、逐项求积等方法展开。



## 三、将函数展开为洛朗级数的方法

### 2. 间接展开法

- 根据唯一性，利用一些已知的展开式，通过有理运算、代换运算、逐项求导、逐项求积等方法展开。
- 两个重要的已知展开式

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 \cdots, \quad |z| < 1.$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \quad |z| < +\infty.$$

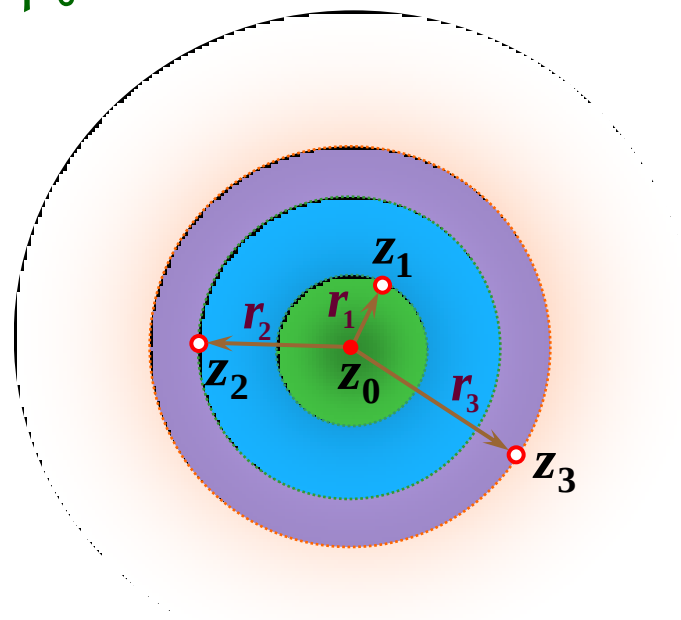


### 三、将函数展开为洛朗级数的方法

**注意** 无论是直接展开法还是间接展开法，在求展开式之前，都需要根据函数的奇点位置，将复平面(或者题目指定的展开区域)分为若干个解析环。

将复平面(或者题目指定的展开区域)分为若干个解析环的方法：

先求  $f(z)$  的奇点，然后以展开点  $z_0$  为中心，奇点为分隔点，找出  $z_0$  到无穷远点的所有使  $f(z)$  解析的环，在环域上展成级数。





例1 在  $0 < |z| < \infty$  内, 将  $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$  展开成洛朗级数.

解 由定理知:  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$

$$\text{其中 } c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}} d\zeta$$

$$C : |z| = \rho (0 < \rho < \infty), \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$$

当  $n \leq -3$  时,  $\frac{e^z}{z^2}$  在圆环域内解析,

故由柯西-古萨基本定理知:  $c_n = 0$



例1 在  $0 < |z| < \infty$  内, 将  $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$  展开成洛朗级数.

$$\text{其中 } c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}} d\zeta$$

当  $n \geq -2$  时, 由高阶导数公式知:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}} d\zeta = \frac{1}{(n+2)!} \cdot \left[ \frac{d^{n+2}}{dz^{n+2}} (e^z) \right]_{z=0} = \frac{1}{(n+2)!}$$

$$\text{故 } f(z) = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \dots$$

$$0 < |z| < \infty$$





另解

$$\begin{aligned}\frac{e^z}{z^2} &= \frac{1}{z^2} \left( 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots\end{aligned}$$

本例中圆环域的中心  $z = 0$  既是各负幂项的奇点，  
也是函数  $\frac{e^z}{z^2}$  的奇点。



例：将  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  在圆环域

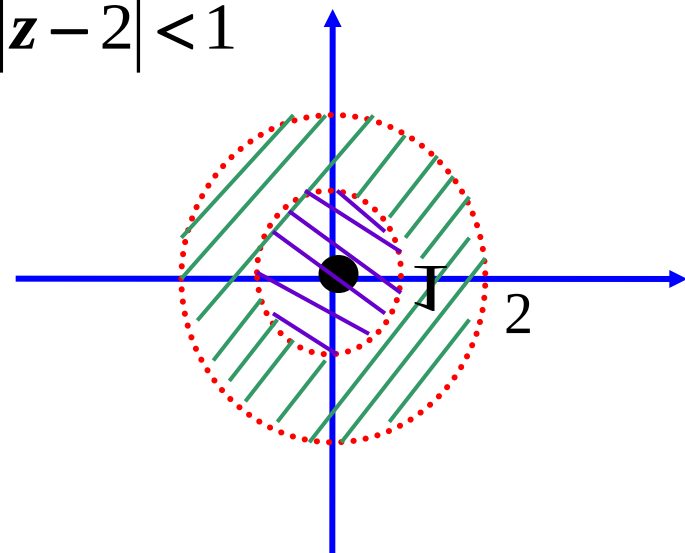
$$(1) \quad 0 < |z| < 1 \quad (2) \quad 1 < |z| < 2$$

$$(3) \quad 2 < |z| < +\infty \quad (4) \quad 0 < |z-1| < 1$$

$$(5) \quad 1 < |z-1| < +\infty \quad (6) \quad 0 < |z-2| < 1$$

$$(7) \quad 1 < |z-2| < +\infty$$

内展开为洛朗级数.





例：将  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  在圆环域

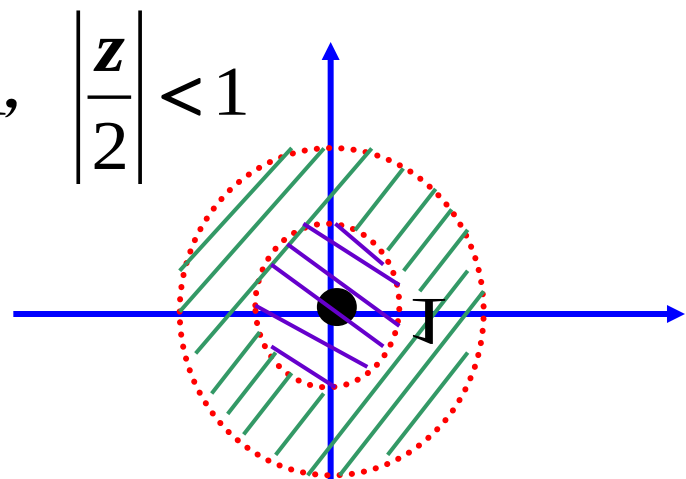
$$(1) \ 0 < |z| < 1 \quad (2) \ 1 < |z| < 2$$

内展开为洛朗级数.

**解**  $f(z) \stackrel{\text{分解}}{=} \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}$ , 奇点为  $z=1$  及  $z=2$

(1)  $\because f(z)$  在  $0 < |z| < 1$  内解析,  $|z| < 1, \left| \frac{z}{2} \right| < 1$

$$\therefore f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

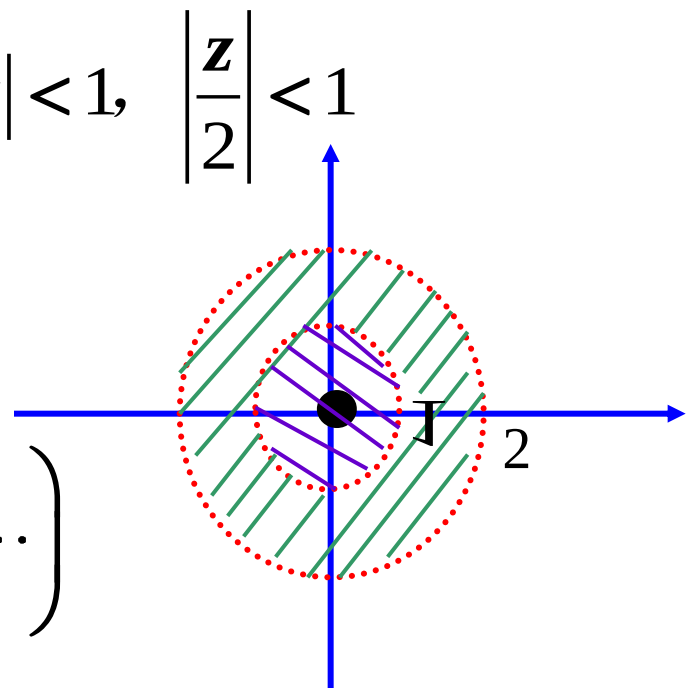




**解**  $f(z) \stackrel{\text{分解}}{=} \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}$ , 奇点为  $z=1$  及  $z=2$

(1)  $\because f(z)$  在  $0 < |z| < 1$  内解析,  $|z| < 1, \left| \frac{z}{2} \right| < 1$

$$\begin{aligned} \therefore f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\ &= \left( 1 + z + z^2 + \cdots \right) - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z + \frac{7}{8}z^2 + \cdots \quad (0 < |z| < 1) \end{aligned}$$



不含负幂项, 是因为  $f(z)$  在  $z=0$  解析.



例：将  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  在圆环域

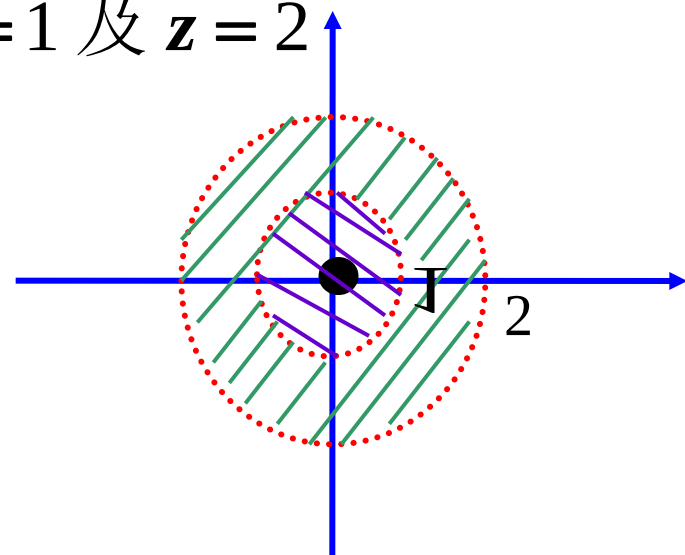
$$(1) \ 0 < |z| < 1 \quad (2) \ 1 < |z| < 2$$

内展开为洛朗级数.

解  $f(z) \stackrel{\text{分解}}{=} \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}$ , 奇点为  $z=1$  及  $z=2$

$$(2) 1 < |z| < 2 \quad \because |z| > 1 \quad \therefore \left| \frac{1}{z} \right| < 1$$

$$\text{又 } \because |z| < 2 \quad \therefore \left| \frac{z}{2} \right| < 1$$





$$(2) 1 < |z| < 2 \quad \because |z| > 1 \quad \therefore \left| \frac{1}{z} \right| < 1 \quad \text{又} \because |z| < 2 \quad \therefore \left| \frac{z}{2} \right| < 1$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\ &= -\frac{1}{z} \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots \right) - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \cdots \right) \\ &= \cdots - \frac{1}{z^n} - \frac{1}{z^{n-1}} - \cdots - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{8} - \cdots \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \end{aligned}$$



$$(3) 2 < |z| < +\infty \Rightarrow \because |z| > 2 \quad \therefore \left| \frac{2}{z} \right| < 1$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} \\ &= -\frac{1}{z} \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots \right) + \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{7}{z^4} + \cdots \end{aligned}$$

**注** 三个展式均是在以 $z=0$ 为心的环域内的展开式，  
且三个环域覆盖了除两个圆的整个复平面。



**注意：**本例中圆环域的中心  $z = 0$  是各负幂项的

奇点但却不是函数  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  的奇点.

**说明：**

1. 函数  $f(z)$  在以  $z_0$  为中心的圆环域内的洛朗级数中尽管含有  $z - z_0$  的负幂项, 而且  $z_0$  又是这些项的奇点, 但是  $z_0$  可能是函数  $f(z)$  的奇点, 也可能不是  $f(z)$  的奇点.





2. 给定了函数  $f(z)$  与复平面内的一点  $z_0$  以后, 函数在各个不同的圆环域中有不同的洛朗展开式 (包括泰勒展开式作为它的特例).

问题: 这与洛朗展开式的唯一性是否相矛盾?

回答: 不矛盾.

(**唯一性**: 指函数在某一个给定的圆环域内的洛朗展开式是唯一的)



(4)  $\because f(z)$  在  $0 < |z-1| < 1$  解析,  $|z-1| < 1$

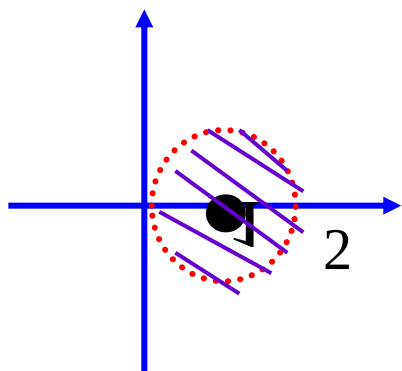
$$f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z-2}$$

$$\therefore f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1-(z-1)}$$

$$= -\frac{1}{z-1} \left[ 1 + (z-1) + (z-1)^2 + \dots \right]$$

$$= -\frac{1}{z-1} - 1 - (z-1) - (z-1)^2 - \dots$$

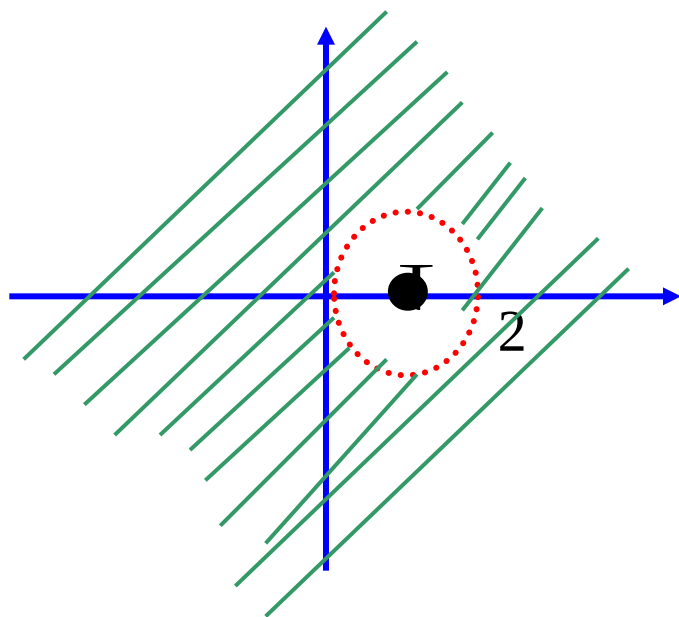
$$(0 < |z-1| < 1)$$





(5)  $\because f(z)$  在  $1 < |z-1| < +\infty$  解析,  $\therefore \left| \frac{1}{z-1} \right| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z-2} \quad \text{从而} \quad f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}}$$



$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(z-1)^2} \left[ 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \cdots \right] \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{(z-1)^4} + \cdots \end{aligned}$$

$$(0 < |z-1| < +\infty)$$



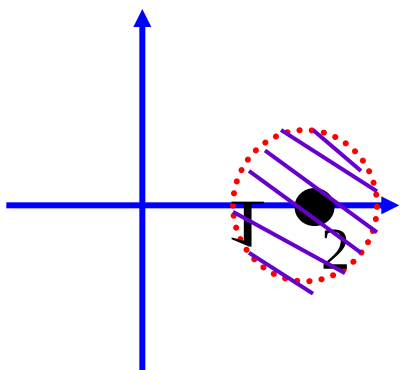
(6) 在  $0 < |z - 2| < 1$  内  $f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z-2}$

$$f(z) = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{1+(z-2)}$$

$$= \frac{1}{z-2} \cdot \left[ 1 - (z-2) + (z-2)^2 - \dots \right]$$

$$= \frac{1}{z-2} - 1 + (z-2) - (z-2)^2 + \dots$$

$$(0 < |z-2| < 1)$$





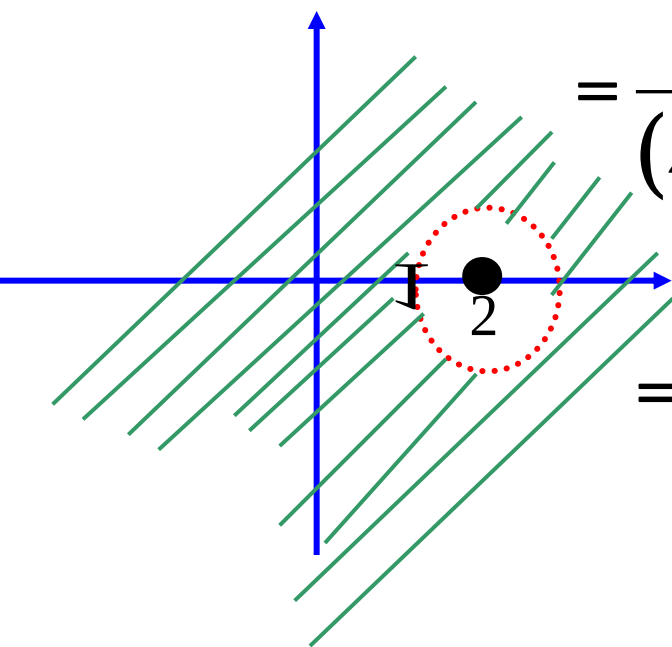
(7) 在  $1 < |z - 2| < +\infty$  内,  $\left| \frac{1}{z - 2} \right| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z-2} \quad f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z-2}}$$

$$= \frac{1}{(z-2)^2} \left[ 1 - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{(z-2)^3} + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{(z-2)^3} + \frac{1}{(z-2)^4} - \dots$$

$$(1 < |z - 2| < +\infty)$$





例 将函数  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$  在  $z=i$  处展开为洛朗级数。

解 (1) 将复平面分为若干个解析环

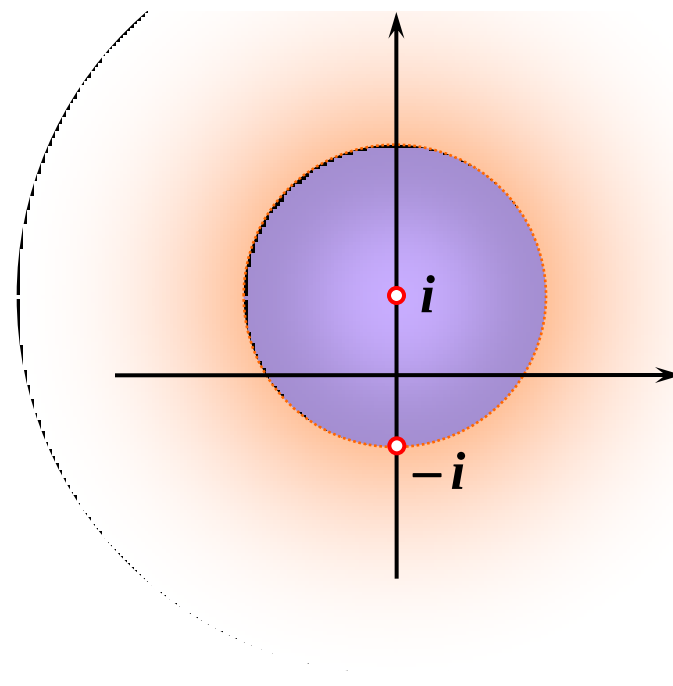
$$\text{函数 } f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)},$$

有两个奇点:  $z = \pm i$ ,

以展开点  $z=i$  为中心,

将复平面分为两个解析环:

$$\textcircled{1} \quad 0 < |z-i| < 2; \quad \textcircled{2} \quad 2 < |z-i| < +\infty.$$



注意: 不需要将函数进行部分分式分解。



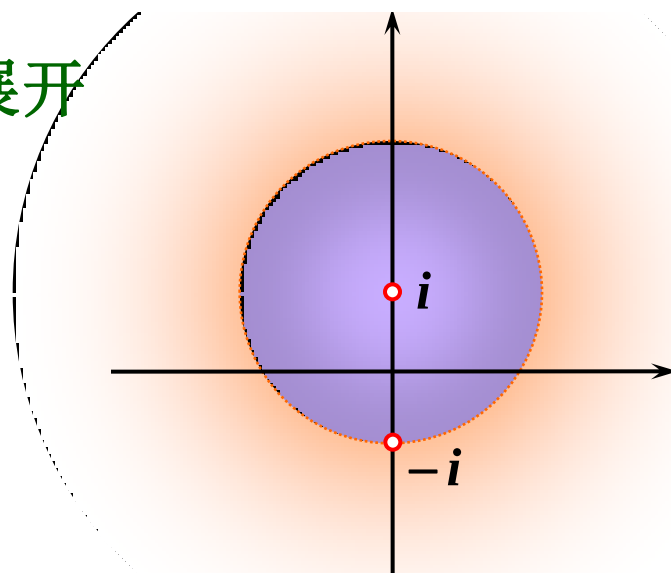
例 将函数  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$  在  $z=i$  处展开为洛朗级数。

解 (2) 将函数在每个解析环内分别展开

① 当  $0 < |z-i| < 2$  时,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{(z-i)+2i} \\ &= \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{\frac{z-i}{2i} + 1} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^n}{(2i)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}} (z-i)^{n-1}.$$





例 将函数  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$  在  $z=i$  处展开为洛朗级数。

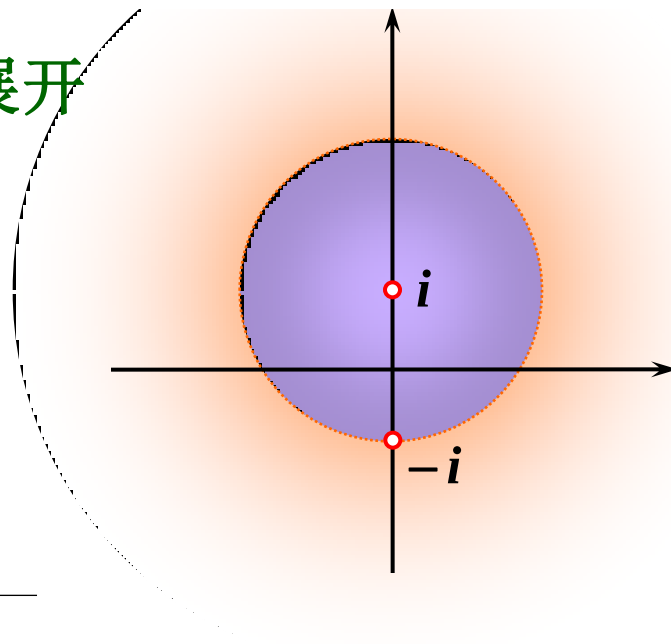
解 (2) 将函数在每个解析环内分别展开

② 当  $2 < |z-i| < +\infty$  时,

$$f(z) = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{(z-i)+2i}$$

$$= \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{1+\frac{2i}{z-i}}$$

$$= \frac{1}{(z-i)^2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2i)^n}{(z-i)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2i)^n}{(z-i)^{n+2}}.$$



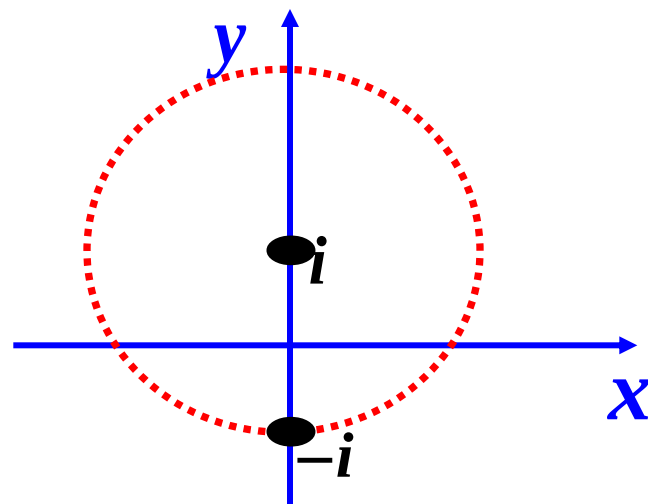




例4 求  $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$  在  $z = i$  的去心邻域(或环形区域)

内的罗朗展开.

**解**  $f(z)$  的奇点为  $z = i, z = -i$



$\therefore f(z)$  在  $i$  点的去心解析邻域为  $0 < |z - i| < 2$

$$\begin{aligned} \text{故 } f(z) &= \frac{1}{(z-i)^2} \cdot \frac{1}{(z+i)^2} = \frac{1}{(z-i)^2} \cdot \left( \frac{-1}{z+i} \right)' \\ &= -\frac{1}{(z-i)^2} \cdot \left[ \frac{1}{2i + (z-i)} \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{-1}{2i \cdot (z-i)^2} \left( \frac{1}{1 + \frac{z-i}{2i}} \right)' = \frac{-1}{2i(z-i)^2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^n} (z-i)^n \right]' \\
 &= \frac{-1}{2i \cdot (z-i)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2i)^n} (z-i)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(2i)^{n+1}} (z-i)^{n-3} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+1)}{(2i)^{n+2}} (z-i)^{n-2} \\
 &\quad (0 < |z-i| < 2)
 \end{aligned}$$

**注**  $f(z)$  以  $i$  为心的环形邻域还有  $2 < |z-i| < +\infty$ .



例 将函数  $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2(2-z)}$  在  $z=1$  处展开为洛朗级数。

解 (1) 将复平面分为若干个解析环

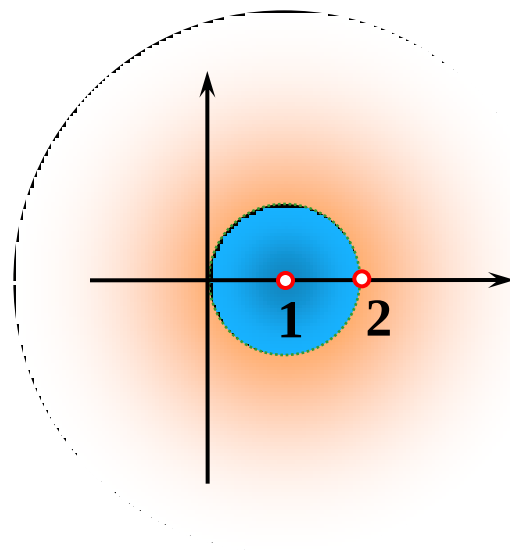
函数  $f(z)$  有两个奇点:  $z=1$ ,  $z=2$ ,

以展开点  $z=1$  为中心,

将复平面分为两个解析环:

①  $0 < |z-1| < 1;$

②  $1 < |z-1| < +\infty.$



注意: 不需要将函数进行部分分式分解。



例 将函数  $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2(2-z)}$  在  $z=1$  处展开为洛朗级数。

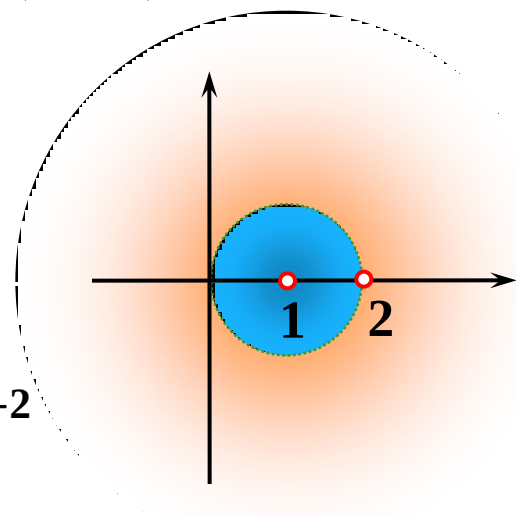
解 (2) 将函数在每个解析环内分别展开

$$f(z) = \frac{z-1+1}{(z-1)^2} \cdot \frac{1}{2-z} = \left( \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} \right) \cdot \frac{1}{1-(z-1)}.$$

① 当  $0 < |z-1| < 1$  时,

$$\frac{1}{1-(z-1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z-1)^n,$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (z-1)^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (z-1)^{n-2} \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (z-1)^{n-1}. \end{aligned}$$





例 将函数  $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2(2-z)}$  在  $z=1$  处展开为洛朗级数。

解 (2) 将函数在每个解析环内分别展开

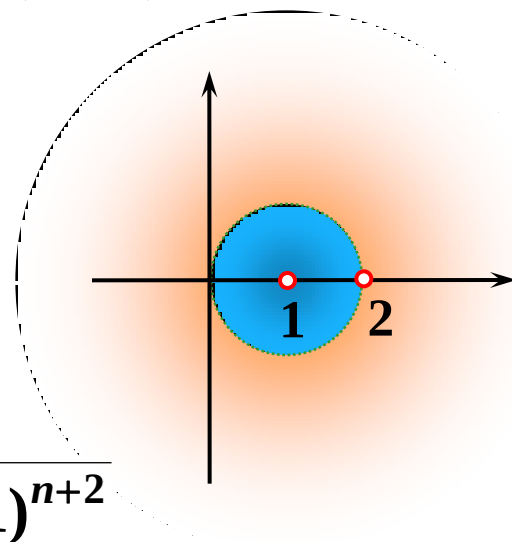
$$f(z) = \frac{z-1+1}{(z-1)^2} \cdot \frac{1}{2-z} = \left( \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} \right) \cdot \frac{1}{1-(z-1)}.$$

② 当  $1 < |z-1| < +\infty$  时,

$$\frac{1}{1-(z-1)} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^n},$$

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+2}}$$

$$= -\frac{1}{(z-1)^2} - 2\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^n}.$$





**例** 把函数  $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$  在  $0 < |z| < +\infty$  内展开成洛朗级数。

**解** 
$$z^3 e^{\frac{1}{z}} = z^3 \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \cdots \right)$$
$$= z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!z} + \cdots, \quad 0 < |z| < +\infty.$$

**例** 把函数  $\frac{1}{z^2} e^z$  在  $0 < |z| < +\infty$  内展开成洛朗级数。

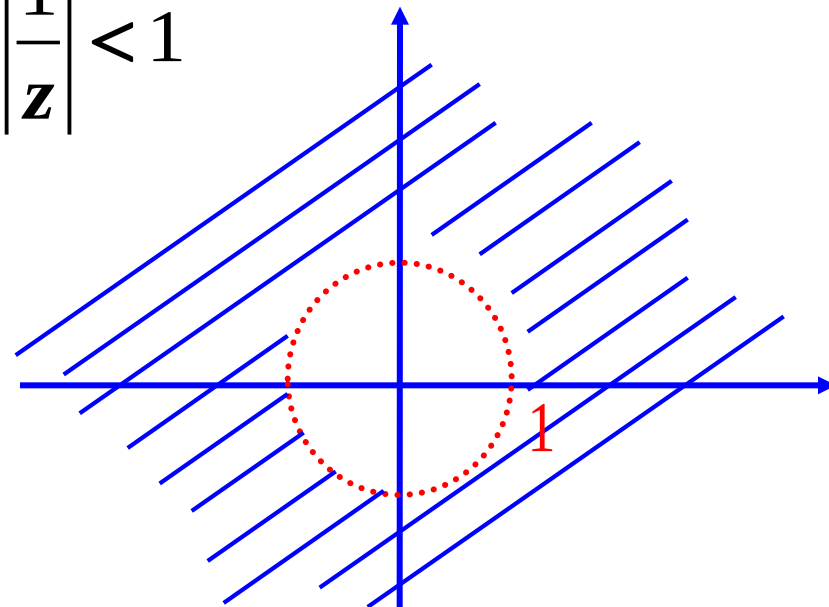
**解** 
$$\frac{1}{z^2} e^z = \frac{1}{z^2} \left( 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \right)$$
$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} z + \frac{1}{4!} z^2 + \cdots, \quad 0 < |z| < +\infty.$$



例5 将  $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$  在  $1 < |z| < +\infty$  内洛朗展开.

解  $\because 1 < |z| < +\infty \quad \therefore \left| \frac{1}{z} \right| < 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \frac{-1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\ &= -\frac{1}{z} \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots \right) \\ &= -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \cdots \end{aligned}$$





$$\therefore e^{\frac{1}{1-z}} = 1 + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2!} \left( \frac{1}{1-z} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{1}{1-z} \right)^3 + \dots$$

$$= 1 + \left( -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots \right) + \frac{1}{2!} \left( -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots \right)^2$$

$$+ \frac{1}{3!} \left( -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots \right)^3 + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} - \dots \quad 1 < |z| < +\infty$$

**注** 此法只可写出前有限项，而不易写出通项。



四.  $L$ —系数在计算封闭曲线积分中的应用

设  $f(z)$  在环形域  $H: R_1 < |z - z_0| < R_2$  内解析

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \text{则} \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz,$$

其中  $C$  为  $H$  内绕  $z_0$  的任何一条正向简单闭曲线,

$c_{-1}$  为  $L$ —系数.

$$\therefore \oint_C f(z) dz = 2\pi i c_{-1}$$



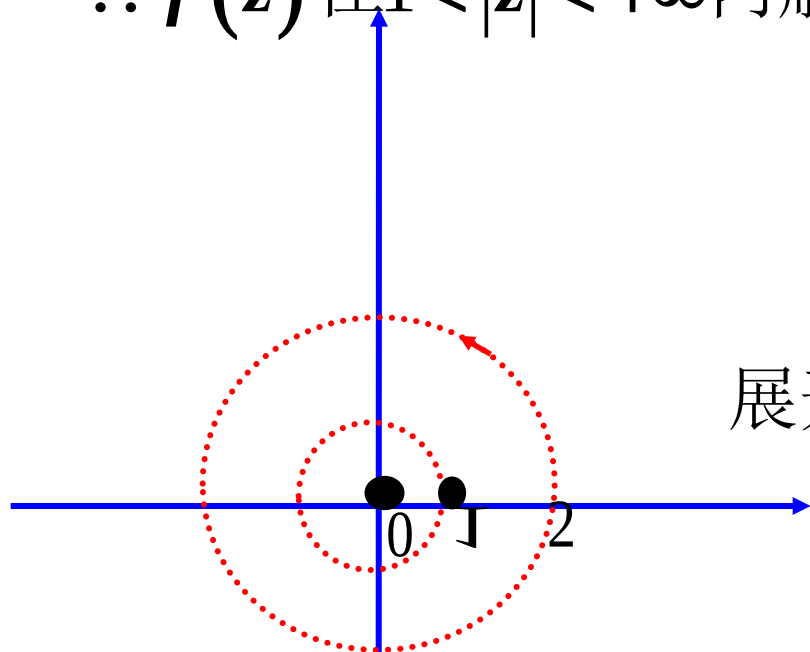
例6 计算  $\oint_{|z|=2} \frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z} dz$ .

**解**  $f(z) = \frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z}$  有两个奇点  $z=0$  及  $z=1$

$\therefore f(z)$  在  $1 < |z| < +\infty$  内解析, 而  $|z|=2$  在环域内

$$\therefore \oint_C f(z) dz = 2\pi i c_{-1}$$

展开  $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{-\left(1 - \frac{1}{z}\right)} = -\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \cdot e^{\frac{1}{z}}$





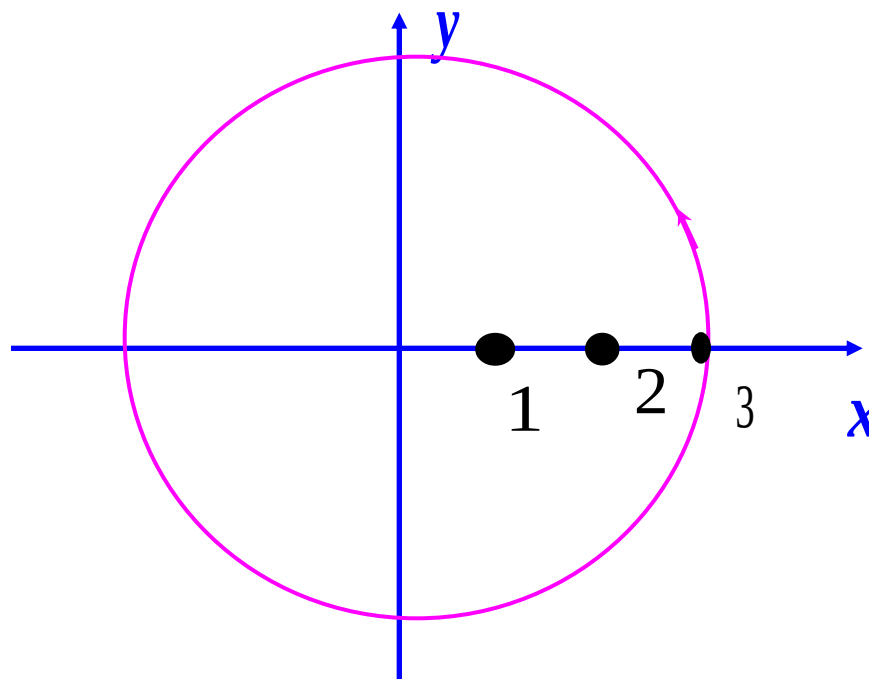
$$\begin{aligned}\text{展开 } f(z) &= \frac{e^{\frac{1}{z}}}{-\left(1 - \frac{1}{z}\right)} = -\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \cdot e^{\frac{1}{z}} \\ &= -\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right) \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} + \cdots\right) \\ &= -\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{5}{2z^2} + \cdots\right)\end{aligned}$$

$$\therefore c_{-1} = -2, \quad \text{故 原积分} = 2\pi i c_{-1} = -4\pi i$$



例7 计算  $\oint_{|z|=3} \frac{1}{(z-1)(z-2)} dz.$

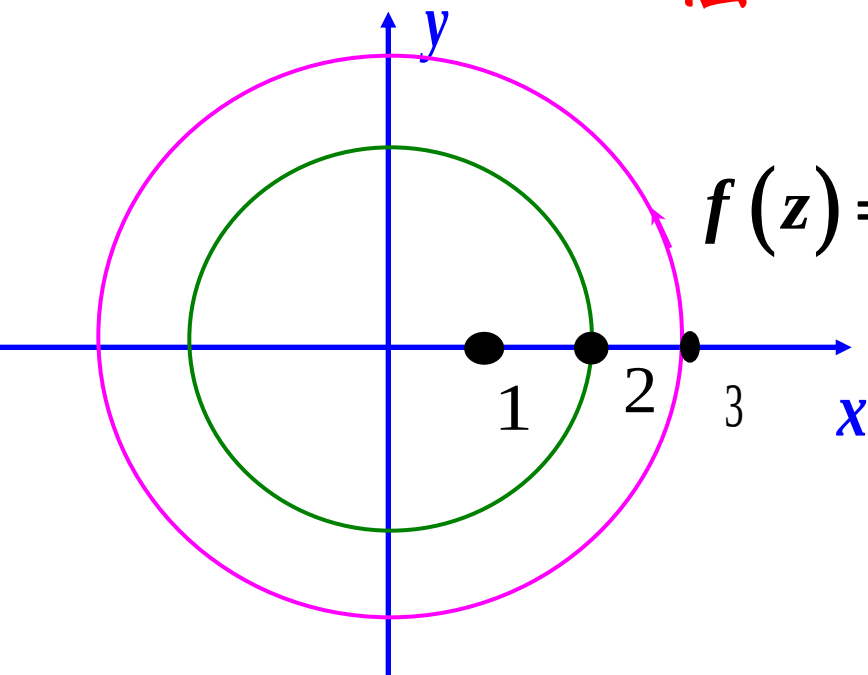
**解**  $f(z)$  的奇点为  $z=1$  及  $z=2$





例7 计算  $\oint_{|z|=3} \frac{1}{(z-1)(z-2)} dz$ .

法一  $f(z)$  在  $2 < |z| < +\infty$  内  $L$ —展开



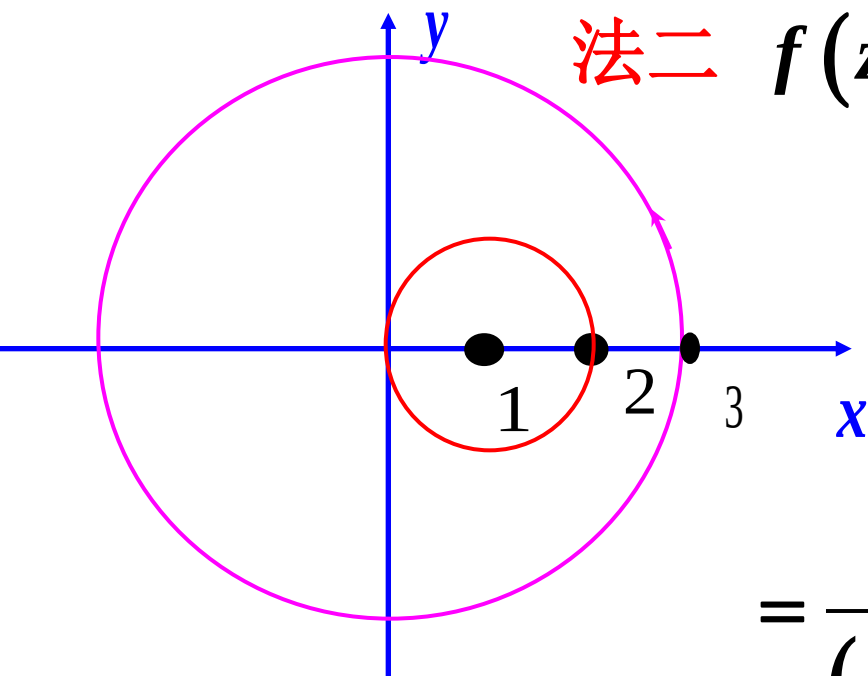
$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \cdots \end{aligned}$$

$\therefore c_{-1} = 0$ , 故 原式  $= 0$ .



例7 计算  $\oint_{|z|=3} \frac{1}{(z-1)(z-2)} dz$ .

法二  $f(z)$  在  $1 < |z-1| < +\infty$  内  $L$ —展开



$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}}$$

$$= \frac{1}{(z-1)^2} \left( 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \cdots \right)$$

$\therefore c_{-1} = 0$ , 故 原式  $= 0$ .



## 四、小结与思考

在这节课中，我们学习了洛朗展开定理和函数展开成洛朗级数的方法。将函数展开成洛朗级数是本节的重点和难点。



## 思考题

洛朗级数与泰勒级数有何关系?





## 思考题答案

是一般与特殊的关系.

洛朗级数是一个双边幂级数, 其解析部分是一个普通幂级数;

洛朗级数的收敛区域是圆环域  $r < |z - z_0| < R$ .

当  $z_0 = 0, r = 0, c_{-n} = 0$  时,

洛朗级数就退化为泰勒级数了.



# 作业： 19



西安电子科技大学  
XIDIAN UNIVERSITY

**The End.**

