



西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

场论与复变函数



通信工程学院

场论与复变函数教学团队



第二章 解析函数

本章首先介绍复变函数的导数概念和求导法则，在此基础上，介绍解析函数的概念及判别法。

第一节 解析函数的概念

第二节 函数解析的充要条件

第三节 初等函数



一、复变函数的导数与微分

1、导数定义：

设 $w = f(z)$ 定义于区域 D , $z_0 \in D, z_0 + \Delta z \in D$

如果 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ 存在

则称 $f(z)$ 在 z_0 点可导，而极限值为 $f(z)$ 在 z_0 点的导数，记作 $f'(z_0)$ 或 $\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0}$

$$\text{即 } f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$



等价定义： $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |\Delta z| < \delta$ 时

恒有
$$\left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$$

如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导，则称 $f(z)$ 在 D 内可导。导函数记为

$$f'(z) \text{ 或 } \frac{dw}{dz}$$



例1 求 $f(z) = z^2$ 的导数.

解: 设 z 为复平面上任意一点

$$\text{则 } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z$$

$$\therefore f'(z) = 2z, \quad \text{即 } (z^2)' = 2z$$

一般的, $(z^n)' = nz^{n-1}$ (n 为正整数)



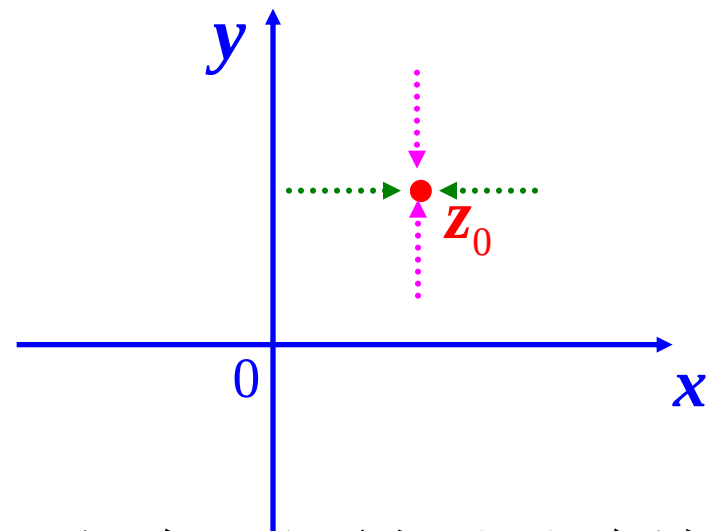
例2 证明: $f(z) = \bar{z}$ 在 z 平面上处处不可导

证: $\therefore \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$

$\therefore$ 当 $\Delta z \xrightarrow{\text{沿实轴}} 0$ 时, $\lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ (\Delta y = 0)}} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$

$\therefore$ 当 $\Delta z \xrightarrow{\text{沿虚轴}} 0$ 时,

$$\lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ (\Delta x = 0)}} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\Delta y i}{\Delta y i} = -1$$



$\therefore f(z) = \bar{z}$ 在复平面上处处不可导, 但在 z 平面上处处连续



2. 可导与连续的关系

$f(z)$ 在 z_0 点可导 $\Rightarrow f(z)$ 在 z_0 点连续, 反之, 不成立。

证明: $\because f'(z_0)$ 存在, $\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |\Delta z| < \delta$ 时

$$\left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$$

记 $\rho(\Delta z) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0)$ 则有 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \rho(\Delta z) = 0$

$$\therefore f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0) \Delta z + \rho(\Delta z) \cdot \Delta z$$

故 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0)$, 即 $f(z)$ 在 z_0 点连续

反之: 由例2可知 $f(z) = \bar{z}$ 处处连续, 但处处不可导。



3. 求导法则 (与高等数学相同)

$$(1) \quad (c)' = 0 \quad c \text{ 为复常数}$$

$$(2) \quad (z^n)' = nz^{n-1}, \quad n \text{ 为正整数}$$

$$(3) \quad [f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z)$$

$$(4) \quad [f(z) \cdot g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$



$$(5) \quad \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right]' = \frac{g(z) f'(z) - f(z) g'(z)}{g^2(z)}, \quad g(z) \neq 0$$

$$(6) \quad \{f[g(z)]\}' = f'(w) g'(z), \quad \text{其中 } w = g(z)$$

$$(7) \quad f'(z) = \frac{1}{\varphi'(w)}$$

其中 $w = f(z)$ 与 $z = \varphi(w)$ 是互为反函数的单值函数, 且 $\varphi'(w) \neq 0$



4. 微分的概念

设 $w = f(z)$ 在 z_0 可导, 则

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0) \Delta z + \rho(\Delta z) \Delta z$$

其中 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \rho(\Delta z) = 0 \quad \therefore \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\rho(\Delta z) \Delta z}{\Delta z} \right| = 0$

故 $|\rho(\Delta z) \Delta z| = o(|\Delta z|)$

称 $f'(z_0) \Delta z$ 为 $w = f(z)$ 在 z_0 点的微分。

记作 $dw = f'(z_0) dz$



可见：可导 $\Leftrightarrow$ 可微，且 $f'(z_0) = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0}$

如果 $f(z)$ 在区域 D 内每一点可微，

则称 $f(z)$ 在 D 内可微。

记作 $dw = f'(z)dz$



二、解析函数

定义：

- 1° 如果 $f(z)$ 在 z_0 及 z_0 的某邻域内处处可导，
则称 $f(z)$ 在 z_0 点解析。
- 2° 如果 $f(z)$ 在区域 D 内每一点解析，
则称 $f(z)$ 在区域 D 内解析（或解析函数）。
- 3° 如果 $f(z)$ 在 z_0 点不解析，
则称 z_0 为 $f(z)$ 的奇点。



注意:

(1) $f(z)$ 在 z_0 解析 $\Rightarrow f(z)$ 在 z_0 可导。

反之，不成立。

(2) $f(z)$ 在区域 D 内解析

$\Leftrightarrow f(z)$ 在区域 D 内可导。

(3) $f(z)$ 在 z_0 解析 $\Leftrightarrow$

$f(z)$ 在 z_0 的某邻域 $N_\delta(z_0)$ 内解析。



例3. 研究 $f(z) = z^2, g(z) = x + 2yi$ 的解析性。

解: (1) $\because (z^2)' = 2z$, 即 $f(z)$ 处处可导。

$\therefore$ 处处解析

$$\begin{aligned} (2) \quad & \because \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{g(z + \Delta z) - g(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - x - 2yi}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi} \quad \text{不存在} \end{aligned}$$

$\therefore g(z) = x + 2yi$ 处处不可导, 亦处处不解析



例4. 研究 $f(z) = |z|^2$ 的解析性

解: 设 z_0 为复平面上任意一点

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \frac{|z_0 + \Delta z|^2 - |z_0|^2}{\Delta z} \\ &= \frac{(z_0 + \Delta z)(\overline{z_0 + \Delta z}) - z_0 \overline{z_0}}{\Delta z} = \overline{z_0} + z_0 \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{\Delta z} \end{aligned}$$

当 $z_0 = 0$ 时, $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = 0$, 即 $f'(z_0) = 0$

当 $z_0 \neq 0$ 时, 由例2知 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ 不存在



$$\therefore \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \text{ 不存在}$$

故 $f(z)$ 在 z_0 不可导.

因此, $f(z) = |z|^2$ 在 $z = 0$ 点可导, 但处处不解析.



例5. 求出 $f(z) = \frac{1}{z}$ 的奇点

解: $\because z \neq 0$ 时, $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$

$z = 0$ 时, 无定义

$\therefore$ 不可导

故 $z = 0$ 是 $f(z) = \frac{1}{z}$ 的奇点.

$\therefore$ 在除 $z = 0$ 的复平面内, $f(z)$ 处处解析.



定理:(解析函数的运算法则)

1) 在区域 D 内解析的函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商（除分母为零的点）在 D 内解析.

2) 设 $h = g(z)$ 在 z 平面上区域 D 内解析,
 $w = f(h)$ 在 h 平面上区域 G 内解析.

如果 $\forall z \in D \rightarrow g(z) \in G$, 则复合函数
 $w = f[g(z)]$ 在 D 内解析.



例如:

多项式 $P(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n$ 在 z 平面上解析。

有理分式
$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 z^n + \cdots + a_n}{b_0 z^m + \cdots + b_m}$$

除使 $Q(z) = 0$ 的点外处处解析。



第二节 函数解析的充要条件

由前节的讨论看出，用定义判别一个函数的解析性是很复杂的，有时是很困难的。因此，有必要寻找判别函数解析的简便方法。



定理一(函数在一点可导的充分必要条件)

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在定义区域 D 内一点 $z = x + iy$ 可导

充要

$\Leftrightarrow$ 1° $u(x, y), v(x, y)$ 在点 (x, y) 可微
条件

2° $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ 柯西—黎曼方程 (C.-R.)

且 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ 或 $f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$



必要性
证明: $\Rightarrow \because f(z)$ 在 $z = x + iy$ 可导

$$\therefore \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)$$

$$\text{故 } f(z + \Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z + \rho(\Delta z)\Delta z$$

$$\text{其中 } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \rho(\Delta z) = 0$$

$$\text{令 } f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta u + i\Delta v, \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

$$f'(z) = a + ib, \quad \rho(\Delta z) = \rho_1 + i\rho_2$$



$$\begin{aligned}\text{则 } \Delta u + i\Delta v &= (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + (\rho_1 + i\rho_2)(\Delta x + i\Delta y) \\ &= (a\Delta x - b\Delta y + \rho_1\Delta x - \rho_2\Delta y) \\ &\quad + i(b\Delta x + a\Delta y + \rho_2\Delta x + \rho_1\Delta y)\end{aligned}$$

$$\text{比较知: } \Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \rho_1\Delta x - \rho_2\Delta y$$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \rho_2\Delta x + \rho_1\Delta y$$

$$\text{由于 } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \rho(\Delta z) = 0 \quad \therefore \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \rho_1 = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \rho_2 = 0$$

$$\text{故 } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\rho_1\Delta x - \rho_2\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\rho_2\Delta x + \rho_1\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$



$$\therefore \Delta u = a\Delta x - b\Delta y + o_1\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)$$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + o_2\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)$$

即 $u(x, y), v(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分.

$$\text{且满足 } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = a, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -b$$



充分性

$\Leftarrow \because u(x, y), v(x, y)$ 在点 (x, y) 可微

$$\text{则 } \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y$$

$$\text{其中 } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \varepsilon_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

$$\text{从而 } f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta u + i\Delta v$$

$$\begin{aligned} &= (u_x + iv_x) \Delta x + (u_y + iv_y) \Delta y \\ &\quad + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3) \Delta x + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4) \Delta y \end{aligned}$$



$$\text{又 } u_y = -v_x = i^2 v_x, \quad v_y = u_x$$

$$\begin{aligned} \therefore f(z + \Delta z) - f(z) &= (u_x + iv_x)(\Delta x + i\Delta y) \\ &\quad + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\Delta x + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\Delta y \end{aligned}$$

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = u_x + iv_x + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}$$

$$\text{而 } \left| \frac{\Delta x}{\Delta z} \right| \leq 1 \quad \left| \frac{\Delta y}{\Delta z} \right| \leq 1 \quad \therefore \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = u_x + iv_x$$

$$\text{即 } f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$



定理二(函数解析的充分必要条件)

函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在定义域 D 内解析

$\Leftrightarrow$ 1° $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在 D 内可微

2° 满足 $C-R$ 方程 $u_x = v_y, u_y = -v_x$

注: $f(z)$ 在定义区域 D 内解析的 充分条件:

1° $u(x, y), v(x, y)$ 在 D 内偏导连续

2° 满足 $C-R$ 方程 $u_x = v_y, u_y = -v_x$



例1 判定下列函数在何处可导，在何处解析。

$$(1) \quad f(z) = (x^2 - y^2 - x) + i(2xy - y^2)$$

解： $\because u = x^2 - y^2 - x, \quad v = 2xy - y^2$

$$\therefore u_x = 2x - 1 \quad u_y = -2y$$

$$v_x = 2y \quad v_y = 2x - 2y$$

显然 u_x, u_y, v_x, v_y 在 $\mathbf{R}^2$ 平面内连续

但只在 $y = \frac{1}{2}$ 时，满足 $u_x = v_y, u_y = -v_x$

$\therefore f(z)$ 仅在直线 $y = \frac{1}{2}$ 上可导，而在复平面内处处不解析



$$(2) \quad f(z) = e^x (\cos y + i \sin y)$$

解: $u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$

则 $u_x = e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sin y$

$$v_x = e^x \sin y \quad v_y = e^x \cos y$$

显然,四个偏导连续, 且 $u_x = v_y, u_y = -v_x$

$\therefore f(z)$ 在复平面内处处可导, 处处解析

并且 $\underline{f'(z) = u_x + iv_x = e^x (\cos y + i \sin y) = f(z)}$



(3) $W = z \operatorname{Re} z$

解: $\because W = (x + iy)x = x^2 + ixy$

则 $u = x^2, \quad v = xy$

$$\therefore u_x = 2x, \quad u_y = 0, \quad v_x = y, \quad v_y = x$$

显然,四个偏导连续,但仅在 $x = y = 0$ 时满足

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

$\therefore W = z \operatorname{Re} z$ 只在 $z = 0$ 上可导,从而在复平面内处处不解析



例2 如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内为常数.

解: $\because f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0$

$$\therefore u_x = u_y = 0 \quad \text{故 } u = \text{常数}$$

$$v_x = v_y = 0 \quad \text{故 } v = \text{常数}$$

从而 $f(z)$ 为常数



例3 如果 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $\overline{f(z)}$ 也在 D 内解析,
证明: $f(z)$ 在 D 内为常数.

解: 设 $f(z) = u + iv$, 则 $\overline{f(z)} = u - iv$

$\because f(z)$ 及 $\overline{f(z)}$ 解析 $\therefore$ 满足 $C-R$ 方程

$$\text{故 } \begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases} \text{ 且 } \begin{cases} u_x = -v_y \\ -v_x = -u_y \end{cases}$$

$$\text{解得 } u_x = u_y = 0, \quad v_x = v_y = 0$$

$\therefore u = \text{常数}, \quad v = \text{常数}$ 从而 $f(z)$ 为常数



例4 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 且满足关系 $v = u^2$,
则 $f(z)$ 在 D 内为常数.

证明: $\because f(z) = u + iv = u + iu^2$ 且解析

$$\therefore u_x = v_y = 2uu_y, \quad u_y = -v_x = -2uu_x$$

$$\text{故 } u_x = -4u^2u_x \quad \text{即 } (1 + 4u^2)u_x = 0$$

$$\because 1 + 4u^2 \neq 0 \quad \therefore u_x = 0 \quad \text{从而 } u_y = 0, \quad u = \text{常数}$$

$$\text{又 } v_x = v_y = 0 \quad \therefore v = \text{常数}$$

$$\therefore f(z) \text{ 为常数}$$



例5 如果 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 为一解析函数，
且 $f'(z) \neq 0$ ，那么曲线族 $u(x, y) = c_1$ 和
 $v(x, y) = c_2$ 必互相正交.

证明: $\because f'(z) = v_y - iu_y \neq 0 \therefore u_y$ 与 v_y 不全为零

1° 若 u_y, v_y 在交点均不为零，

则曲线 $u(x, y) = c_1, v(x, y) = c_2$ 的斜率分别为

$$k_1 = -\frac{u_x}{u_y}, k_2 = -\frac{v_x}{v_y}$$



$$\therefore \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = \left(-\frac{u_x}{u_y} \right) \cdot \left(-\frac{v_x}{v_y} \right) = -1 \text{ (根据 } C \text{ - } R \text{ 方程)}$$

即 曲线族正交.

2° 若 u_y, v_y 中有一个为零, 则另一个必不为零.

$\therefore$ 两曲线在交点的切线一条是水平的,

另一条是铅直的

即 曲线族正交.

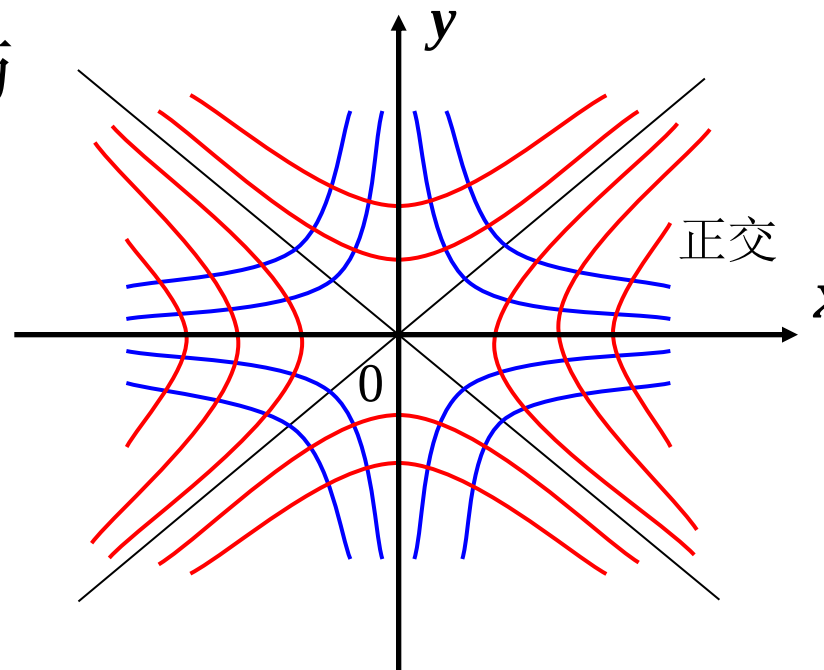


例如 $W = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

当 $z \neq 0$ 时, $\frac{dw}{dz} = 2z \neq 0$

$\therefore$ 曲线族 $x^2 - y^2 = c_1$ 与

$2xy = c_2$ 正交





第三节 初等函数

本节将把实变量函数中一些常用的初等函数推广到复变量函数中，研究这些函数的性质，特别是解析性。



一、单值函数

1. 指数函数:

设 $z = x + iy$, 则 $f(z) = e^x (\cos y + i \sin y)$ 称为 z 的指数函数, 记作 $\exp z$ 或 e^z, e^{x+iy}

$$\text{即 } e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

特别的: $z = x$ 时, $e^z = e^x$ 是实指数函数

$$z = iy \text{ 时, } e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad - \text{欧拉公式}$$



性质:

$$(1) \quad |e^z| = e^x > 0, \quad \therefore e^z \neq 0$$

$$\operatorname{Arg} e^z = y + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$(2) \quad \because (e^z)' = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z$$

$\therefore e^z$ 在 Z 平面内处处解析

$$(3) \quad \text{服从加法定理: } e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

$$(4) \quad e^z \text{ 是 } 2k\pi i \text{ 为周期的周期函数, } 2\pi i \text{ 称为基本周期}$$

$$(5) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} e^z \text{ 不存在 } \therefore \text{在扩充复平面上, } e^\infty \text{ 无意义}$$



2. 三角函数

由欧拉公式 $e^{iy} = \cos y + i\sin y$, $e^{-iy} = \cos y - i\sin y$

则 $\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$, $\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$

定义: 余弦函数 $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

正弦函数 $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

特别的: $z=y$ 时, 与实变量函数一致



性质:

$$(1) \quad \because (\sin z)' = \cos z, (\cos z)' = -\sin z$$

$\therefore \sin z, \cos z$ 为解析函数

(2) 对于复数 z , 欧拉公式仍成立.

$$\text{即 } e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

(3) $\sin z$ 为奇函数, $\cos z$ 为偶函数.



常用的三角恒等式:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \sin 2z = 2 \sin z \cos z,$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

从而 $\underline{\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy}$
 $\underline{= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y}$

$$(\because \cos iy = \cosh y, \quad \sin iy = i \sinh y)$$

$$\underline{\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy}$$
$$\underline{= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y}$$



(4) $\sin z, \cos z$ 都是以 2π 为基本周期的周期函数

(5) 使 $\sin z = 0$ 的零点为 $z = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \dots$)

解: $\because \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \quad \therefore e^{2iz} = 1 = e^{2n\pi i} \quad \therefore z = n\pi$

同样 $\cos z = 0$ 的零点 $z = n\pi + \frac{\pi}{2}$ ($n = 0, \pm 1, \dots$)

(6) 在复数域内 $|\sin z| \leq 1$ 和 $|\cos z| \leq 1$ 不再成立

例如: 取 $z = iy$,

$$\text{则 } \cos iy = \frac{e^{-y} + e^y}{2} > \frac{e^y}{2} \rightarrow +\infty \quad (y \rightarrow +\infty)$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

其它三角函数: $\sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$



3. 双曲函数

定义： 双曲正弦 $shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ ，双曲余弦 $chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

特别的 $z = x$ 时，同实变量双曲函数一致

性质： (1) $\because (shz)' = chz, (chz)' = shz$

$\therefore shz, chz$ 为解析函数

(2) shz 为奇函数， chz 为偶函数

(3) shz 与 chz 均是以 $2\pi i$ 为基本周期的函数



基本公式:

$$ch(z_1 + z_2) = chz_1 chz_2 + shz_1 shz_2$$

$$sh(z_1 + z_2) = shz_1 chz_2 + shz_2 chz_1$$

$$\therefore chiy = \cos y, \quad shiy = i \sin y$$

$$\therefore \underline{chz = ch(x + iy) = chx \cos y + ish x \sin y}$$

$$\underline{shz = sh(x + iy) = shx \cos y + ich x \sin y}$$



二、多值函数

1. 对数函数:

满足 $e^w = z (z \neq 0)$ 的函数 $w = f(z)$ 称为对数函数

$$\text{记为 } w = \text{Ln}(z) \quad (\text{即 } e^{\text{Ln} z} = z)$$

如果令 $z = re^{i\theta}$, $w = u + iv$

$$\text{则 } e^{u+iv} = re^{i\theta}, \quad \therefore u = \ln r, \quad v = \theta + 2k\pi$$

$$\text{即 } \underline{w = \text{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

是多值函数



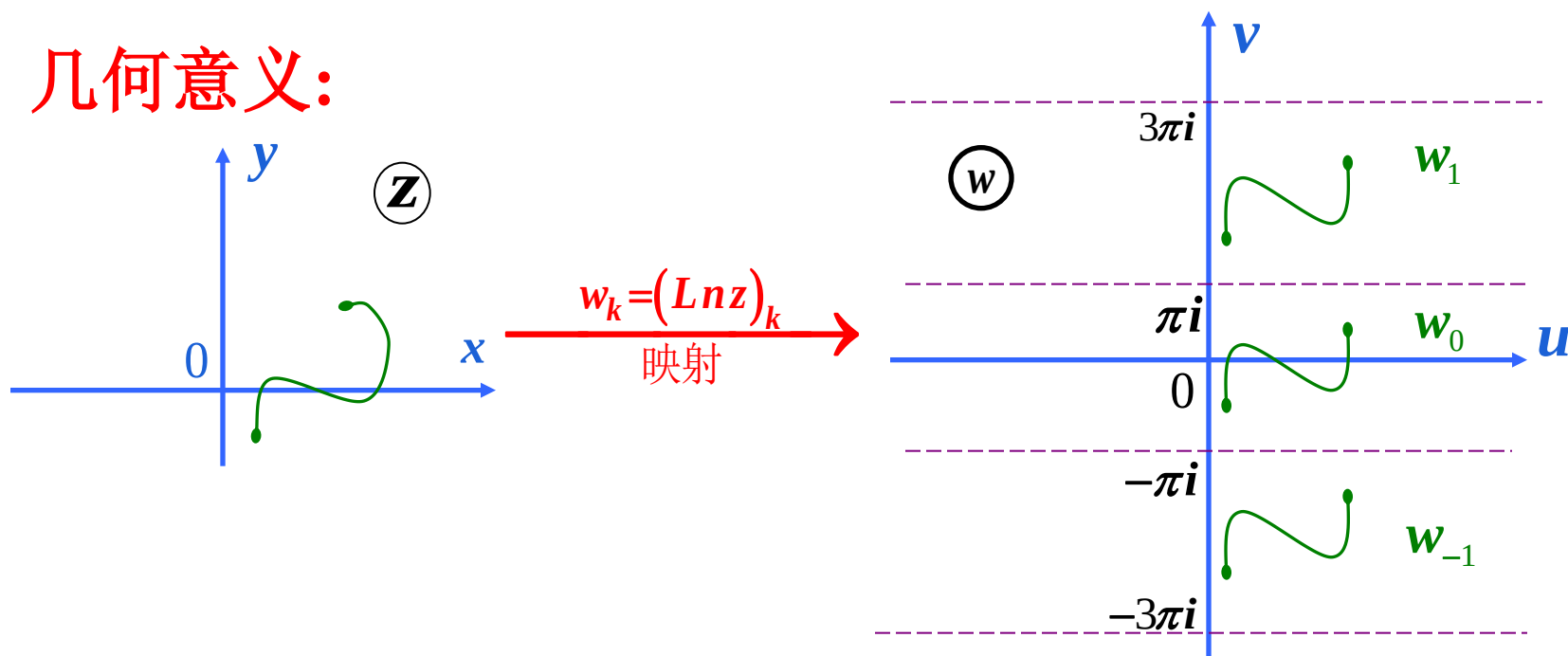
特别的： $k = 0$ 时， $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ 称为 $\text{Ln}z$ 的主值

$$\text{故 } \text{Ln}z = \ln z + 2k\pi i \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

通常，记 $w_k = (\text{Ln}z)_k = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \quad (k = 0, \pm 1, \dots)$

为 $w = \text{Ln}z$ 的第 k 个单值分支， $k = 0$ 为主值分支

几何意义：





例1 求下列各值及相应的主值

(1) $\text{Ln}(-1)$

解: $\text{Ln}(-1) = \ln|-1| + i[\arg(-1) + 2k\pi]$
 $= i(\pi + 2k\pi) = (2k + 1)\pi i$

主值 $\ln(-1) = \pi i$

此题说明:复数域内, 负数的对数有意义.



(2) $Ln(1 + \sqrt{3}i)$

解: $Ln(1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + i \left[\arg(1 + \sqrt{3}i) + 2k\pi \right]$
 $= \ln 2 + \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) i$

主值 $\ln(1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + \frac{\pi}{3} i$

(3) $Ln i$

解: $Ln i = \ln|i| + i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = \left(\frac{1}{2} + 2k \right) \pi i$

主值 $\ln i = \frac{\pi}{2} i$



性质:

(1) 服从对数运算定理

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$$

注:指集合相等

证明: $\because e^{\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2)} = z_1 \cdot z_2$

$$e^{\operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2} = e^{\operatorname{Ln} z_1} \cdot e^{\operatorname{Ln} z_2} = z_1 \cdot z_2$$

故 $e^{\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2)} = e^{\operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2}$

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$$



注意: 在复数域内, $\operatorname{Ln} z^n \neq n \operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} \neq \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z$

例如: $\operatorname{Ln} i^2 = \operatorname{Ln}(-1) = (\pi + 2k\pi)i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

$$2\operatorname{Ln} i = 2\left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right)i = (\pi + 4m\pi)i$$
$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

显然 $k = 3$ 时, $(\operatorname{Ln} i^2)_3 = 7\pi i$

而无论 m 取什么整数, $2\operatorname{Ln} i \neq 7\pi i$



(2) 解析性

对于主值分支: $\ln z = \ln|z| + i \arg z \quad (-\pi < \arg z \leq \pi)$

显然 $z \neq 0$ 时, $\ln|z|$ 处处连续

而 $\arg z$ 在 $z = 0$ 及负实轴上不连续

$$\left(\because \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ (\operatorname{Im} z > 0)}} \arg z = \pi \quad \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ (\operatorname{Im} z < 0)}} \arg z = -\pi \quad \therefore \lim_{z \rightarrow z_0} \arg z \text{ 不存在} \right)$$

故 $\ln z$ 除 $z = 0$ 及负实轴上点处处连续

综上: $z = e^w$ 在区域 $-\pi < v = \arg z < \pi$ 内反函数

$w = \ln z$ 是单值连续函数



且由求导法则

$$\frac{d \ln z}{dz} = \frac{1}{\frac{de^w}{dw}} = \frac{1}{z} \quad (z \neq 0 \text{ 及负实轴上点})$$

从而 $\ln z$ 在除 $z = 0$ 及负实轴上点外处处解析

类似可得: $\mathbf{Ln} z$ 的各分支 $(\mathbf{Ln} z)_k$ 在除 $z = 0$ 及负实轴上点解析, 且 $\frac{d(\mathbf{Ln} z)_k}{dz} = \frac{1}{z}$

可见, 不同分支上相同点的导数值相等



2. 乘幂与幂函数

(1) 乘幂: 设 $a \neq 0$, 且 a, b 为复数,

则 $a^b = e^{bLna}$ 称为 a 的 b 次幂

由于 $Lna = \ln|a| + i(\arg a + 2k\pi)$

$$\therefore a^b = e^{b[\ln|a| + i(\arg a + 2k\pi)]} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

因而 a^b 为多值的

其中 $k = 0$ 时, $a^{bLna} = e^{b(\ln|a| + i\arg a)}$ 称为 a^b 的主值



特别的:

(1) b 为整数时

$$a^b = e^{b[\ln|a|+i(\arg a+2k\pi)]} = e^{b(\ln|a|+i\arg a)} = e^{b\ln a} \text{ 单值的}$$

比如 $b=n$ 时, $a^n = e^{n\ln a} = \underbrace{aa \cdots a}_n$ 单值的

(2) $b = \frac{p}{q}$ (p, q 为互质的整数, $q > 0$)时

$$a^b = e^{\frac{p}{q}\ln|a|+i\frac{p}{q}(\arg a+2k\pi)}$$

$$= e^{\frac{p}{q}\ln|a|} \left[\cos \frac{p}{q}(\arg a + 2k\pi) + i \sin \frac{p}{q}(\arg a + 2k\pi) \right]$$

$k = 0, 1, 2, \dots, q-1$ 对应应有 q 个值



比如: $b = \frac{1}{n}$ 时

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \frac{\arg a + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg a + 2k\pi}{n} \right)$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

例2 求 $1^{\sqrt{2}}$, i^i 和 $(1+i)^{1-i}$ 的值.

解: (1) $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}Ln1} = e^{\sqrt{2}(0+i2k\pi)} = e^{2\sqrt{2}k\pi i}$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$
$$(2) i^i = e^{iLn i} = e^{i \left[i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right]} = e^{-\left(\frac{1}{2} + 2k \right) \pi}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



$$\begin{aligned}(3) \quad (1+i)^{1-i} &= e^{(1-i)\operatorname{Ln}(1+i)} = e^{(1-i)\left[\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]} \\&= e^{(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi)+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi-\ln\sqrt{2}\right)} \\&= \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi-\ln\sqrt{2}\right)\right. \\&\quad \left.+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi-\ln\sqrt{2}\right)\right]\end{aligned}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

当 $k = 0$ 时，得 $(1+i)^{1-i}$ 的主值。



(2) 幂函数: 当 a^b 中 $a = z$ 为一复变数时

则 $w = z^b$ (b 为复数) 称为幂函数, 一般为多值函数.

特别的:

(1) $b = n$ 时, $w = z^n$

由于 $(z^n)' = nz^{n-1}$, $\therefore w = z^n$ 解析

(2) $b = \frac{1}{n}$ 时, $w = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$ 又称为根式函数

且各分支 $\left(z^{\frac{1}{n}}\right)_k = \left(\sqrt[n]{z}\right)_k$ 在除原点及负实轴上可导



一般的：对 z^b (b 为复数)有

$$(z^b)' = bz^{b-1} \quad (z \neq 0 \text{ 及负实轴上点})$$

$$\left(\because (z^b)' = (e^{bLnz})' = e^{bLnz} \cdot \frac{b}{z} = bz^{b-1} \right)$$

综上： z^b 在各单值分支内除 $z=0$ 及负实轴上点外解析.



3. 反三角函数与反双曲函数:

(1) 反三角函数:

设 $z = \cos w$, 则 $w = f(z)$ 为反余弦函数

记作 $w = \text{Arccos} z$

$$\text{由于 } z = \cos w = \frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw})$$

$$\text{即 } 2z = e^{iw} + e^{-iw} \quad (e^{iw})^2 - 2ze^{iw} + 1 = 0$$

$$\text{解得: } e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \quad (\sqrt{z^2 - 1} \text{ 理解为双值函数})$$



$$\therefore w = -i \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

即 $\operatorname{Arc} \cos z = -i \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$ 是多值函数

类似可定义: $\operatorname{Arc} \sin z = -i \operatorname{Ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right)$

$$\operatorname{Arc} \tan z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}$$



(2) 反双曲函数:

设 $z = shw$, 则 $w = f(z)$ 称为反双曲正弦

记作 $w = Arshz$

同上可推出: $Arshz = Ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right)$

$$Archz = Ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$Arthz = \frac{1}{2} Ln \frac{1+z}{1-z}$$



西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

第三章 复变函数的积分

Integrals of complex variable functions

第四章 级数

Series



西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

第五章 留数

Residues



西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

第六章 共形映射

Conformal mapping



西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

第七章 矢量分析

Vector analysis



西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY



西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

第八章 场论

Field theory



西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

The End.

