



西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

场论与复变函数



通信工程学院

场论与复变函数教学团队



第一节 复变函数积分的概念

第二节 柯西-古萨基本定理 (Cauchy-Goursat)

第三节 基本定理 (C-G) 的推广—复合闭路定理

第四节 原函数与不定积分

第五节 柯西积分公式

第六节 解析函数的高阶导数公式

第七节 解析函数与调和函数的关系



复变函数积分

第一节

1. 积分的定义

2. 积分存在的条件及其算法

3. 积分的性质



1. 积分的定义

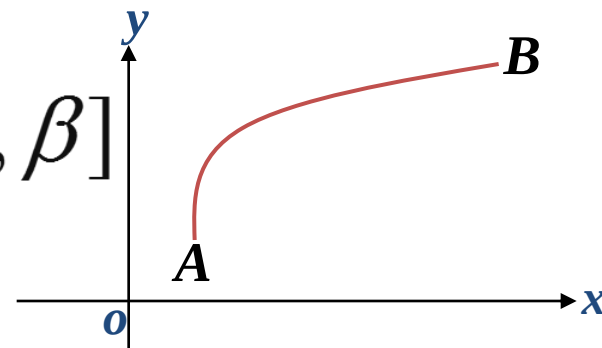
有向曲线:

设 C 为平面上给定的一条光滑(或按段光滑)曲线, 如果选定 C 的两个可能方向中的一个作为正方向(或正向), 那么称 C 为有向曲线. (C^-)

$$C: z(t) = x(t) + iy(t), t \in [\alpha, \beta]$$

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0, t \in [\alpha, \beta]$$

$z(t)$ 是一一的





1. 积分的定义

1. 定义 设 $w = f(z)$ 在区域 D 内有定义, C 为 D 内一条光滑的有向曲线 (如图)

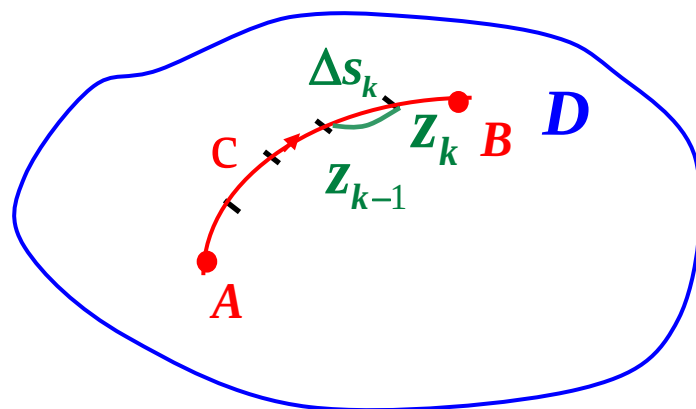
(1) 分割: $\forall$ 分割 AB 为 $z_{k-1}z_k$ ($k = 1 \cdots n$)

(2) 作和: $\forall \zeta_k \in z_{k-1}z_k$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)\Delta z_k \end{aligned}$$

其中 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$

记 ΔS_k 为 $z_{k-1}z_k$ 的长度, $\delta = \max_{1 \leq k \leq n} \{\Delta S_k\}$





1. 积分的定义

(3) 取极限: $\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n f(\zeta) \Delta z_k$

若极限存在, 则极限值称为 $w = f(z)$ 沿 C 的积分,

记作 $\int_C f(z) dz = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta) \Delta z_k$

注: 1° 若 C 封闭, 记为 $\oint_C f(z) dz$, 其中 C 表示正向, 反向为 C^- .

2° 当 C 是 x 轴上的线段, $a \leq x \leq b$, 且 $f(z) = u(x)$,

$$\text{则 } \int_C f(z) dz = \int_a^b u(x) dx$$



复积分与实变函数的定积分有类似的性质.

$$1^\circ \int_C [k_1 f(z) + k_2 g(z)] dz = k_1 \int_C f(z) dz + k_2 \int_C g(z) dz$$

$$2^\circ \int_C f(z) dz = -\int_{C^-} f(z) dz$$

$$3^\circ \text{ 设 } C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n,$$

$$\text{则 } \int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \cdots + \int_{C_n} f(z) dz$$



2. 积分的性质

$$(4) \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| = \int_C |f(z)| ds \leq ML,$$

其中, $M = \max_{z \in C} |f(z)|$,

L为曲线C的弧长。

第一类曲线积分

证明

$$\because \left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| |\Delta z_k| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| \Delta s_k$$

$$\text{取极限得: } \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| ds \leq M \int_C ds = ML$$



2. 积分的性质

例1. 设 C 沿直线从 $0 \rightarrow 3+4i$, 求 $\left| \int_C \frac{dz}{z-i} \right|$ 的一个上界。

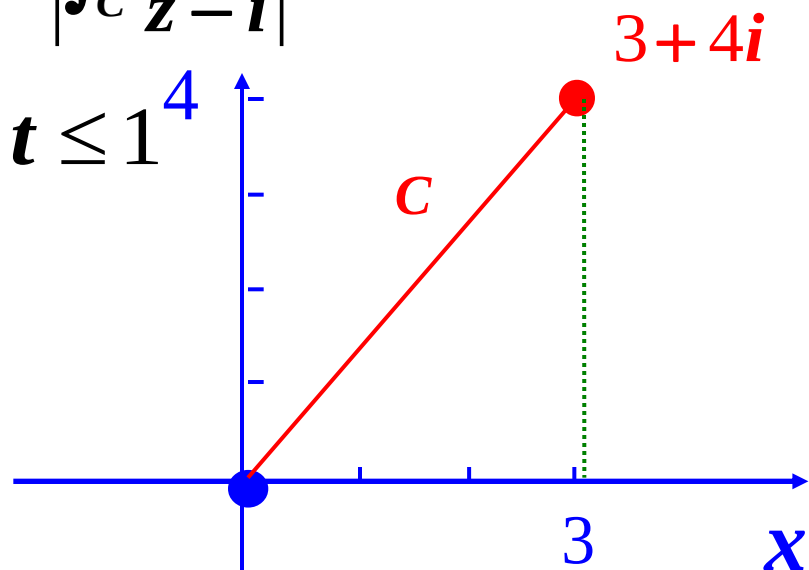
解 $C: z = 3t + i4t \quad 0 \leq t \leq 1$

$$\text{则} \left| \int_C \frac{1}{z-i} dz \right| \leq \int_C \left| \frac{1}{z-i} \right| ds$$

而在 C 上:

$$\left| \frac{1}{z-i} \right| = \frac{1}{|3t + (4t-1)i|} = \frac{1}{\sqrt{25\left(t - \frac{4}{25}\right)^2 + \frac{9}{25}}} \leq \frac{5}{3}$$

$$\text{又} \int_C ds = 5 \quad \therefore \left| \int_C \frac{dz}{z-i} \right| \leq \frac{5}{3} \times 5 = \frac{25}{3}$$





定理1. 积分存在性定理:

如果 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在按段光滑曲线 C 上连续, 则积分 $\int_C f(z)dz$ 一定存在。

证: 设光滑曲线 C 由参数方程给出

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

并且 $z'(t) \neq 0, \quad t \in (\alpha, \beta),$

设 $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k,$



$$\begin{aligned}\text{因为 } \Delta z_k &= z_k - z_{k-1} = x_k + iy_k - (x_{k-1} + iy_{k-1}) \\ &= \Delta x_k + i\Delta y_k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{所以 } \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \cdot \Delta z_k &= \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k) \\ &= \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] \\ &\quad + i \sum_{k=1}^n [v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k]\end{aligned}$$



由于 $f(z)$ 在曲线 C 上连续



u, v 连续

根据线积分的存在定理,下式两端极限存在:

$$\sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k = \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] + i \sum_{k=1}^n [v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k]$$
$$\underline{\int_C f(z) dz} = \underline{\int_C u dx - v dy} + i \underline{\int_C v dx + u dy}$$



注：公式 $\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i \int_C vdx + udy$

在形式上可以看成是：

$f(z) = u + iv$ 与 $dz = dx + idy$ 相乘后求积分得到：

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_C (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int_C udx + ivdx + iudy - vdy \\ &= \int_C udx - vdy + i \int_C vdx + udy.\end{aligned}$$



分析: $\int_C f(z)dz$ 可以通过两个二元实函数
的线积分参数化计算方法计算复积分

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_{\alpha}^{\beta} \{u[x(t), y(t)]x'(t) - v[x(t), y(t)]y'(t)\}dt \\ &\quad + i \int_{\alpha}^{\beta} \{v[x(t), y(t)]x'(t) + u[x(t), y(t)]y'(t)\}dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]\} \{x'(t) + iy'(t)\}dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]z'(t)dt.\end{aligned}$$



参数化计算复积分:

$$\int_C f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]z'(t)dt, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

$$C: z=z(t)$$

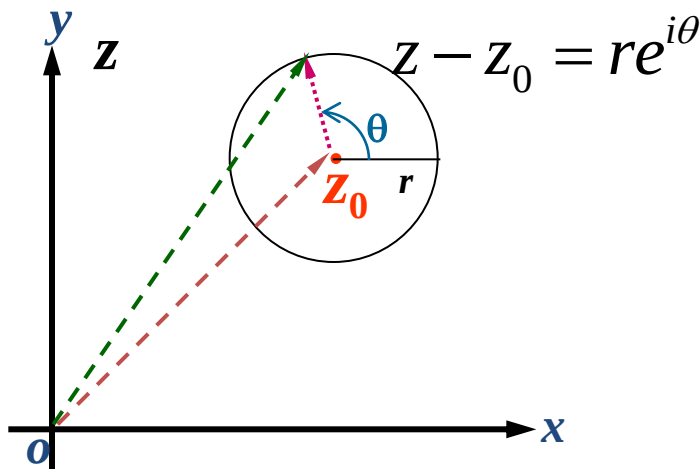


例2 求 $\oint_C \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} dz$, C 为以 z_0 为中心, r 为半

径的正向圆周, n 为整数.

解 积分路径的参数方程为

$$z = z_0 + re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi),$$



$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} d\theta \\ &= \frac{i}{r^n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta, \end{aligned}$$



当 $n = 0$ 时,

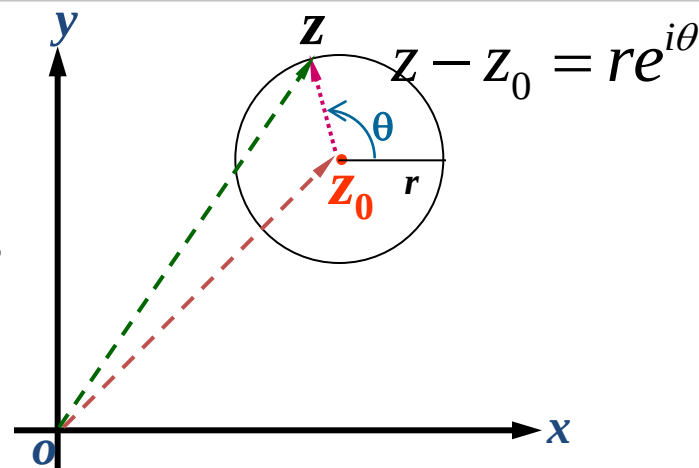
$$\oint_C \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} dz = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i;$$

当 $n \neq 0$ 时,

$$\oint_C \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{i}{r^n} \int_0^{2\pi} (\cos n\theta - i \sin n\theta) d\theta = 0;$$

所以

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$



重要结论： 积分值与路径圆周的中心和半径无关.



例3 计算 $I = \int_C \bar{z} dz$, 其中 C 为: (1) $C = C_1 + C_2$; (2) $C = C_3$.

解 (1) 曲线 C_1 的方程为 $z = x$, $x: 0 \rightarrow 1$,

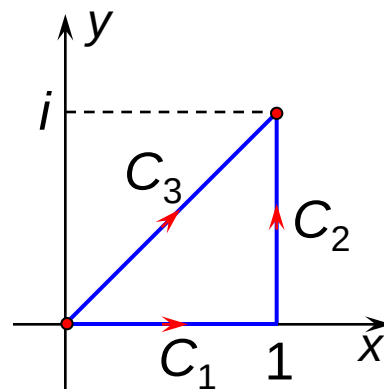
曲线 C_2 的方程为 $z = 1 + iy$, $y: 0 \rightarrow 1$,

$$I = \int_{C_1} \bar{z} dz + \int_{C_2} \bar{z} dz,$$

$$= \int_0^1 x dx + \int_0^1 (1 - iy) d(1 + iy)$$

$$= \int_0^1 x dx + \int_0^1 i(1 - iy) dy$$

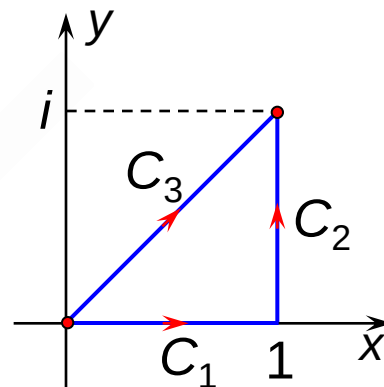
$$= \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 + \left(iy + \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^1 = 1 + i.$$





解 (2) 曲线 C_3 的方程为 $z = t + it$, $t: 0 \rightarrow 1$,

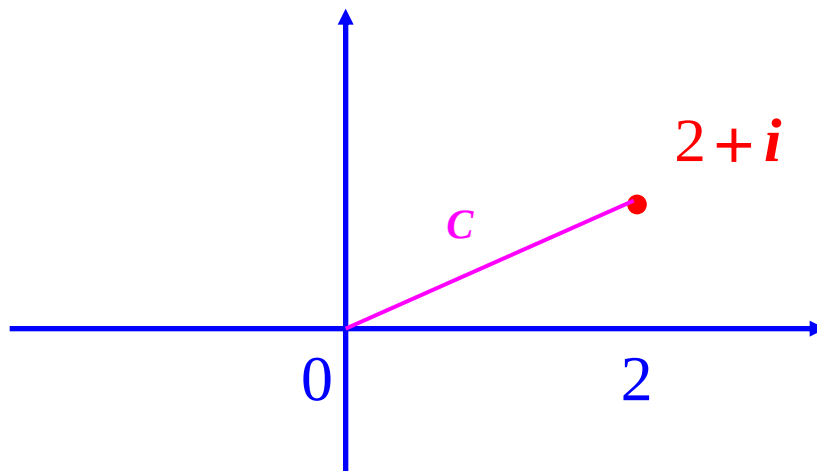
$$\begin{aligned} I &= \int_{C_3} \bar{z} dz \\ &= \int_0^1 (t - it) d(t + it) \\ &= (1 - i)(1 + i) \int_0^1 t dt \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^1 = 1. \end{aligned}$$





例 4. 计算 $\int_C z^2 dz$, 其中 C : (1) 沿直线从 $0 \rightarrow 2+i$;
(2) 沿折线从 $0 \rightarrow 2 \rightarrow 2+i$;

解: (1) $C: z = 2t + it = (2+i)t, (0 \leq t \leq 1)$



$$\therefore \int_C z^2 dz = \int_0^1 (2+i)^2 t^2 (2+i) dt = \frac{(2+i)^3}{3} = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i$$



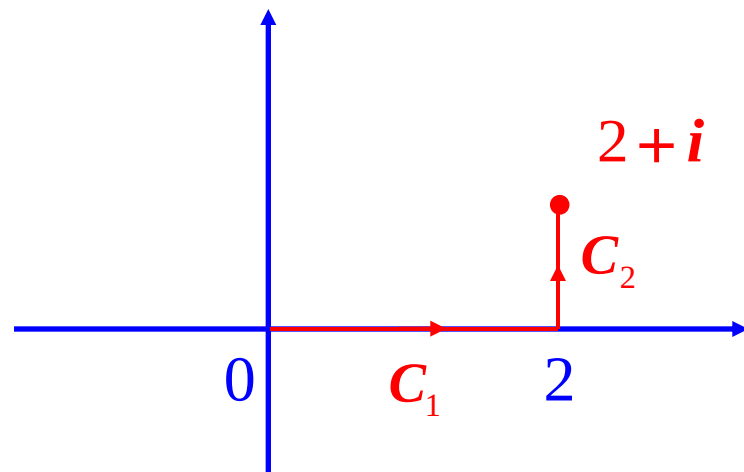
$$(2) C_1: z = 2t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$\therefore \int_{C_1} z^2 dz = \int_0^1 4t^2 \cdot 2dt = \frac{8}{3}$$

$$C_2: z = 2 + it \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$\therefore \int_{C_2} z^2 dz = \int_0^1 (2 + it)^2 \cdot i dt = -2 + \frac{11}{3}i$$

$$\therefore \int_C z^2 dz = \int_{C_1} z^2 dz + \int_{C_2} z^2 dz = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i$$





结果 沿两个不同路线积分相等，不是偶然的。

事实上：

$$\begin{aligned}\int_C z^2 dz &= \int_C (x^2 - y^2) dx - 2xy dy \\ &\quad + i \int_C 2xy dx + (x^2 - y^2) dy\end{aligned}$$

公式右边两个积分均与路径无关，

$\therefore \int_C z^2 dz$ 也与路径无关



3.2 柯西-古萨基本定理

由前边例子我们看到, $\int_C z^2 dz$ 与积分路径无关

问: $f(z)$ 满足什么条件, $\int_C f(z) dz$ 与路径无关?

分析 首先 $\int f(z) dz$ 与路径无关 $\Leftrightarrow \oint_C f(z) dz = 0$

$$\text{而 } \oint_C f(z) dz = \oint_C u dx - v dy + i \oint_C v dx + u dy$$

$$\frac{\text{Green公式}}{(?)} - \iint_G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

C-R方程

0



要求 C 是单连通区域 B 内的简单闭曲线,

$u(x, y), v(x, y)$ 在 B 内有连续偏导,

且 $-v_x = u_y, u_x = v_y$ (**$C-R$ 方程**)

Cauchy 定理 若 $f(z)$ 是单连通区域 B 内的解析函数,

且 $f'(z)$ 连续, 则对 B 内的任一简单闭曲线 C

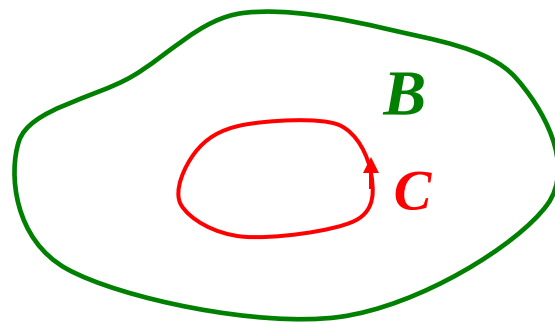
$$\oint_C f(z) dz = 0$$



柯西-古萨(Cauchy - Goursat)定理

设 $f(z)$ 是单连通区域 B 内的解析函数, 则对 B 内的任一简单闭曲线 C (可以不是简单的), 有

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

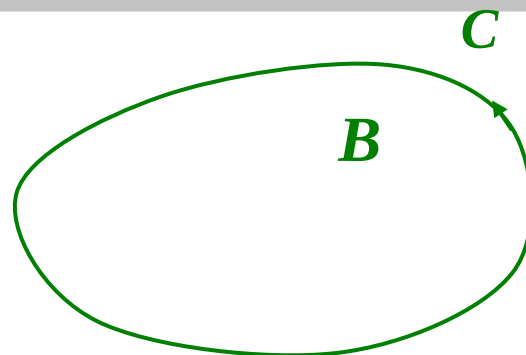


注: 这里不予以证明.



定理的推广

设 C 为区域 B 的边界,



1) 若 $f(z)$ 在 B 内及 C 上处处解析, 则

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

2) 若 $f(z)$ 在 B 内解析, 在 $\bar{B}$ 上连续, 则

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

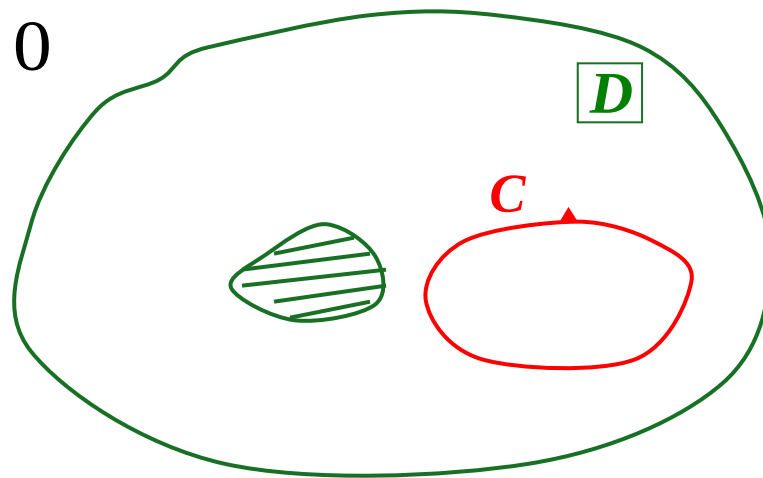


问题 若 D 是复连通区域，如何？

分析 设 $f(z)$ 在复连通区域 D 内解析

1° 若 C 是 D 内简单曲线，且 C 的内部含于 D ,

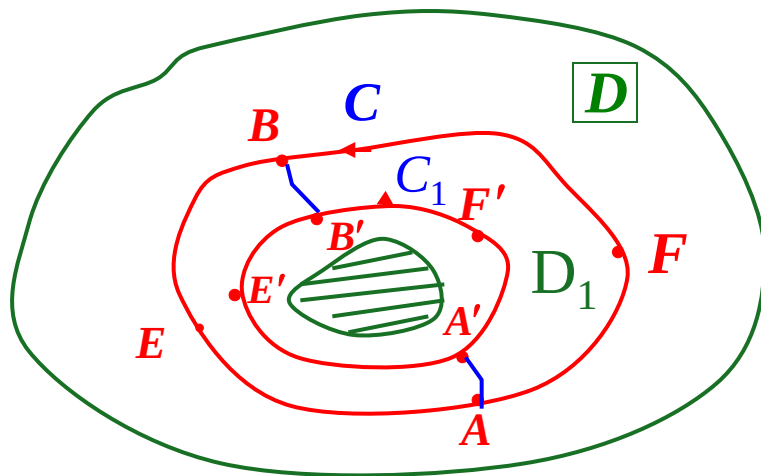
$$\text{则} \oint_C f(z) dz = 0$$





2° 若 C 是 D 内简单闭曲线, 且 C 的内部有不属于 D 的点, 又 C_1 含于 C 内, 且 C, C_1 围成的区域 D_1 全含于 D .

则 $\oint_{AFBB'F'A'} f(z)dz = 0, \int_{BEAA'E'B'} f(z)dz = 0$





相加得
$$\oint_C f(z)dz + \oint_{C_1^-} f(z)dz = 0 \quad - (1)$$

即
$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz \quad - (2) \text{ 闭路变形原理}$$

(外围线积分 = 内围线积分)

若记 $\Gamma = C + C_1^-$ 一称为复合闭路(或围线)

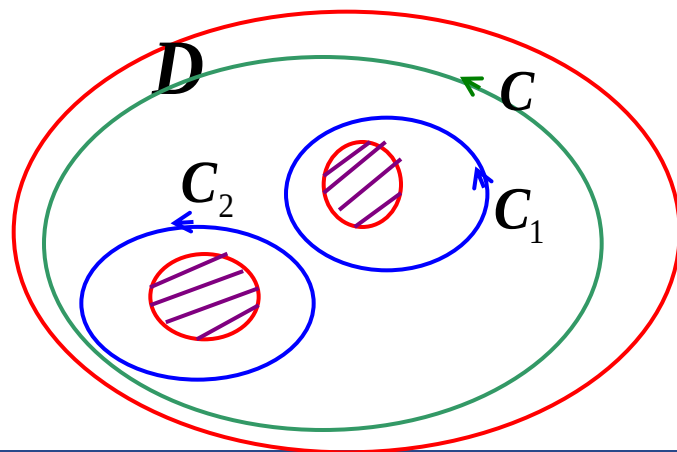
则(1)式为
$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$$



复合闭路定理 设 C 是复连通区域 D 内一条简单闭曲线, $C_1, C_2, \dots, C_n$ 是 C 内的简单闭曲线, 且互不包含也不相交, 并且以 $C_1, C_2, \dots, C_n, C$ 为边界的区域, D_1 全包含于 D , 若 $f(z)$ 在 D 内解析,

则 1)
$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz$$

2)
$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0, \quad \Gamma = C + C_1^- + \dots + C_n^- \text{ 复合闭路}$$





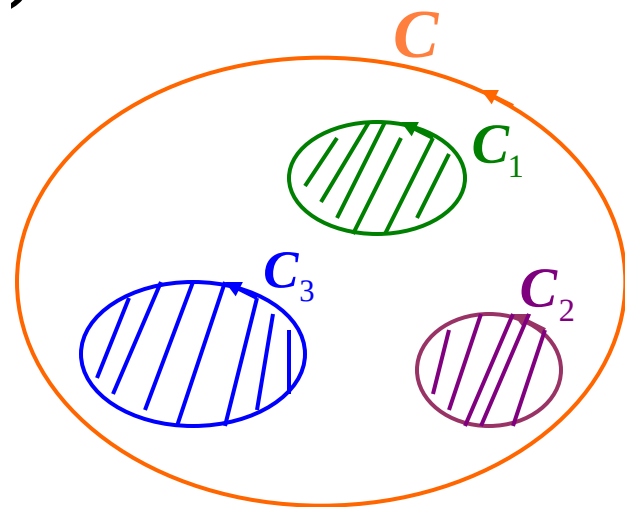
推广

设 D 的边界是复合回路 $\Gamma = C + C_1^- + \cdots + C_n^-$

又 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 上解析,

$$\text{则 } \oint_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{C+C_1^-+\cdots+C_n^-} f(z) dz = 0$$

$$\text{或 } \oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz$$



即外围线积分 = 内围线上积分之和

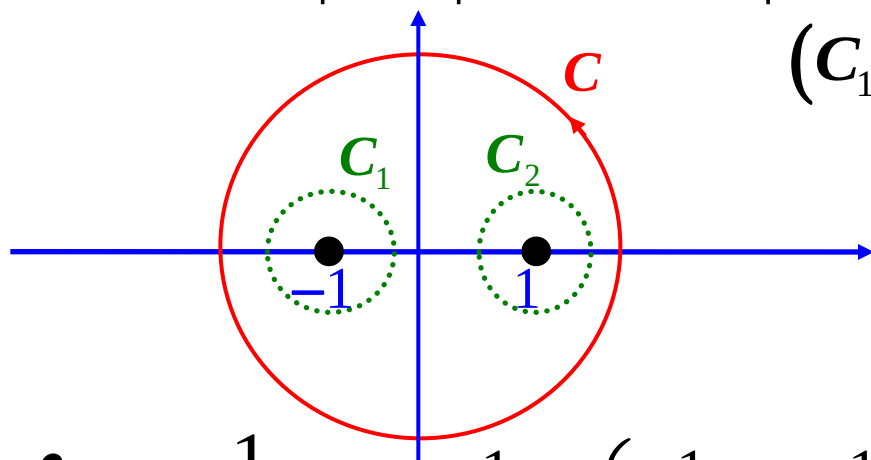


例1 求 $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2 - 1} dz$

解 $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right)$

作圆 $C_1 : |z+1| = \rho_1, C_2 : |z-1| = \rho_2$

(C_1, C_2 互不相交, 互不包含)



$$\begin{aligned} \text{则 } \oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2 - 1} dz &= \frac{1}{2} \oint_{C_1} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) dz + \frac{1}{2} \oint_{C_2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) dz \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 2\pi i + \frac{1}{2} \cdot 2\pi i = 0 \end{aligned}$$

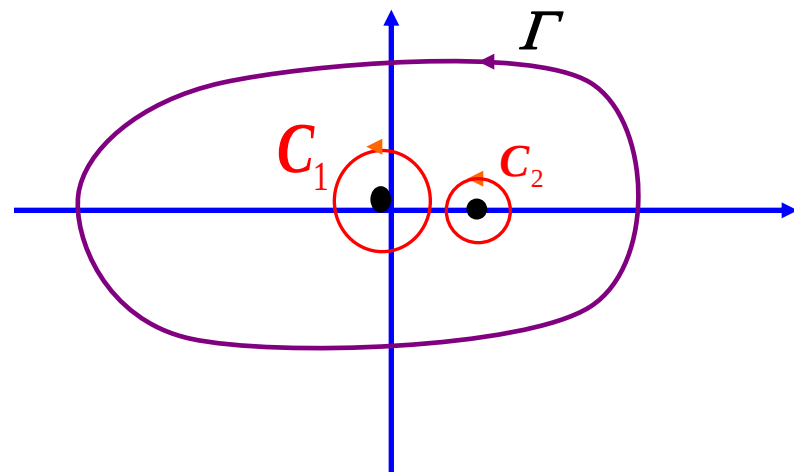


例2 求 $\oint_{\Gamma} \frac{2z-1}{z^2-z} dz$, Γ 是包含 $|z|=1$ 在内的任何正向

简单闭曲线.

解

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2z-1}{z^2-z} = \frac{2z-1}{z(z-1)} \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} \end{aligned}$$



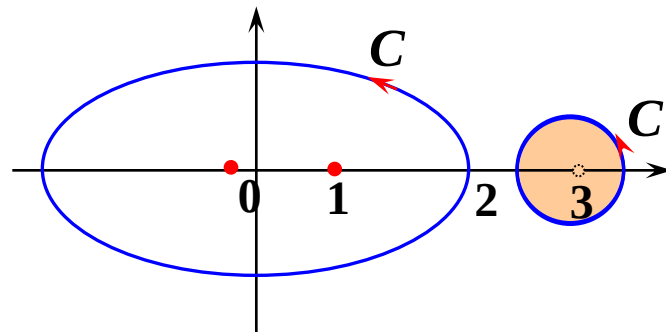
有两个奇点 $z=0$ 及 $z=1$ 均在 Γ 内

$$\begin{aligned} \text{则 } \oint_{\Gamma} \frac{2z-1}{z^2-z} dz &= \oint_{C_1} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} \right) dz + \oint_{C_2} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} \right) dz \\ &= 2\pi i + 0 + 0 + 2\pi i = 4\pi i \end{aligned}$$



例3 计算 $I = \oint_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz$, 其中 C 为:

(1) $|z-3| = \frac{1}{2}$; (2) $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1} = 1$.



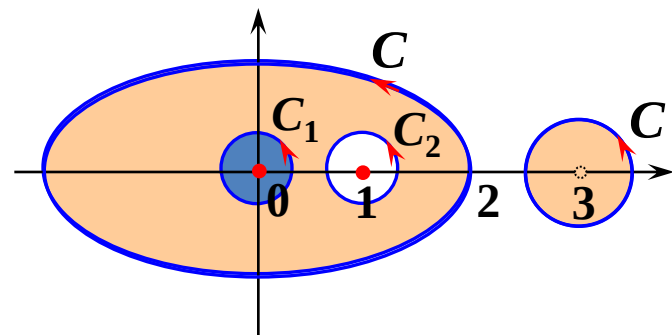
解 令 $f(z) = \frac{2z-1}{z^2-z}$, 则 $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$, 奇点为 $z=0, 1$.

(1) 当 C 为 $|z-3| = \frac{1}{2}$ 时, $I = \oint_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz = 0$.



例3 计算 $I = \oint_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz$, 其中 C 为:

(1) $|z-3| = \frac{1}{2}$; (2) $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1} = 1$.



解 令 $f(z) = \frac{2z-1}{z^2-z}$, 则 $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$, 奇点为 $z=0, 1$.

(2) 当 C 为 $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1} = 1$ 时, 令 $C_1: |z| = \frac{1}{3}$, $C_2: |z-1| = \frac{1}{3}$,

$$\begin{aligned} \text{则 } I &= \oint_{C_1} \frac{1}{z} dz + \oint_{C_1} \frac{1}{z-1} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z-1} dz \\ &= 2\pi i + 0 + 0 + 2\pi i = 4\pi i. \end{aligned}$$



3.4 原函数与不定积分

由C-G定理可以证明：

定理1 若 $f(z)$ 在单连通区域 B 内处处解析，

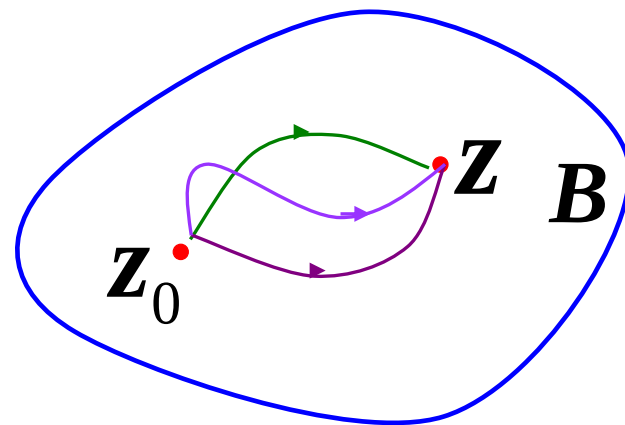
则 $\int_C f(z) dz$ 与连接起点及终点的路线 C 无关

(只与起点, 终点有关)

如图：

起点为定点 z_0 ，终点为定点 z ，

则 $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ — 变上限单值函数





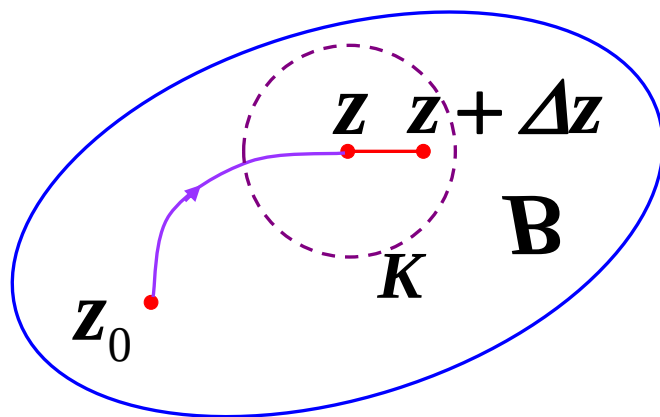
3.4 原函数与不定积分

定理2 若 $f(z)$ 在单连通区域 B 内处处解析,
则 $F(z)$ 也在 B 内解析, 并且 $F'(z) = f(z)$

分析 只要证: $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$

证明:

$$\forall z \in B,$$



以 z 为中心作小圆 K 包含于 B 内, 且 $z + \Delta z \in K$



3.4 原函数与不定积分

则
$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \left[\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \right]$$

$$= \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta$$

$$\therefore \left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\Delta z} \left[\int_z^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta - \int_z^{z+\Delta z} f(z) d\zeta \right] \right| = \frac{\left| \int_z^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta \right|}{|\Delta z|}$$

又 $f(z)$ 在 B 内解析,

故在 B 内连续 $\left(\lim_{\zeta \rightarrow z} f(\zeta) = f(z) \right)$



3.4 原函数与不定积分

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 (\delta < R)$, 当 $|\zeta - z| < \delta$ 时,

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$$

故

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \frac{\left| \int_z^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta \right|}{|\Delta z|}$$
$$\leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} |f(\zeta) - f(z)| ds \leq \frac{1}{|\Delta z|} \cdot \varepsilon \cdot |\Delta z| = \varepsilon$$

即 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z), \quad F'(z) = f(z)$



另一种证法

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$$

$$= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} u dx - v dy + i \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v dx + u dy$$

$$\stackrel{\Delta}{=} P(x, y) + iQ(x, y) \quad \text{由于 } f(z) \text{ 在 } B \text{ 内解析,}$$

所以积分 $\int u dx - v dy$ 及 $\int v dx + u dy$ 与路径无关。

$$\text{故 } dP(x, y) = u dx - v dy, \quad dQ(x, y) = v dx + u dy$$

$$\text{而 } P_x = u, \quad P_y = -v, \quad Q_x = v, \quad Q_y = u$$

$$\therefore P_x = Q_y, \quad P_y = -Q_x \quad \text{且连续}$$



3.4 原函数与不定积分

即 $F(z) = P + iQ$ 满足 $C - R$ 方程, 且 P, Q 有连续偏导

$$\therefore F(z) \text{ 解析, 且 } F'(z) = P_x + iQ_x = u + iv = f(z)$$

$$\text{即 } F'(z) = f(z)$$

注: 此结论与《高数》类似, 故同样引入原函数
与不定积分的概念



定义（原函数）

若在区域 B 内, $\Phi'(z) = f(z)$, 则称 $\Phi(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数

显然, 若 $f(z)$ 在单连通区域 B 内解析,

则 $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ 就是 $f(z)$ 的一个原函数

且原函数之间相差一个常数, $\Phi(z) = F(z) + c$,
(这一点很容易证明).



定义（不定积分）

$f(z)$ 的全体原函数，称为 $f(z)$ 的不定积分。

记为： $\int f(z)dz = F(z) + c$ ($F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数)

定理3 若 $f(z)$ 在单连通区域 B 内处处解析，

$G(z)$ 为 $f(z)$ 的一个原函数，

则对 $\forall z_0, z_1 \in B$, 有 $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = G(z_1) - G(z_0)$

— 类似牛顿—莱布尼兹公式



证明 $\because \int_{z_0}^z f(z) dz$ 也是 $f(z)$ 的原函数

$$\therefore \int_{z_0}^z f(z) dz = G(z) + c$$

当 $z = z_0$ 时, 根据 $C - G$ 基本定理, 得 $c = -G(z_0)$

$$\text{因此 } \int_{z_0}^z f(z) dz = G(z) - G(z_0)$$

$$\text{或 } \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = G(z_1) - G(z_0)$$



例1 计算 $\int_0^{\pi+2i} \cos \frac{z}{2} dz$

解
$$\int_0^{\pi+2i} \cos \frac{z}{2} dz = \left[2 \sin \frac{z}{2} \right]_0^{\pi+2i} = 2 \cos i = 2 \operatorname{ch} 1$$

例2 计算 $\int_0^i z \cos z dz$

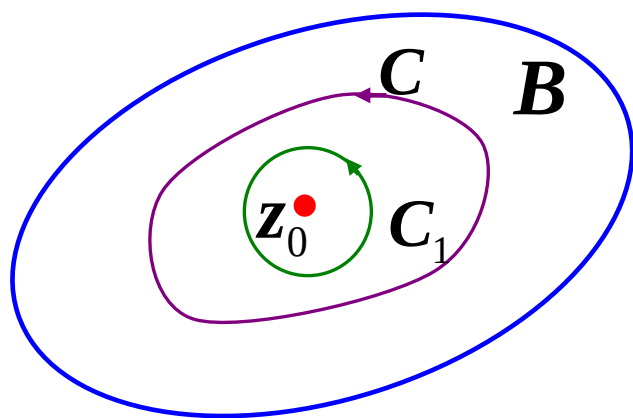
解
$$\begin{aligned} \int_0^i z \cos z dz &= z \sin z \Big|_0^i + \cos z \Big|_0^i \\ &= i \frac{e^{-1} - e}{2i} + \frac{e^{-1} + e}{2} - 1 = e^{-1} - 1 \end{aligned}$$



问题

设 B 为单连通区域, $f(z)$ 在 B 内解析, $z_0 \in B$,

且在简单闭曲线 C 内, 则 $\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = ?$



显然 $\frac{f(z)}{z - z_0}$ 在 C 内不解析

作圆 $C_1: |z - z_0| = R$, 且 $C_1 \subset C$



分析

若 $f(z) = 1$,

$$\text{则} \oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = \int_{C_1} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$$

若 $f(z) \neq 1$,

$$\text{则} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$$(\text{猜测}) \approx f(z_0) \int_{C_1} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0) \quad (R \rightarrow 0 \text{ 时})$$

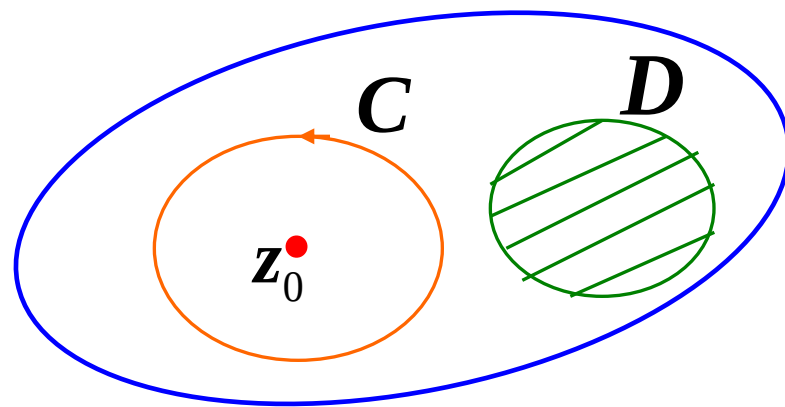


定理 (Cauchy积分公式)

设 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析(不一定是单连通区域),
 C 是 D 内任何一条正向简单闭曲线, 且 C 的内部含于 D ,
 z_0 为 C 内一点,

$$\text{则 } f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$$\text{或 } \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$





分析

$$\therefore \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

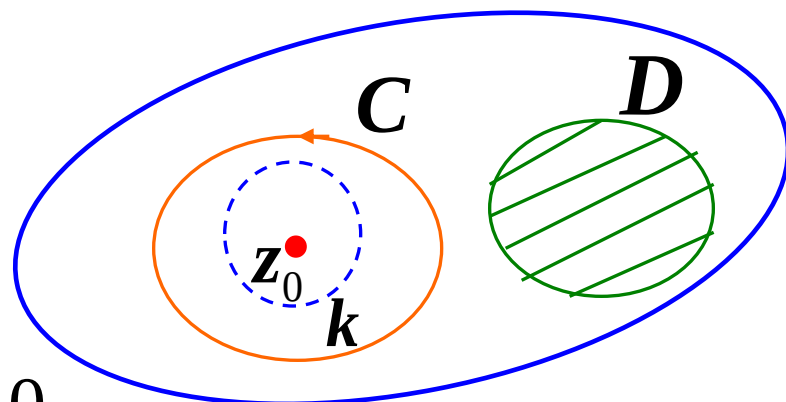
$$\therefore \text{只要证: } \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

证明:

$$\therefore \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \quad (\text{由 } f(z) \text{ 在 } D \text{ 内处处解析得})$$

$$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } |z - z_0| < \delta \text{ 时, } |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

$$\text{取 } R < \delta, \text{ 作圆周 } K: |z - z_0| = R$$





$$\text{则 } \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \oint_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz$$

$$\text{而 } \left| \oint_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \oint_K \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} ds$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{R} \cdot 2\pi R = 2\pi\varepsilon \rightarrow 0$$

$$\text{即 } \oint_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0 \quad \therefore \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$



注 若 $C: z = z_0 + Re^{i\theta}$

$$\begin{aligned}\text{则 } f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} \cdot i Re^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta\end{aligned}$$

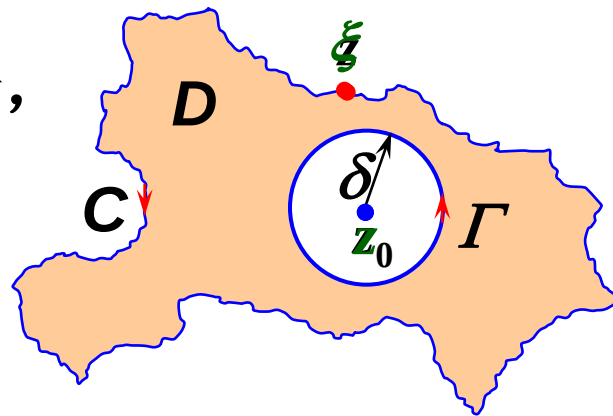
即圆心点的值=圆边界上函数值的平均值



3.5 Cauchy积分公式

定理 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析,
在边界 C 上连续, $z_0 \in D$, 则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$



意义 将 z_0 换成 z , 积分变量 z 换成 ξ , 则上式变为

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, (z \in D).$$

- 解析函数在其解析区域内的值完全由边界上的值确定。
- 换句话说, 解析函数可用其解析区域边界上的值以一种特定的积分形式表达出来。



例1 求下列各积分

$$(1) \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=2} \frac{z^2}{z-1} dz$$

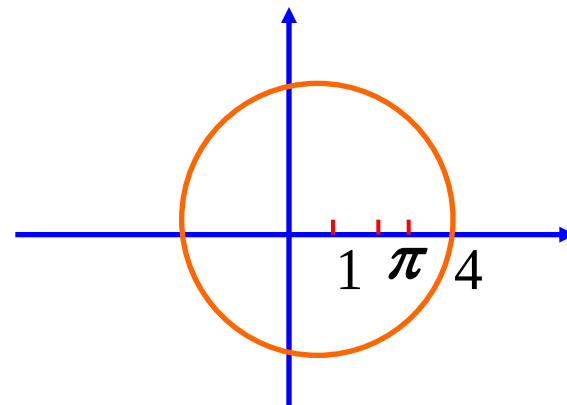
解

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=2} \frac{z^2}{z-1} dz = f(z) \Big|_{z=1} = z^2 \Big|_{z=1} = 1$$

$$(2) \oint_{|z-1|=3} \frac{\cos z}{z-\pi} dz$$

解

$$\oint_{|z-1|=3} \frac{\cos z}{z-\pi} dz = 2\pi i \cos \pi = -2\pi i$$





$$(3) \oint_{|z|=2} \frac{zdz}{(9-z^2)(z+i)}$$

解

$$\oint_{|z|=2} \frac{zdz}{(9-z^2)(z+i)} = \oint_{|z|=2} \frac{\frac{z}{9-z^2}}{z+i} dz$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{-i}{9-i^2} = \frac{\pi}{5}$$

$$(4) \oint_{|z-2|=2} \frac{z}{z^4-1} dz$$

解 $\because$ 在 $|z-2|=2$ 内, $f(z) = \frac{z}{z^4-1}$ 只有奇点 $z=1$

$$\therefore \text{原式} = \oint_{|z-2|=2} \frac{\frac{1}{(z+1)(z^2+1)}}{z-1} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2 \times 2} = \frac{\pi}{2} i$$



3.5 Cauchy积分公式

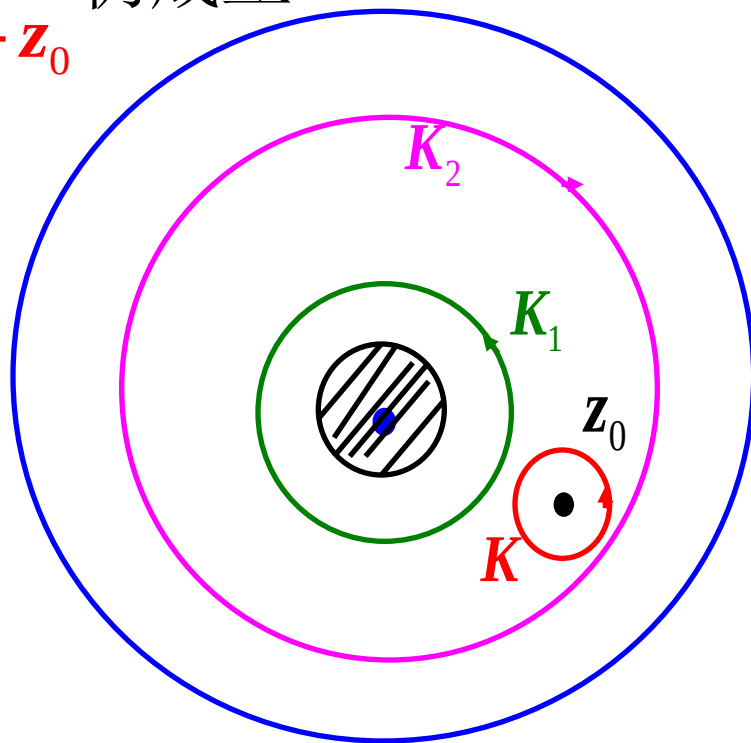
例2 设区域 D 是圆环域, $f(z)$ 在 D 内解析, 以圆环的中心为中心作正向圆周 K_1 与 K_2 , K_2 包含 K_1 , z_0 为 K_1, K_2 之间任意一点.

试证: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1^- + K_2} \frac{f(z)}{z - z_0}$ 仍成立

证明

$\because F(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$ 在除 z_0 外均解析

作充分小圆周 $K: |z - z_0| = r$





则 $F(z)$ 在围线 $\Gamma = K_2 + K_1^- + K^-$ 所围区域上解析。

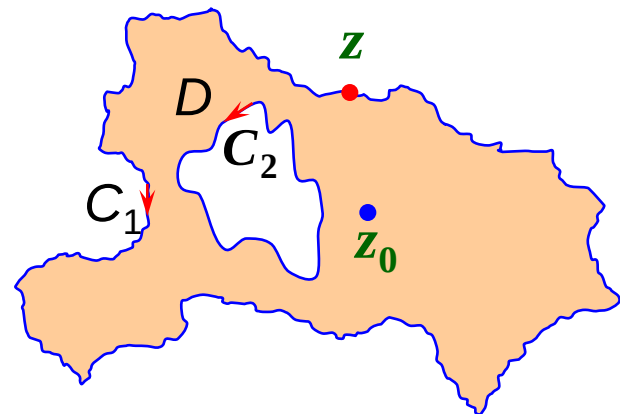
由复合闭路定理: $\oint_{K_1^- + K_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$

$$\text{即 } f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1^- + K_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$



注意 柯西积分公式中的区域 D 可以

是多连域。比如对于二连域 D ,



其边界为 $C = C_1 + C_2^-$, 则

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad (z_0 \in D). \end{aligned}$$

应用 • 反过来计算积分 $\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$.

• 推出一些理论结果, 从而进一步认识解析函数。

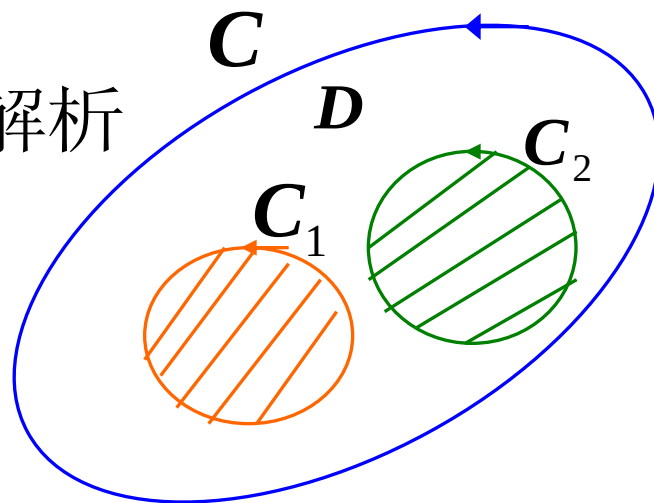


Cauchy积分公式推广

设 $f(z)$ 在 D 内及 D 的边界 Γ 上解析

$$(\Gamma = C + C_1^- + C_2^-)$$

$$\text{则 } f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz ,$$





Cauchy积分公式 在理论上提供了一个研究解析函数局部性质的理想工具，其最为显著的作用，就是证明了一个解析函数具有各阶导数，而各阶导数也必都解析的重要结论（实变函数无此性质）。



定理 解析函数 $f(z)$ 的导数仍为解析函数，它的 n 阶

导数为
$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (n = 1, 2, \dots)$$

或
$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

其中 C 为 $f(z)$ 的解析区域 D 内围绕 z_0 的任何一条正向简单闭曲线，并且 C 的内部全含于 D .

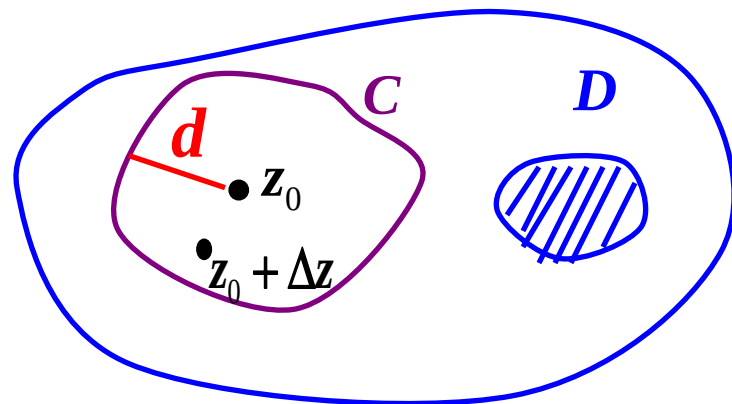
注意： 被积函数在 C 内只有一个奇点.



3.6 解析函数的高阶导数

公式记忆方法 $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$

两边对 z_0 求 n 阶导.



证明 先证 $n = 1$ 时成立,

(即证 $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$)

由定义 $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$



根据公式对 C 进行积分得:

$$\begin{aligned}& \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\&= \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z - (z_0 + \Delta z)} - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} \right] \\&= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2 (z - z_0 - \Delta z)} dz \\&= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(z - z_0 - \Delta z + \Delta z) f(z)}{(z - z_0)^2 (z - z_0 - \Delta z)} dz \\&= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz + \frac{\Delta z}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2 (z - z_0 - \Delta z)} dz\end{aligned}$$



$$\text{记 } I \stackrel{\Delta}{=} \frac{\Delta z}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2 (z-z_0-\Delta z)} dz$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } |I| &= \frac{|\Delta z|}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2 (z-z_0-\Delta z)} dz \right| \\ &\leq \frac{|\Delta z|}{2\pi} \oint_C \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^2 |z-z_0-\Delta z|} ds \end{aligned}$$

$\because f(z)$ 在 C 上解析 $\therefore f(z)$ 连续, 从而有界。

即 $\exists M > 0$, 使得在 C 上 $|f(z)| \leq M$



3.6 解析函数的高阶导数

设 $d = \min_{z \in C} |z - z_0|$ (z_0 到 C 上最短距离), 且 $|\Delta z| < \frac{1}{2}d$

$$\text{则 } |z - z_0| \geq d, \quad \frac{1}{|z - z_0|} \leq \frac{1}{d}$$

$$|z - z_0 - \Delta z| \geq |z - z_0| - |\Delta z| > \frac{d}{2}, \quad \frac{1}{|z - z_0 - \Delta z|} < \frac{2}{d}$$

$$\therefore |I| < \frac{|\Delta z|}{2\pi} \cdot \frac{2M}{d^3} \oint_C ds = |\Delta z| \frac{ML}{\pi d^3}$$

因而, 当 $\Delta z \rightarrow 0$ 时, $I \rightarrow 0$

$$\text{从而 } f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$



其次, 同样方法可证明:
$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz$$

以下用归纳法即可证明结论的正确性.

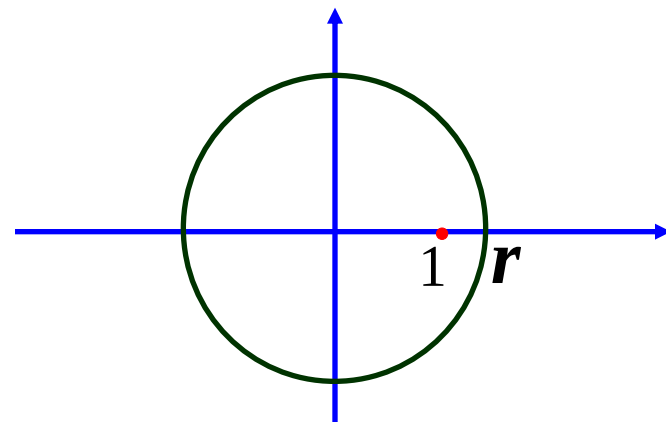
注意: 此定理说明: 一个解析函数的任意阶导数仍解析.



例1 计算 $\oint_C \frac{5z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3} dz$, C 是 $|z| = r > 1$ 的正向。

解 显然 $f(z) = 5z^3 - 3z + 2$ 在 C 内解析

$z_0 = 1$ 是 C 内的点, $n = 2$



$$\therefore \text{原式} = \frac{2\pi i}{2!} f''(1) = \pi i \cdot 10 = 10\pi i$$



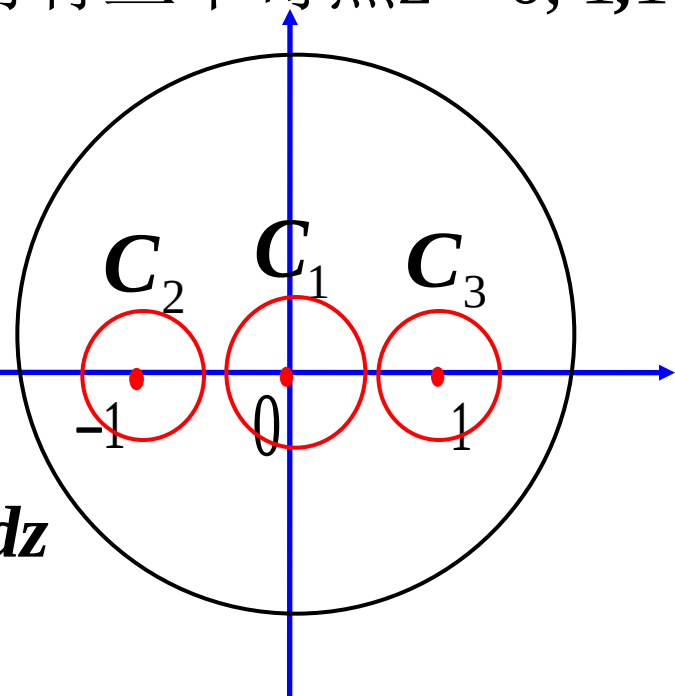
3.6 解析函数的高阶导数

例2 计算 $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^3(z^2-1)}$

解 $F(z) = \frac{1}{z^3(z^2-1)}$ 在 $C: |z|=2$ 内有三个奇点 $z=0, -1, 1$

作三个小圆周 C_1, C_2, C_3

$$\begin{aligned} \text{则原式} &= \oint_{C_1} \frac{1}{z^3} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z+1} dz \\ &\quad + \oint_{C_3} \frac{1}{z-1} dz \end{aligned}$$





3.6 解析函数的高阶导数

$$\begin{aligned} &= \frac{2\pi i}{2!} \cdot \left(\frac{1}{z^2 - 1} \right)'' \bigg|_{z=0} + 2\pi i \cdot \frac{1}{z^3(z-1)} \bigg|_{z=-1} + 2\pi i \cdot \frac{1}{z^3(z+1)} \bigg|_{z=1} \\ &= \pi i \cdot (-2) + \pi i + \pi i = 0 \end{aligned}$$

另一种解法 $\because \frac{1}{z^3(z^2-1)} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^3} + \frac{1/2}{z-1} + \frac{1/2}{z+1}$

$$\begin{aligned} \therefore \oint_C \frac{1}{z^3(z^2-1)} dz &= \oint_C \left(-\frac{1}{z} \right) dz + \oint_C \left(-\frac{1}{z^3} \right) dz \\ &\quad + \oint_C \frac{1/2}{z-1} dz + \oint_C \frac{1/2}{z+1} dz = 0 \end{aligned}$$



例3 (*Cauchy*基本定理的逆定理: *Morera*摩勒拉)

$f(z)$ 在单连通区域 B 内连续, 且对于 B 内任意简单闭曲线 C 都有 $\oint_C f(z) dz = 0$

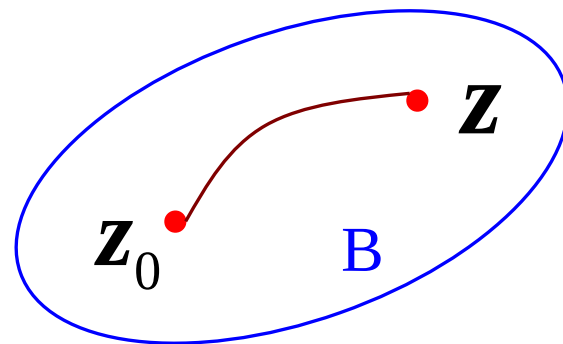
证明: $f(z)$ 在 B 内解析.

此定理给出了判别解析的另一充要条件.



证明 在 B 内取定点 $z_0 \in B$,

则 $\forall z \in B$, 由 $\oint_C f(z) dz = 0$ 知,



$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ 是与路径无关的单值函数

且与第四节定理2同样的证法, 得 $F'(z) = f(z)$

即 $F(z)$ 解析.

又由高阶导定理知: $F'(z)$ 解析 $\Leftrightarrow f(z)$ 解析



调和函数 设 $\varphi(x, y)$ 在区域 D 内有二阶连续偏导,

且满足 $Laplace$ 方程:
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

则称 $\varphi(x, y)$ 为区域 D 内的调和函数

共轭调和函数 设 $u(x, y), v(x, y)$ 是区域 D 内的

调和函数 且
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y}$$

则称 $v(x, y)$ 是 $u(x, y)$ 的共轭调和函数.



注意： $u(x, y)$ 不一定是 $v(x, y)$ 的共轭调和函数，

$$\text{(除非 } \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \text{)}$$

定理（调和函数与解析函数的关系）

若 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 D 内解析，

则 1° $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 都是 D 内的调和函数

2° $v(x, y)$ 是 $u(x, y)$ 的共轭调和函数



证明 1° $\because f(z) = u + iv$ 在 D 内解析

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (1)$$

从而
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \left(\because \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)$$

同理得
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

2° 由(1)式说明: $v(x, y)$ 是 $u(x, y)$ 的共轭调和函数.



注意： 1°的反之不一定成立

2°的反之成立



构造解析函数

问题 已知实部 u , 求虚部 v (或者已知虚部 v , 求实部 u), 使 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ 解析, 且满足指定的条件。

依据 构造解析函数 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ 的依据:

(1) u 和 v 本身必须都是调和函数;

(2) u 和 v 之间必须满足 $C-R$ 方程。

注意 必须首先检验 u 或 v 是否为调和函数。

方法 ● 偏积分法

● 全微分法



方法 ● **偏积分法** (不妨仅考虑已知实部 u 的情形)

(1) 由 u 及 $C-R$ 方程
得到**待定函数 v**
的两个偏导数:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, & (A) \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. & (B) \end{cases}$$

(2) 将 (A) 式的两边对变量 y 进行(偏)积分得:

$$v(x, y) = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy = \tilde{v}(x, y) + \varphi(x), \quad (C)$$

其中, $\tilde{v}(x, y)$ 已知, 而 $\varphi(x)$ 待定。

(3) 将 (C) 式代入 (B) 式, 求解即可得到函数 $\varphi(x)$.



3.7 解析函数与调和函数的关系

方法 ● **全微分法** (不妨仅考虑已知实部 u 的情形)

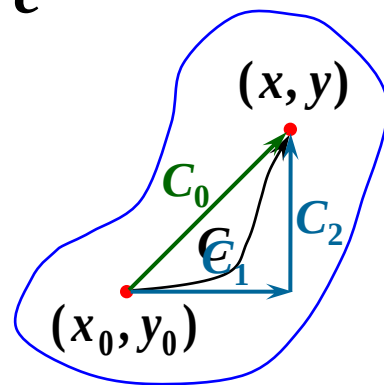
(1) 由 u 及 $C-R$ 方程得到待定函数 v 的全微分:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

(2) 利用第二类曲线积分 (与路径无关) 得到原函数:

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + c \\ &= \int_C -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + c. \end{aligned}$$

其中, $C = C_0$ 或 $C_1 + C_2$.





例1 证明 $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ 为调和函数, 并求其共轭调和函数 $v(x, y)$ 和由它们构成的解析函数.

证明 1) $\because \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y \quad \therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

故 $u(x, y)$ 为调和函数

2)法一 由 $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -6xy,$

$$\text{得 } v = \int -6xy dy = -3xy^2 + \varphi(x)$$

$$\text{又 } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{即 } -3y^2 + \varphi'(x) = -3y^2 + 3x^2$$

$$\text{从而得 } \varphi'(x) = 3x^2 \quad \therefore \varphi(x) = x^3 + c$$



从而 $v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + c$

得到一个解析函数 $W = y^3 - 3x^2y + i(-3x^2y + x^3 + c)$

令 $z = x + iy$, 可化为 $W = f(z) = i(z^3 + c)$

法二 设 $u(x, y)$ 的调和函数为 $v(x, y)$

则 $W = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 解析

$$\begin{aligned}\text{故 } f'(z) &= u_x + iv_x = u_x - iu_y = -6xy - i(3y^2 - 3x^2) \\ &= 3i(x^2 - y^2 + i \cdot 2xy) = 3iz^2\end{aligned}$$

$$\therefore f(z) = iz^3 + c_1 = i(z^3 + c)$$



3.7 解析函数与调和函数的关系

例2 已知一调和函数 $v = \frac{y}{x^2 + y^2}$, 求一解析函数

$$f(z) = u + iv, \text{ 使得 } f(2) = 0$$

解 $\because f'(z) = u_x + iv_x = v_y + iv_x$

$$= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2 - 2xyi}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{(\bar{z})^2}{(z \cdot \bar{z})^2} = \frac{1}{z^2}$$

$$\therefore f(z) = -\frac{1}{z} + c \quad \text{又} \quad f(2) = 0,$$

$$\text{故 } -\frac{1}{2} + c = 0 \quad \therefore c = \frac{1}{2} \quad \text{从而有} \quad f(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{z}$$



西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

The End.

