西安電子科技大學
XIDIAN UNIVERSITY

场论与复变函数


通信工程学院

场论与复变函数教学团队

西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

课程编号：MS1009-01
课程名：场论与复变函数
（Field Theory and Complex Variable Functions）
课程性质：必修
学分/学时：3/48
考核方式：平时成绩+作业成绩+期末考试成绩
教材：
1. 《复变函数》. 西安交大高等数学教研室，第四版，北京：高等教育出版社，1996
2. 《矢量分析与场论》. 谢树艺，第三版，北京：高等教育出版社，2005
3. 《场论与复变函数习题册》. 西安电子科技大学场论与复变函数教学团队，2015.

西安電子科技大學
XIDIAN UNIVERSITY

第一章 复数与复变函数

第一节 复数及其代数运算

一、复数的概念

二、代数运算

三、共轭复数

一、复数的概念

定义 (1) 设 x 和 y 是任意两个实数，将形如

$$z = x + iy \text{ (或者 } z = x + yi \text{)}$$

的数称为复数。其中 i 称为虚数单位，即 $i = \sqrt{-1}$.

(2) x 和 y 分别称为复数 z 的实部与虚部，并分别表示为：

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

(3) 当 $x = 0$ 时, $z = 0 + iy = iy$ 称为纯虚数；

当 $y = 0$ 时，$z = x + i0 = x$ 就是实数。

因此，实数可以看作是复数的特殊情形。

一、复数的概念

相等 设 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 是两个复数，

如果 $x_1 = x_2$，$y_1 = y_2$，则称 z_1 与 z_2 相等。

特别地，$z = x + iy = 0$ 当且仅当 $x = y = 0$.

注 复数与实数不同，两个复数(虚部不为零)不能比较大小，

它们之间只有相等与不相等的关系。

二、代数运算

•四则运算

设 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 是两个复数，

(1) 复数的加减法

加法 $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$;

减法 $z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$.

(2) 复数的乘除法

乘法 $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$;

除法 如果存在复数 z，使得 $z_1 = z_2 \cdot z$，则 $z = \dfrac{z_1}{z_2} (z_2 \neq 0)$.

二、代数运算

(3) 运算法则

交换律 $z_1+z_2=z_2+z_1$;

$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$.

结合律 $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$;

$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$.

分配律 $z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$.

三、共轭复数

1. 共轭复数的定义

定义 设 $z = x + iy$ 是一个复数，

称 $z = x - iy$ 为 z 的共轭复数， 记作 $\overline{z}$ 。

注 共轭复数有许多用途。

比如 $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}}$$

三、共轭复数

2. 共轭复数的性质

性质 (1) $\overline{\overline{z}} = z$;

(2) $\overline{z_1 \circ z_2} = \overline{z_1} \circ \overline{z_2}$,

其中，“∘”可以是 $+, -, \times, \div$;

$z \cdot \overline{z} = [\mathrm{Re}\, z]^2 + [\mathrm{Im}\, z]^2 = x^2 + y^2$

(3) $\dfrac{z + \overline{z}}{2} = \mathrm{Re}\, z = x \quad \dfrac{z - \overline{z}}{2i} = \mathrm{Im}\, z = y$

例 已知 $z_1=5-5i$，$z_1=-3+4i$，求 $\dfrac{z_1}{z_2}, \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

解 (1) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{5-5i}{-3+4i}=\dfrac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}=\dfrac{-35-5i}{25}=-\dfrac{7}{5}-\dfrac{1}{5}i.$

(2) $\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=-\dfrac{7}{5}+\dfrac{1}{5}i.$

例 证明 $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$.

证明 $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}\overline{\overline{z_2}}=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}=2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}).$

附：历史知识 —— 虚数史话

复数的概念起源于求方程的根，在二次、三次代数方程的求根中就出现了负数开平方的情况。在很长时间里，人们对这类数不能理解。但随着数学的发展，这类数的重要性就日益显现出来。

附：历史知识 —— 虚数史话

- 1545年，卡尔丹第一个认真地讨论了虚数，他在《大术》中求解这样的问题：

> 两数的和是10,积是40,求这两数.

卡尔丹发现只要把10分成 $5-\sqrt{-15}$ 和 $5+\sqrt{-15}$ 即可

- 卡尔丹称它们为“虚构的量”或“诡辩的量”。他还把它们与 负数统称为“虚伪数”；把正数称为“证实数”

- 卡尔丹的这种处理，遭到了当时的代数学权威韦达和他的学生哈里奥特的责难

附：历史知识 —— 虚数史话

- 整个十七世纪，很少有人理睬这种“虚构的量”。仅有极少数的科学家对其存在性问题争论不休。

- 1632年，笛卡尔在《几何学》中首先把这种“虚构的量”改称为“虚数”，与“实数”相对应。同时，还给出了如今意义下的“复数”的名称。

附：历史知识 —— 虚数史话

- 到了十八世纪，虚数才开始被关注起来。

- 1722 年，法国数学家棣莫弗给出棣莫弗定理：

$$(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta,$$

其中 n 是大于零的整数。

- 1748 年，欧拉给出了著名的公式：$e^{\sqrt{-1}x}=\cos x+\sqrt{-1}\sin x$，

并证明了棣莫弗定理对 n 是实数时也成立。

- 1777 年，欧拉在递交给彼德堡科学院的论文《微分公式》

中首次使用 i 来表示 $\sqrt{-1}$.

附：历史知识 —— 虚数史话

- 十八世纪末，高斯的出现使得复数的地位被确立下来。
- **1797** 年，当时年仅 **20** 岁的高斯在他的博士论文中证明了代数基本定理。即 任何多项式在复数域里必有根，而且 n 次多项式恰好有 n 个根。
- 高斯在证明中巧妙地给出了复数的几何表示，使得人们直观地理解了复数的真实意义。
- 十九世纪中叶以后，复变函数论开始形成，并逐渐发展成为一个庞大的数学分支。

附：人物介绍 —— 高斯

高 斯

Johann Carl Friedrich Gauss

(1777～1855)

德国数学家、物理学家、天文学家

- 许多数学学科的开创者和奠基人。
- 几乎对数学的所有领域都做出了重大贡献。
- 享有数学王子的美誉。

附：人物介绍 —— 高斯

- 高斯去世后，哥廷根大学对高斯的文稿进行了整理，历时67年，出版了《高斯全集》，共12卷。

- 在哥廷根大学的广场上，矗立着一座用白色大理石砌成的纪念碑，它的底座砌成 正十七边形，纪念碑上是高斯的青铜雕像。

第二节　复数的几何表示

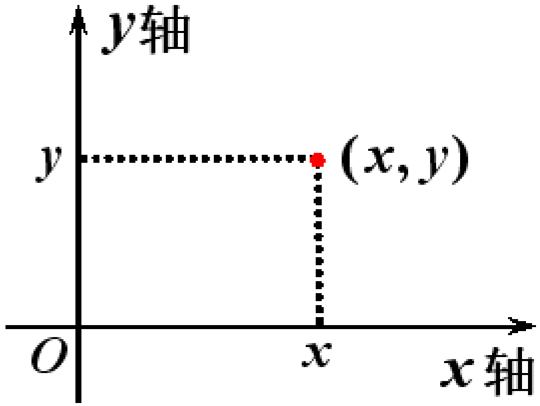
一、复数的几种表示方法

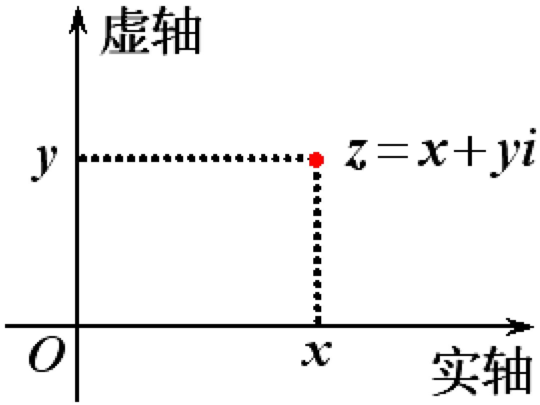
二、曲线的复数方程

一、复数的几种表示方法

1.1 复平面

定义 在平面上建立一个直角坐标系，用坐标为 (x, y) 的点来表示复数 $z = x + iy$，从而将全体复数和平面上的全部点一一对应起来，这样表示复数 z 的平面称为复平面或者 z 平面。 此时，x 轴称为实轴，y 轴称为虚轴。

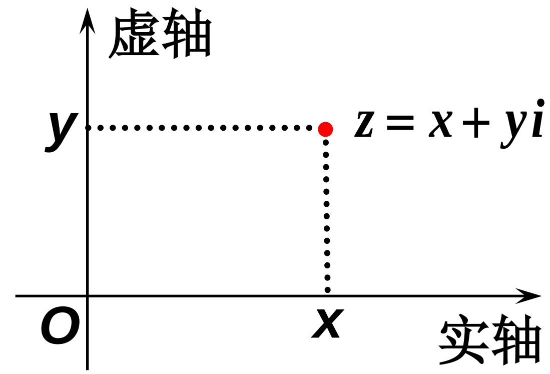




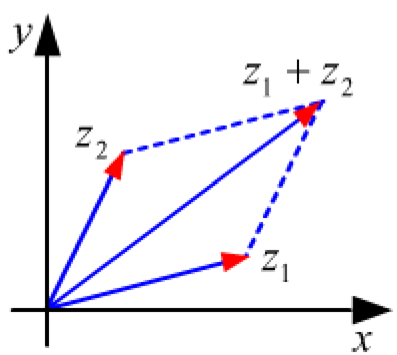
一、复数的几种表示方法

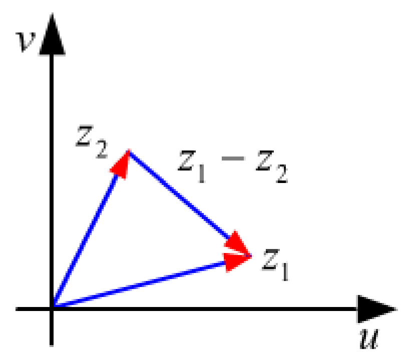
1.1 复平面

- 在复平面上，从原点到点 $z = x + iy$ 所引的向量与该复数 z 也构成一一对应关系(复数零对应零向量)。



- 引进复平面后，复数 z 与点 z 以及向量 z 视为同一个概念。
- 比如，复数的加减法等同于向量的平行四边形法则。

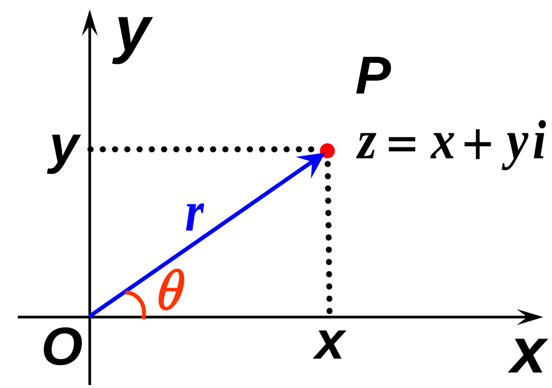




一、复数的几种表示方法

1.1 复平面

- 将复数和向量对应之后，除了利用实部与虚部来给定一个复数以外，还可以借助向量的长度与方向来给定一个复数。



定义 设 z 是一个不为 0 的复数，

(1) 向量 z 的长度 r 称为复数 z 的**模**，记为 $|z|$.

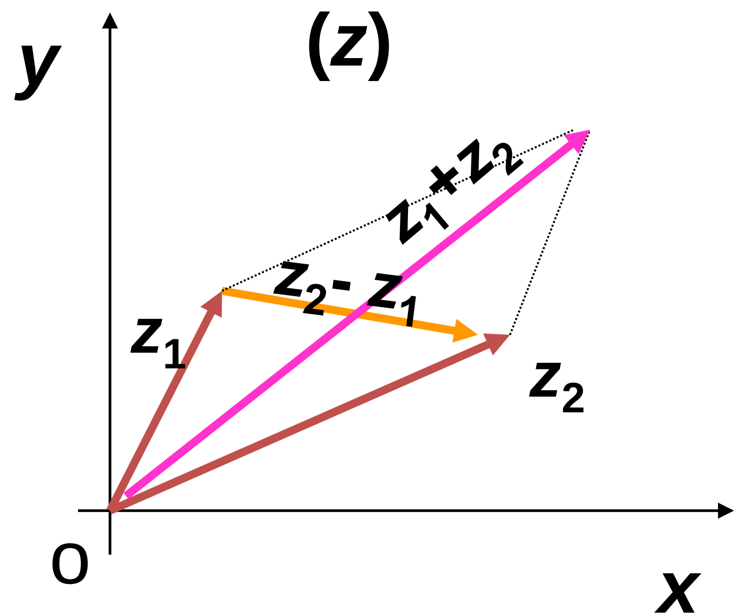
(2) 向量 z 的“方向角” θ 称为复数 z 的<u>辐角</u>，记为 $\mathrm{Arg}\,z$.

$$模:|z|=|\overrightarrow{OP}|=r=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$辐角:\theta \overset{记作}{=} \mathrm{Arg}\,z$$

一、复数的几种表示方法

1.2 复数的模与辐角



向量法: $z = x + iy \leftrightarrow \overrightarrow{op}$

复数的模 $|z| = |\overrightarrow{op}| \overset{\Delta}{=} r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$|x| \le |z|, |y| \le |z|, \ |z| \le |x| + |y|$$

$$z\bar{z} = |z|^2 = |z^2|$$

三角不等式 $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \ |z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$

几何上 $|z_1 - z_2|$ — 表示z_1与z_2两点间的距离

一、复数的几种表示方法

1.2 复数的模与辐角

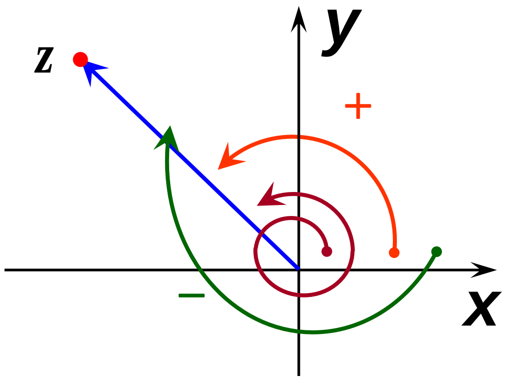
- 两点说明

(1) 辐角是多值的，相互之间可相差 $2k\pi$，其中 k 为整数。

(2) 辐角的符号约定为：逆时针取正号，顺时针取负号。

例如 对于复数 $z=-1+i$，则有 $|z|=\sqrt{2}$，

$$\operatorname{Arg} z=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots.$$



注 复数0的模为0，辐角无意义。

一、复数的几种表示方法

1.2 复数的模与辐角

主辐角 对于给定的复数 $z \neq 0$，设有 θ 满足：

$$\theta \in \operatorname{Arg} z \ \text{且}\ -\pi < \theta \le \pi,$$

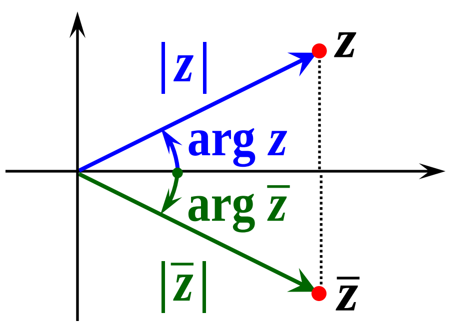
则称 θ 为复数 z 的主辐角，或辐角的主值，记作 $\arg z$.

- 由此就有如下关系：

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi,\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots.$$

$$z \neq 0\text{时}, \tan(\operatorname{Arg} z) = y / x$$

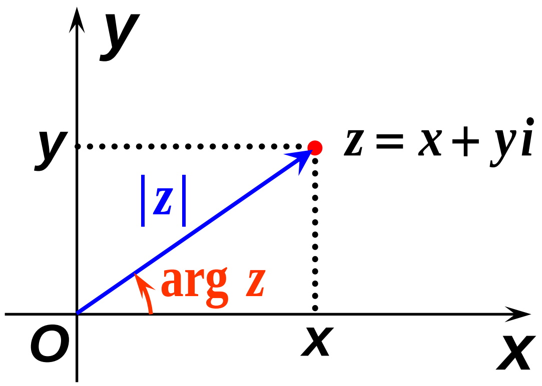
$$\arg z = -\arg \bar{z},\ (z\text{不在负实轴和原点})$$



一、复数的几种表示方法

1.3 相互转换关系

(1) 已知实部与虚部，求模与辐角。



$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\arg z = \begin{cases} \arctan(y/x), & x > 0,\ y \text{任意}, \\ \arctan(y/x) + \pi, & x < 0,\ y \geq 0, \\ \arctan(y/x) - \pi, & x < 0,\ y < 0, \\ \pi/2, & x = 0,\ y > 0, \\ -\pi/2, & x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

例 求复数 $z=\dfrac{2i}{1-i}+\dfrac{2(1-i)}{i}$ 的模与主辐角。

解 $z=\dfrac{2i}{1-i}+\dfrac{2(1-i)}{i}=-3-i.$

$$|z|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10},$$

$$\arg z=\arctan\left(\frac{-1}{-3}\right)-\pi$$

$$=\arctan\frac{1}{3}-\pi.$$

一、复数的几种表示方法

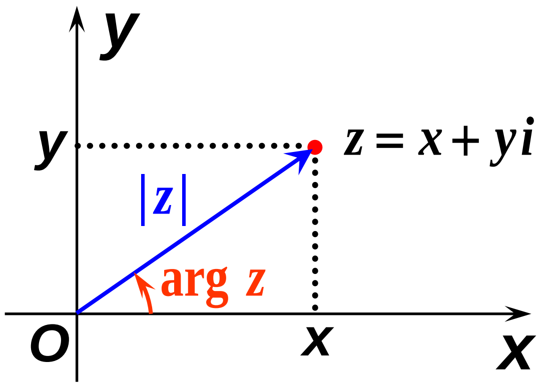
1.3 相互转换关系

（1） 已知实部与虚部，求模与辐角。

（2） 已知模与辐角，求实部与虚部。

$$x = |z|\cos(\arg z) = |z|\cos(\operatorname{Arg} z);$$

$$y = |z|\sin(\arg z) = |z|\sin(\operatorname{Arg} z).$$



- 由此引出复数的三角表示式。

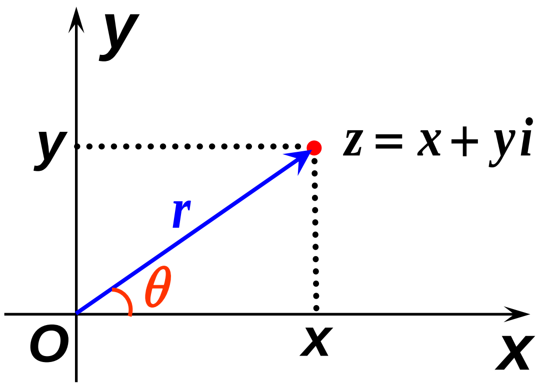
一、复数的几种表示方法

2.1 复数的三角表示

- 如图，由 $x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta,$

  有 $z=r\cos\theta+i\,r\sin\theta$

  $=r(\cos\theta+i\sin\theta).$



定义 设复数 $z\neq 0$，r 是 z 的模, θ 是 z 的任意一个辐角，称 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 为复数 z 的三角表示式。

一、复数的几种表示方法

2.2 复数的指数表示

- 利用欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 得

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}.$$

定义 设复数 $z\neq 0$， r 是 z 的模，θ 是 z 的任意一个辐角，

称 $z=re^{i\theta}$ 为复数 z 的指数表示式。

注 在复数的三角表示式与指数表示式中，辐角不是唯一的，

但习惯上一般取为主辐角。

例 写出复数 $z=-\sqrt{12}+2i$ 的三角表示式与指数表示式。

解 $|z|=\sqrt{12+4}=4,$

$$\arg z=\arctan\left(\frac{2}{-\sqrt{12}}\right)+\pi$$

$$=-\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi$$

$$=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}.$$

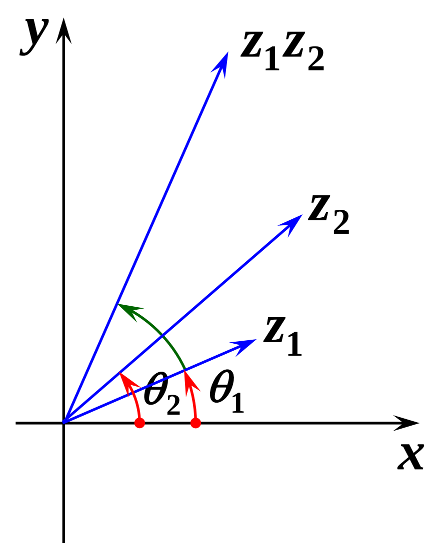
复数z的三角表示式为 $z=4\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$

复数 z 的指数表示式为 $z=4e^{\frac{5\pi}{6}i}.$

一、复数的几种表示方法

2.3 利用指数表示进行复数的乘除法运算

设 $z_1 = r_1\mathrm{e}^{i\theta_1}$， $z_2 = r_2\mathrm{e}^{i\theta_2}$，



乘法 $$z_1 \cdot z_2 = r_1\mathrm{e}^{i\theta_1} \cdot r_2\mathrm{e}^{i\theta_2}$$

$$= r_1 r_2 \mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

即 $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$，

$$\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 .$$

- 两个复数乘积的 模等于它们的模的乘积；幅角等于它们幅角的和。

一、复数的几种表示方法

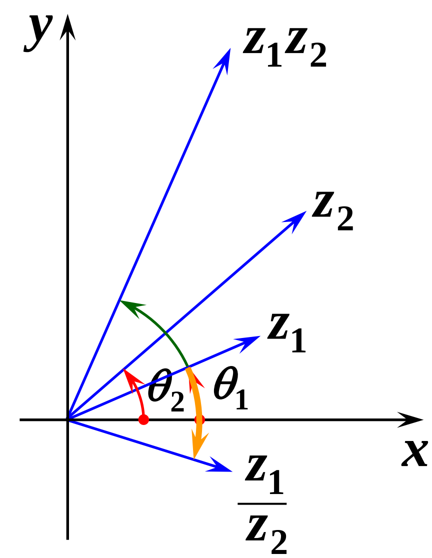
2.3 利用指数表示进行复数的乘除法运算

设 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$， $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$，

除法 $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

即 $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$



- 两个复数的商的 模等于它们的模的商；幅角等于它们幅角的差。

特别注意：$\mathrm{Arg}(z_1 \cdot / \div z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 \pm \mathrm{Arg}\, z_2$ 正确理解

由于辐角的多值性，该等式两端都是由无穷多个数构成的两个数集，等式两端可能取的值的全体是相同的。也就是说，对于左端的任一值，右端必有一值和它相等，反过来也一样。

也就是说：

分别从集合 $\mathbf{Arg}\, z_1$ 中与集合 $\mathbf{Arg}\, z_2$ 中任取一个元素(即辐角)，相加后，得到集合 $\mathrm{Arg}(z_1 \cdot / \div z_2)$ 中的一个元素(即辐角)。

例 计算 $\dfrac{i}{1-i}$.

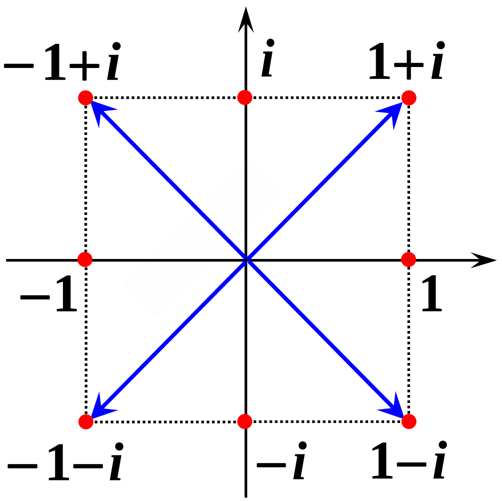
解 由 $i=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}i}$, $1-i=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i}$ 有

$$\frac{i}{1-i}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}i}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})i}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}i}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

附 一些“简单”复数的指数形式

$$\mathrm{e}^{2\pi i}=1,\quad \mathrm{e}^{2k\pi i}=1,\quad \mathrm{e}^{\pi i}=-1,$$

$$\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}i}=i,\quad \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}i}=-i,\quad \cdots\cdots.$$



例 计算 $(1+\sqrt{3}i)(-\sqrt{3}-i)$ 和 $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}-i}$.

解 由 $1+\sqrt{3}i=2e^{\frac{\pi}{3}i}$, $-\sqrt{3}-i=2e^{-\frac{5\pi}{6}i}$ 有

$$(1+\sqrt{3}i)(-\sqrt{3}-i)=2e^{\frac{\pi}{3}i}\cdot 2e^{-\frac{5\pi}{6}i}=4e^{(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6})i}$$

$$=4e^{-\frac{\pi}{2}i}=-4i.$$

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}-i}=\frac{2e^{\frac{\pi}{3}i}}{2e^{-\frac{5\pi}{6}i}}=e^{(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6})i}=e^{\frac{7\pi}{6}i}$$

$$=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$$

附：人物介绍 —— 欧拉

- 如今几乎每一个数学领域都可以看到欧拉的名字：

初等几何的欧拉线

多面体的欧拉定理

解析几何的欧拉变换

四次方程的欧拉解法

数论中的欧拉函数

微分方程的欧拉方程

复变函数的欧拉公式

变分学的欧拉方程

级数论的欧拉常数

…………

附：人物介绍 —— 欧拉

欧 拉

Leonhard Euler

(1707～1783)

瑞士数学家、自然科学家

- 十八世纪数学界最杰出的人物之一。
- 数学史上最多产的数学家。
- 不但为数学界作出贡献，而且把数学推至几乎整个物理领域。

附：人物介绍 —— 欧拉

- 欧拉是科学史上最多产的一位杰出的数学家。以每年平均**800** 页的速度写出创造性论文。一生共写下**886**本书籍和论文。

  其中　分析、代数、数论占**40%**，几何占**18%**，
  物理和力学占**28%**，天文学占**11%**，
  弹道学、航海学、建筑学等占**3%**，

- 彼得堡科学院为了整理他的著作，足足忙碌了 **47** 年。整理出他的研究成果多达 **74** 卷。
  (牛顿全集 8 卷，高斯全集 12 卷)

附：人物介绍 —— 欧拉

- 欧拉极其顽强的毅力！

可以在任何不良的环境中工作。

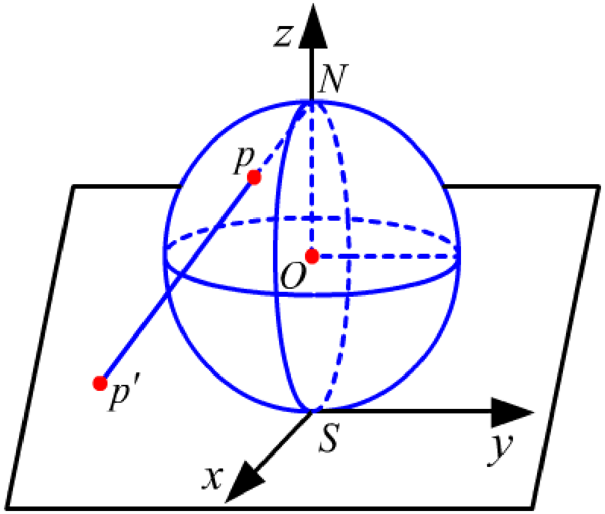
常常抱着孩子在膝上完成论文。

在双目失明以后，也没有停止对数学的研究。

在失明后的 **17** 年间，还口述了**400** 篇左右的论文。

一、复数的几种表示方法

3.1 复球面



如图，作一球面与复平面在坐标圆点相切

- 其中，N 为北极，S 为南极。
- 对复平面上的任一点 p',用直线将 p' 点与 N 点相连，与球面相交于 p 点。
- 相反的，球面上除 N 点外的任意点 p，用一直线段把 p 点和 N 连接起来，这条线的延长线与复平面相交于一点 p 。即

$$\text{复平面上点}z \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{球面上点}P(\text{除}N\text{点})$$

这样的球面称作复球面。

一、复数的几种表示方法

3.2 无穷远点与无穷大

定义 当 z 点无限远离原点时，或当 $|z|$ 无限变大时，点 P 就无限接近于 N，即 当$|z| \to +\infty$时，$P \to N$ 。与复球面上点 N 对应的复平面上的唯一点，称为无穷远点。

定义 在复数中与复平面上的无穷远点相对应的唯一复数，称为无穷大，记为 ∞，满足 $\frac{1}{\infty}$ 。

一、复数的几种表示方法

3.2 无穷远点与无穷大

法则

(1) $z \pm \infty = \infty \pm z = \infty, \quad (z \neq \infty);$

(2) $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty, \quad (z \neq 0);$

(3) $\dfrac{z}{\infty} = 0, \quad \dfrac{\infty}{z} = \infty, \quad (z \neq \infty).$

问题

- 实部虚部是多少? $\mathrm{Re}\,\infty$, $\mathrm{Im}\,\infty$ 均无意义。
- 模与辐角是多少? $|\infty| = +\infty$, $\mathrm{Arg}\,\infty$ 无意义。

一、复数的几种表示方法

3.3 扩充复平面

定义 （1）包括无穷远点在内的复平面称为扩充复平面；

（2）不包括无穷远点在内的复平面称为有限复平面，

或者简称为复平面。

二、曲线的复数方程

已知曲线：$F(x,y)=0,$

若令 $z=x+iy,$ 　　则 $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2},\ y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

代入得：$F\left(\dfrac{z+\bar{z}}{2},\dfrac{z-\bar{z}}{2i}\right)=0$ 为曲线的复数形式方程.

- 如何相互转换?

(1) $f(x,y)=0 \xrightarrow[y=(z-\bar{z})/(2i)]{x=(z+\bar{z})/2} \tilde{f}(z)=0.$

(2) $f(z)=0 \xrightarrow{z=x+iy} \tilde{f}(x,y)=0.$

- 在直角平面上 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta).$

- 在复平面上 $z = z(t) = x(t) + i\,y(t),\ (\alpha \le t \le \beta).$

考察以原点为圆心、以 R 为半径的圆周的方程。

(1) 在直角平面上 $\begin{cases} x = x(\theta) = R\cos\theta, \\ y = y(\theta) = R\sin\theta, \end{cases} \quad (0 \le \theta \le 2\pi).$

(2) 在复平面上 $z = z(\theta) = x(\theta) + i\,y(\theta) = R(\cos\theta + i\sin\theta),$

$$\Rightarrow \quad z = R\mathrm{e}^{i\theta}, \quad (0 \le \theta \le 2\pi).$$

例1 指出下列方程表示的曲线

(1) $|z+i|=2$

解:法 1.

由几何意义 $|z+i|=2$ 即$|z-(-i)|=2$ 表示到$-i$

距离为2的点的轨迹，即圆 $x^2+(y+1)^2=4$

法 2. 将$z=x+iy$代入得：$|x+(y+1)i|=2$

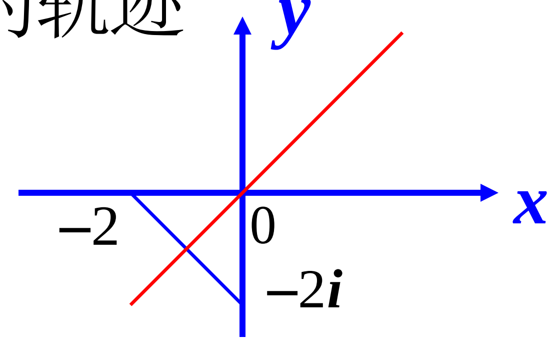
$$\therefore |x+(y+1)i|^2=4 \quad \text{即} \quad x^2+(y+1)^2=4$$

(2) $|z+2i|=|z+2|$

解: 由几何意义，$|z+2i|=|z+2|$ 即 $|z-(-2i)|=|z-(-2)|$

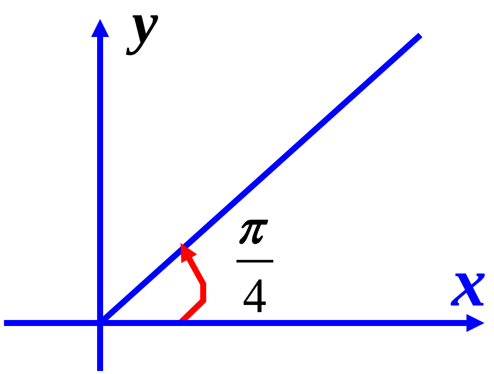
表示到$-2i$与到-2距离相等的点的轨迹

即 $y=x$

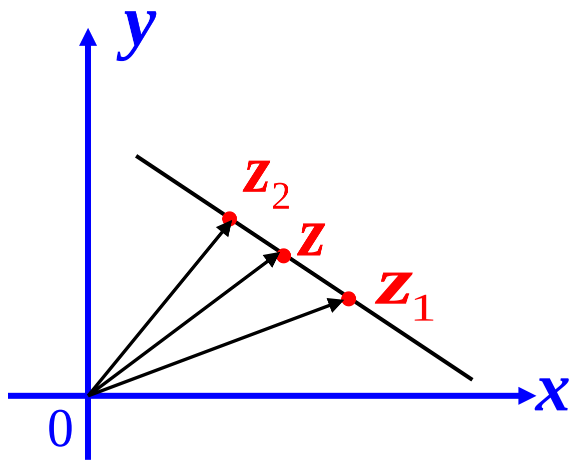


(3) $\arg z=\dfrac{\pi}{4}$

解: 由几何意义，$\arg z=\dfrac{\pi}{4}$表示主辐角为$\dfrac{\pi}{4}$的射线 $y=x\ (x>0)$



例2 求通过z_1,z_2两点的直线方程.



解: 由向量的性质

$$z-z_1=t(z_2-z_1)\quad t\text{是实数}$$

$$\therefore\ z=z_1+t(z_2-z_1),-\infty<t<+\infty$$

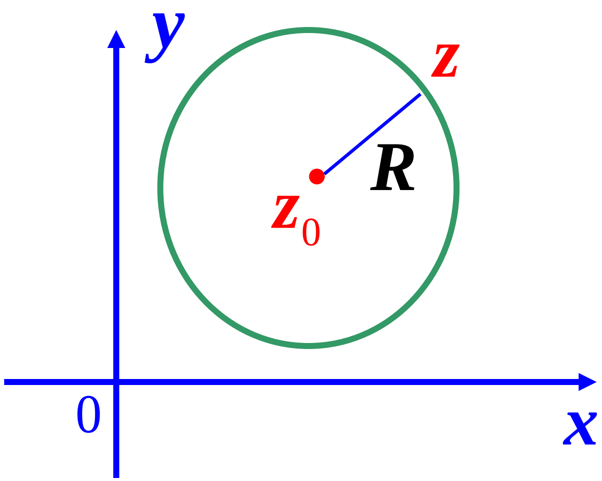
称为复数的参数方程

而 $z=z_1+t(z_2-z_1),0\le t\le 1$表示$z_1$到$z_2$的直线段

显然z_1与z_2的中点$z_3=\dfrac{z_1+z_2}{2}$

由此可知：三点z_1，z_2，z_3，共线$\Leftrightarrow\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=t$（实数）

例3 求以z_0为中心，R为半径的圆周方程.



解: 由几何意义，圆的方程为

$$|z-z_0|=R \text{ 或 } z=z_0+Re^{i\theta}$$

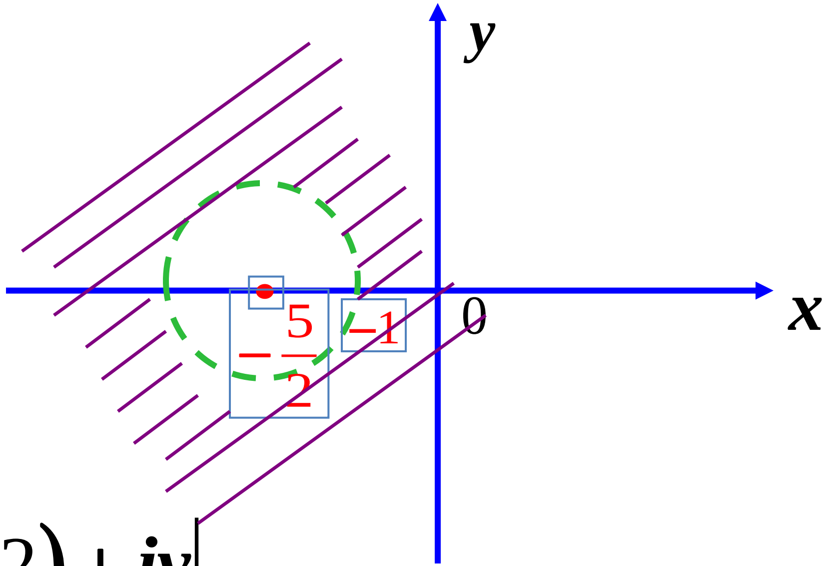
$$(0\le\theta\le 2\pi, \theta\text{为参数})$$

特别的，z_0为坐标圆点时, $|z|=R$ 或 $z=Re^{i\theta}$

$$(0\le\theta\le 2\pi, \theta\text{为参数})$$

例4 指出满足下列条件的点 z 的全体所构成的图形.

(1) $\left|\dfrac{z-2}{z+2}\right|<3$



解: 设 $z=x+iy$,

则 $|z-2|<3|z+2|$

即为 $|(x-2)+iy|<3|(x+2)+iy|$

$$(x-2)^2+y^2<9(x+2)^2+9y^2$$

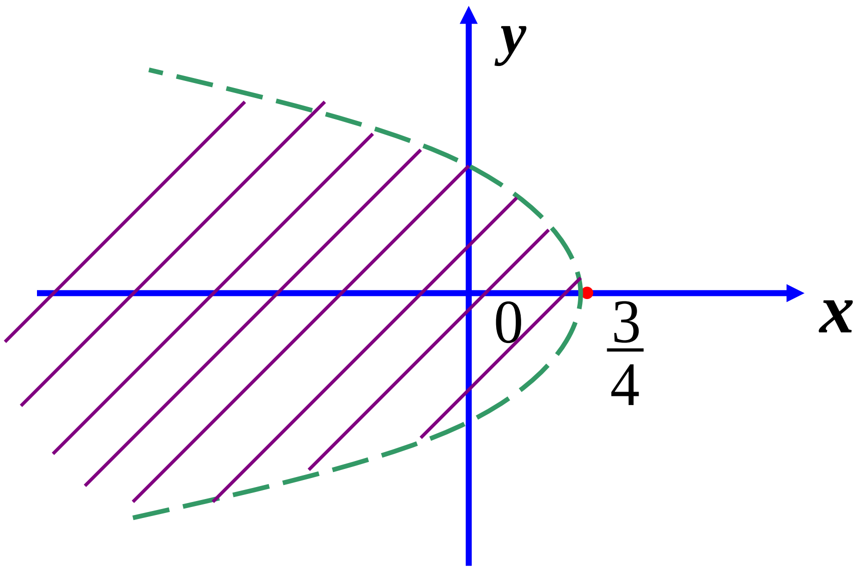
整理得: $\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+y^2>\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

(2) $2|z|+2\,\mathrm{Re}\,z\le 3$

解: 设 $z=x+iy$, 则 $2|z|+2\,\mathrm{Re}\,z\le 3$

即为 $2\sqrt{x^2+y^2}+2x\le 3$

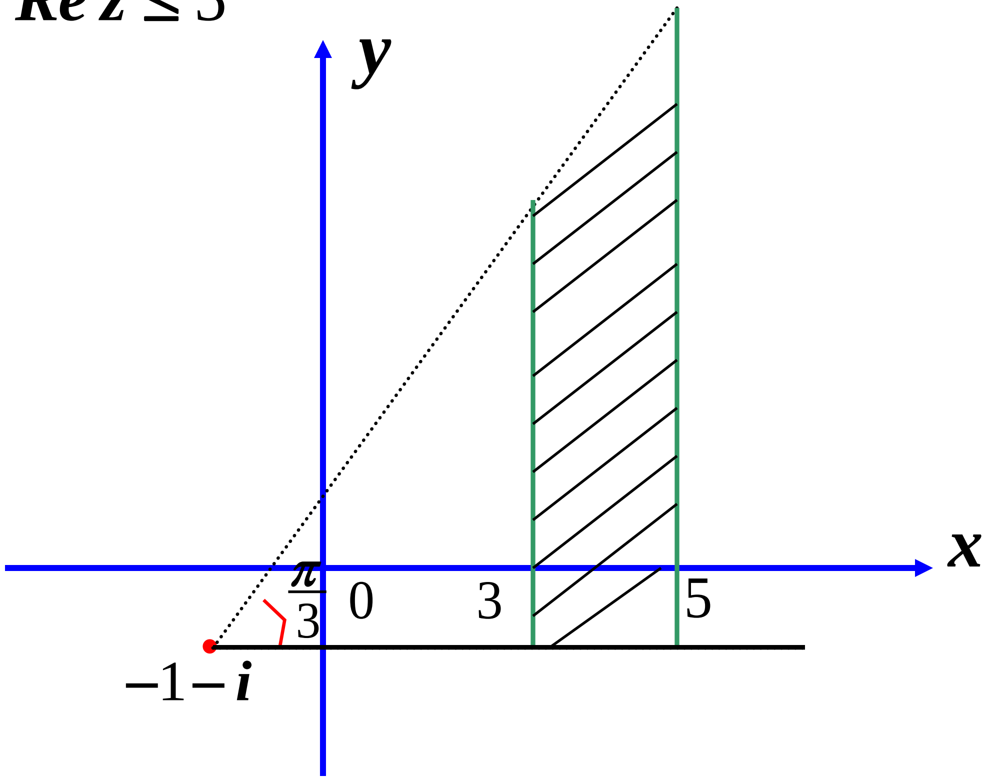
整理得: $y^2<-3x+\dfrac{9}{4}$



(3) $0 \le \arg(z+1+i) < \dfrac{\pi}{3}$ 且 $3 \le \operatorname{Re} z \le 5$

解: 由几何意义: $\begin{cases} 0 \le \arg[z-(-1-i)] < \dfrac{\pi}{3} \\ 3 \le \operatorname{Re} z \le 5 \end{cases}$

如图:



另解:

设 $z = x + iy$, 则由 $0 \le arg\left[(x+1)+i(1+y)\right] < \frac{\pi}{3}$

得 $0 \le arctan\frac{1+y}{1+x} < \frac{\pi}{3}$

即 $0 \le \frac{1+y}{1+x} < \sqrt{3}$

解出：$-1 \le y < \left(\sqrt{3}-1\right)+\sqrt{3}x$ 且 $3 \le x \le 5$, 如图.

第三节 复数的乘幂与方根

一、复数的乘幂

二、复数的方根

一、复数的乘幂

定义 设 z 是给定的复数，n 为正整数，n 个 z 相乘的积称为复数 z 的<u>乘幂</u>，记为 z^n，即 $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n个}$.

- 利用复数的指数表示式可以很快得到乘幂法则。

法则 设 $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$，则 $z^n = (r\mathrm{e}^{i\theta})^n = r^n \mathrm{e}^{in\theta}$.

定义 $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$. 由定义得 $z^{-n} = r^{-n} e^{-in\theta}$

一、复数的乘幂

棣莫弗(De Moivre)公式

由 $z^n = (r\mathrm{e}^{i\theta})^n = r^n \mathrm{e}^{in\theta}$ 以及复数的三角表示式可得

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

在上式中令 $r = 1$，则得到棣莫弗(De Moivre)公式:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

例 $$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=(e^{\frac{\pi}{3}i})^2=e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=(e^{\frac{\pi}{3}i})^3=e^{\pi i}=-1.$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=(e^{-\frac{\pi}{3}i})^3=e^{-\pi i}=-1.$$

二、复数的方根

- 复数求方根是复数乘幂的逆运算。

定义 设z是给定的复数，n是正整数，求所有满足$w^n = z$的复数w，称为把复数z开 n 次方，或者称为求复数z的n次方根，

记作 $w = \sqrt[n]{z}$ 或 $w = z^{1/n}$.

- 复数 z 的 n 次方根一般是多值的。

二、复数的方根

- 利用复数的指数表示式可以很快得到开方法则。

推导 设 $z=r\,\mathrm{e}^{i\theta}$，$w=\rho\,\mathrm{e}^{i\varphi}$， 由 $w^n=z$ 有 $\rho^n\,\mathrm{e}^{in\varphi}=r\,\mathrm{e}^{i\theta}$,

即 $\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$,

得 $\rho^n=r$, $\Rightarrow$ $\rho=\sqrt[n]{r}$; —— 正实数的算术根。

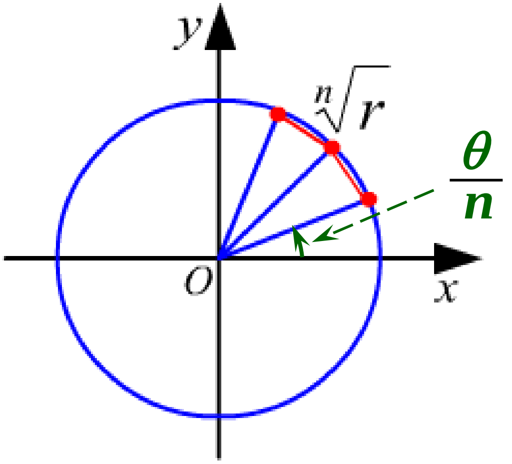
$$n\varphi=\theta+2k\pi, \quad \Rightarrow \quad \varphi_k=\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}, \ (k=0,\pm1,\cdots,\pm n-1).$$

法则 设 $z=r\,\mathrm{e}^{i\theta}$， 则 $w_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, $(k=0,1,\cdots,n-1)$.

二、复数的方根

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)},\quad (k=0,1,\cdots,n-1).$$

描述 在复平面上，这 n 个根均匀地分布在一个以原点为中心、以 $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆周上。其中一个根的辐角是 (θ/n).

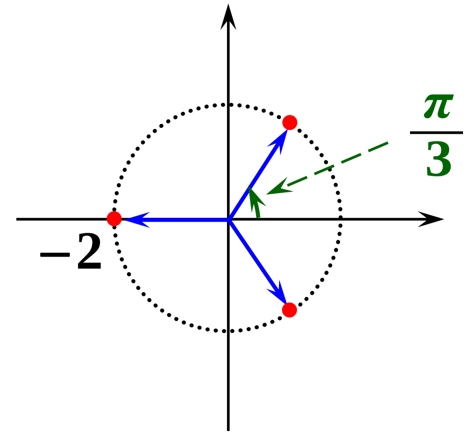


当k=0，1，…，n-1时，可得n个不同的根，而k取其它整数时，这些根又会重复出现。

例 求 $\sqrt[3]{-8}$.

解 $\sqrt[3]{-8}=2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)},\quad (k=0,1,2).$

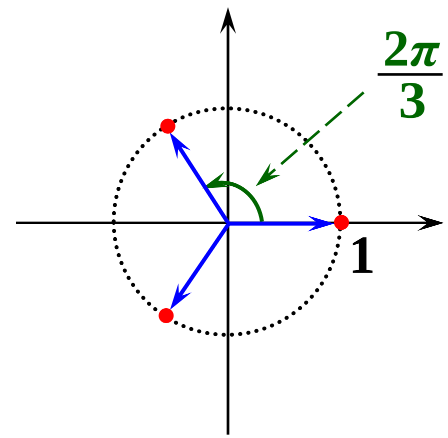
具体为：$-2,\quad 2e^{\frac{\pi}{3}i},\quad 2e^{-\frac{\pi}{3}i}.$



例 求解方程 $z^3-1=0$.

解 $z=\sqrt[3]{1}=1\cdot e^{i\left(\frac{0}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)},\quad (k=0,1,2).$

具体为：$1,\quad e^{\frac{2\pi}{3}i},\quad 2e^{-\frac{2\pi}{3}i}.$



第四节　区域

一、区域的概念

二、连通域

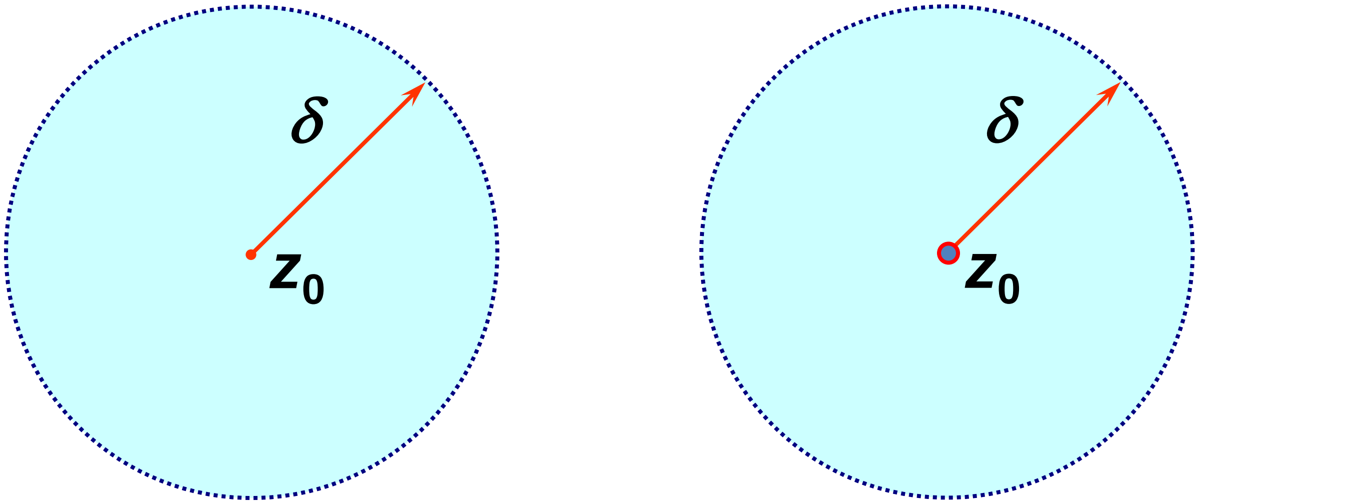
一、区域的概念

1.1 邻域

定义 设 z_0 为复平面上的一点，$\delta > 0$,

(1) 称点集 $\{z : |z - z_0| < \delta\}$为 z_0 点的δ 邻域;

(2) 称点集 $\{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$为 z_0 点的δ 去心邻域。

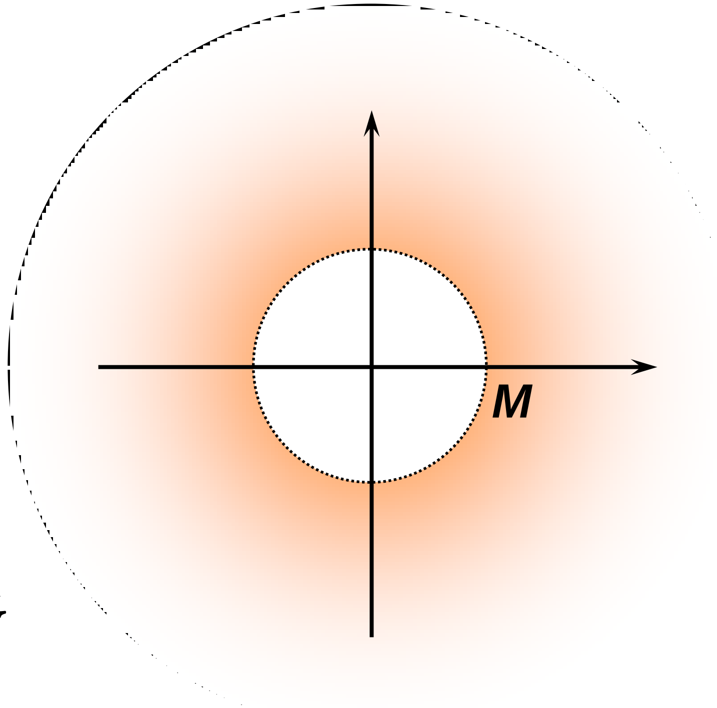


一、区域的概念

1.2 无穷远点的邻域

定义 设实数 $M>0$，

(1) 包括无穷远点在内且满足 $|z|>M$ 的所有点的集合，称为无穷远点的邻域。



(2) 不包括无穷远点在内且满足 $|z|>M$ 的所有点的集合，称为无穷远点的去心邻域，也可记为 $M<|z|<+\infty$.

一、区域的概念

1.3 内点、外点与边界点

考虑某平面点集 G 以及某一点 z_0，

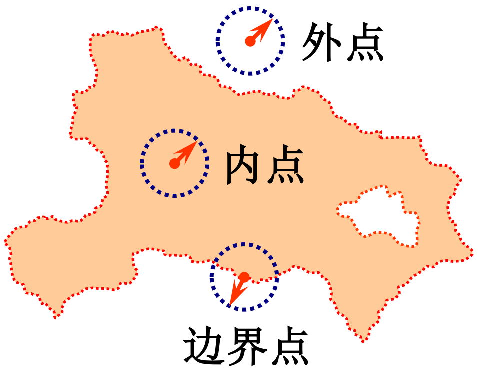
内点 (1) $z_0 \in G$； (2) $\exists \delta > 0, \forall z : |z - z_0| < \delta$, 有 $z \in G$.

外点 (1) $z_0 \notin G$； (2) $\exists \delta > 0, \forall z : |z - z_0| < \delta$, 有 $z \notin G$.

边界点 (1) z_0 不一定属于 G；

(2) $\forall \delta > 0$, 在 $|z - z_0| < \delta$ 中，

既有 $z \in G$，又有 $z \notin G$.



边界 G 的边界点的全体称为 G 的边界。

一、区域的概念

1.4 开集与闭集

开集 如果 G 的每个点都是它的内点，则称 G 为开集。

闭集 如果 G 的边界点全部都属于 G，则称 G 为闭集。

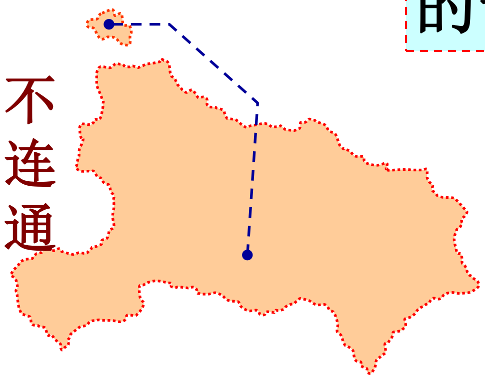
一、区域的概念

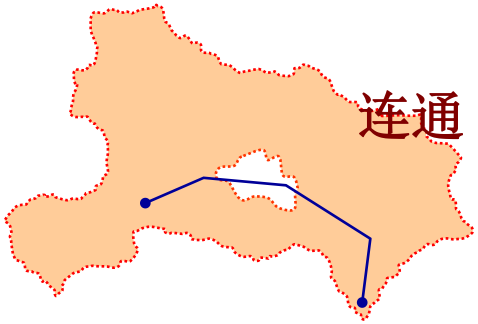
1.5 区域与闭区域

区域 平面点集 D 称为一个区域，如果它满足下列两个条件:

(1) D 是一个开集;

(2) D是连通的，即 D 中任何两点都可以用完全属于 D 的一条折线连接起来。





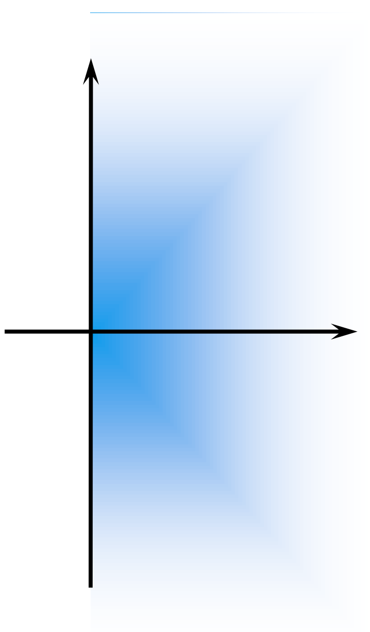
闭区域 区域 D 与它的边界一起构成闭区域或闭域，记作 $\overline{D}$。

有界区域：若 $\exists M>0$，对 $\forall z\in D$，有 $|z|\le M$ 称D为有界区域。

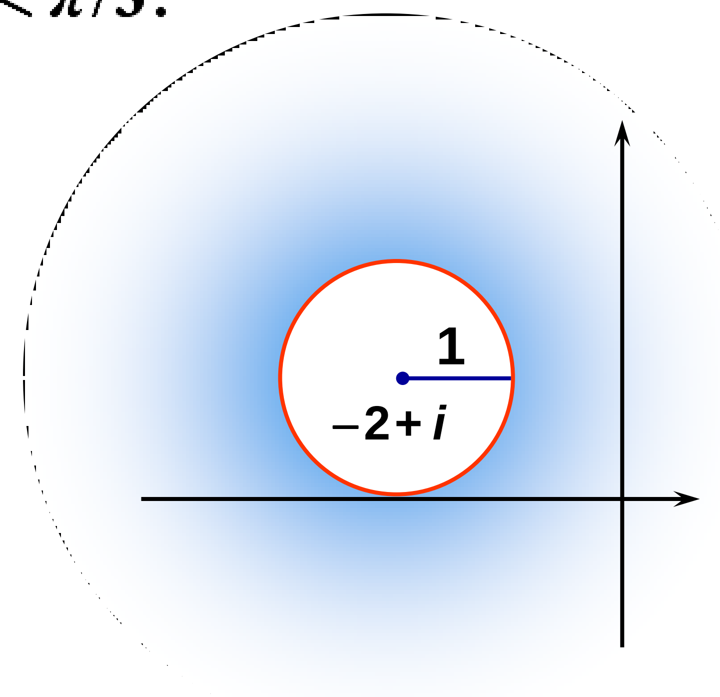
例 (1) $z+\bar{z}>0, \quad \Rightarrow \quad x>0;$

(2) $|z+2-i|\geq 1, \quad \Rightarrow \quad |z-(-2+i)|\geq 1;$

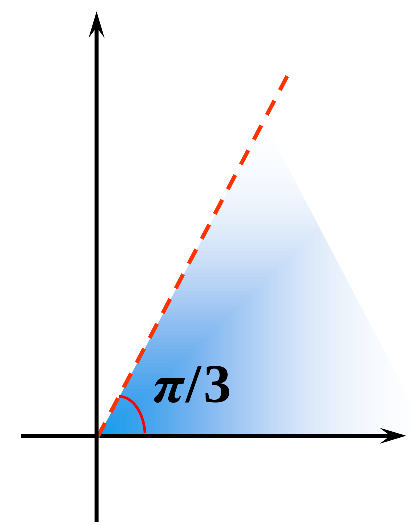
(3) $0<\arg z<\pi/3.$



区域



闭区域



(角形)区域

二、连通域

2.1 平面曲线

连续曲线: 设 $x(t), y(t)$ 是实变量 t 的连续函数，则

曲线C: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(a \le t \le b)$ 为平面上连续曲线.

如果令 $z(t) = x(t) + iy(t)$，则曲线C又记为$z = z(t)$，

称为复变量实参数曲线方程。

光滑曲线:

设 $x'(t), y'(t)$ 连续，且对$\forall t \in [a,b]$

$x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$，则曲线$z = z(t)$为光滑曲线.

有限条光滑曲线相连接构成一条分段光滑曲线。

二、连通域

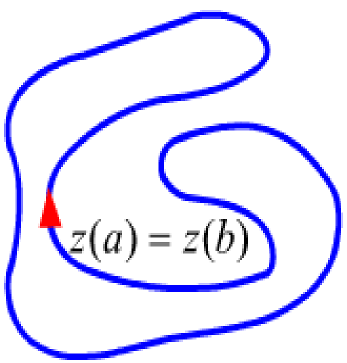
2.1 平面曲线

考虑连续曲线 $z=z(t)=x(t)+iy(t)$，$(\alpha\le t\le\beta)$.

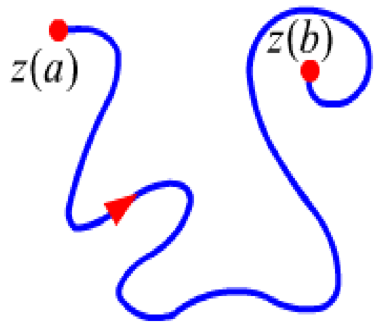
简单曲线 $\forall t_1\in(\alpha,\beta)$, $t_2\in[\alpha,\beta]$, 当 $t_1\ne t_2$ 时，$z(t_1)\ne z(t_2)$.

或称为若尔当(Jardan)曲线,即无重点曲线

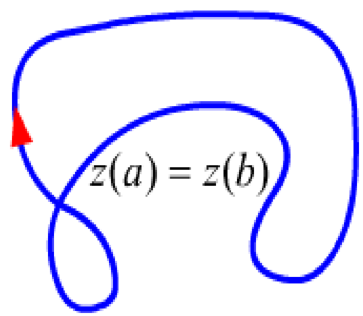
简单闭曲线 简单曲线且 $z(\alpha)=z(\beta)$. 即起点与终点重合



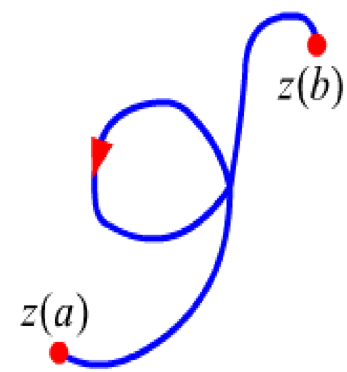
简单、闭



简单、不闭



不简单、闭



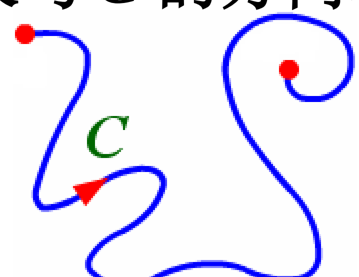
不简单、不闭

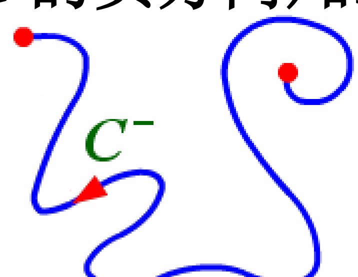
二、连通域

2.1 平面曲线

任一条简单闭曲线 C：$z=z(t)$， $t\in[a, b]$，把复平面唯一地分成三个互不相交的部分：有界区域，称为C的内部；一个是无界区域，称为C的外部；还有一个是它们的公共边界。

有向曲线：设 C 为平面上一条给定的光滑(或分段光滑)曲线，如果指定 C 的两个可能方向中的一个作为正向，则 C 为带有方向的曲线，称为有向曲线，仍记为 C。相应地，C^- 则代表与 C 的方向相反(即 C 的负方向)的曲线。





二、连通域

2.1 平面曲线

- 简单闭曲线的正向一般约定为：逆时针方向。

当曲线上的点 P 顺此方向沿曲线前进时，曲线所围成的有界区域始终位于 P 点的左边。

- 区域边界曲线的正向一般约定为：

当边界上的点 P 顺此方向沿边界前进时，所考察的区域始终位于 P 点的左边。

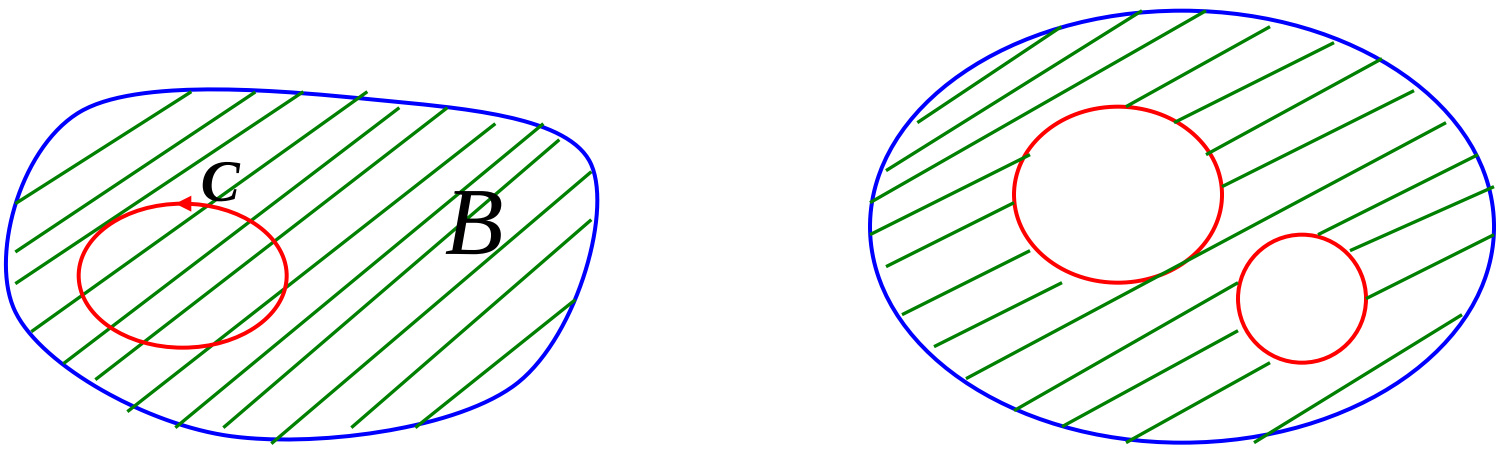
注意区域可以是多连域。

二、连通域

2.2 单连通域与多连通域

定义 复平面上的一个区域B，如果B内的任何简单闭曲线的内部总在B内，就称 B为单连通域；非单连通域称为多连通域。

特征 单连通域B，属于B的任何一条简单闭曲线，在B内可以经过连续的变形而缩成一点，而多连通域不具备这个特征。



单连通域（无洞）　　　　多连通域（有洞）

第五节　复变函数

一、复变函数的定义

二、映射的概念

一、复变函数的定义

基本概念 —与实变函数定义相类似

定义　设G是一个复数$z = x + iy$的非空集合,存在法则f,使得$\forall z \in G$,就有一个或几个$w = u + iv$与之对应,则称复变数w是复变数z的函数（简称复变函数记作$w = f(z)$.

G—定义域，　$G^* = \{w \mid w = f(z), z \in G\}$—值域

一、复变函数的定义

- 单值函数 对每个 $z \in G$,有唯一的 w 与它对应;

  比如 $w = f(z) = z^2$.

- 多值函数 对每个 $z \in G$,有多个 w 与它对应;

  比如 $w = \sqrt[3]{z}$, $w = \mathrm{Arg}\, z$.

一般情形下,所讨论的“函数”都是指单值函数。

一、复变函数的定义

基本概念——复变函数与实变函数之间的关系

$$\because z = x + iy \leftrightarrow (x, y),\quad w = u + iv \leftrightarrow (u, v)$$

$$\therefore\ w = f(z):\quad \forall (x, y) \in G \xrightarrow{f} \exists (u, v) \in G^*$$

等价于确定了两个实变量二元函数$u = u(x, y), v = v(x, y)$

故记 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

- 一个复变函数对应两个二元实变函数——转化为对实变函数的研究

例如：$w = z^2 \Leftrightarrow u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

即 $u = x^2 - y^2$，$v = 2xy$

例 将复变函数 $w=z^2+1$ 化为一对实变函数。

解 记 $z=x+iy$，$w=u+iv$，

代入 $w=z^2+1$ 得

$$u+iv=(x+iy)^2+1=(x^2-y^2+1)+i(2xy),$$

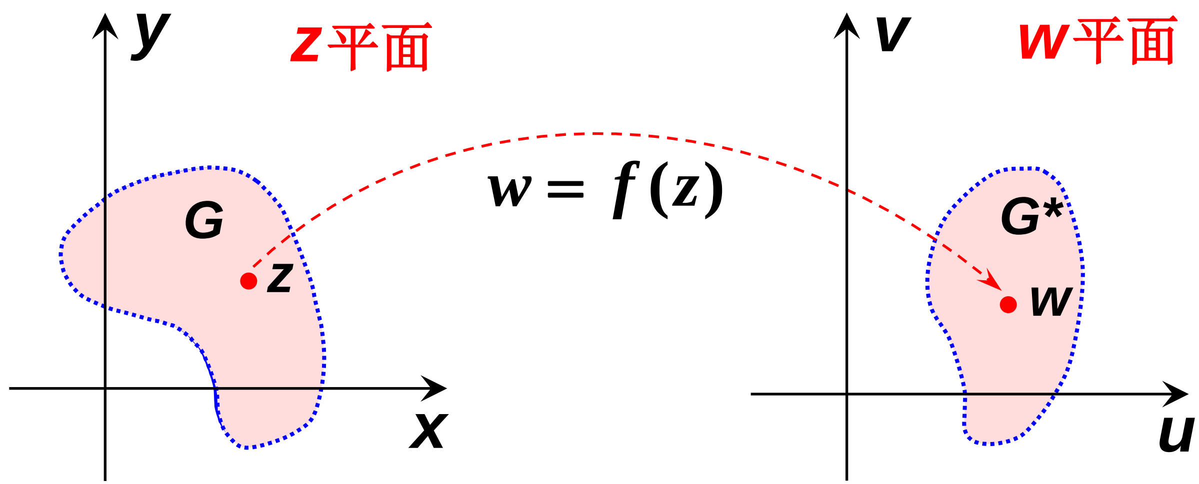
分开实部与虚部即得

$$u=x^2-y^2+1,$$

$$v=2xy.$$

二、映射的概念

图形表示——复变函数的几何意义



映射　复变函数 $w=f(z)$ 在几何上被看作是 z 平面上的一个点集 G 变到 w 平面上的一个点集 G^* 的映射(或者变换)。其中，点集 G^* 称为像，点集 G 称为原像。

- 函数、映射以及变换可视为同一个概念。

二、映射的概念

反函数与逆映射

设函数 $w=f(z)$ 的定义域为 z 平面上的点集 G，函数值集合为 w 平面上的点集 G^*，则 G^* 中的每个点 w 必将对应着 G 中的一个(或几个)点 z，按照函数的定义，在 G^* 上就确定了一个函数 $z=\tilde{f}(w)$，它称为函数 $w=f(z)$ 的反函数，也称为映射 $w=f(z)$ 的逆映射。

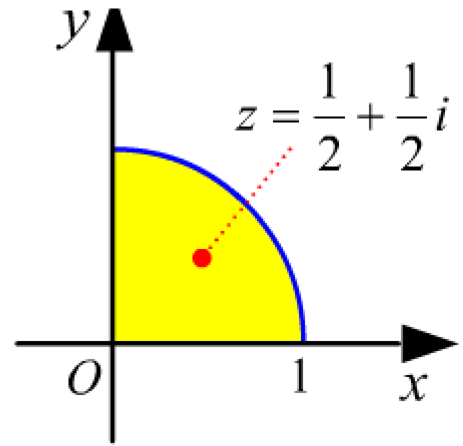
一一映射

若映射 $w=f(z)$ 与它的逆映射 $z=\tilde{f}(w)$ 都是单值的，则称映射 $w=f(z)$ 是一一映射。

例 已知函数 $w=z^2$，求下列点集的像。

(1) 点 $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$； (2) 区域 $D=\{z:\operatorname{Im}z>0,\operatorname{Re}z>0,|z|<1\}$.

解 (1) 点 $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ 对应的点为 $w=\frac{1}{2}i$.



(2) 区域 D 可改写为：

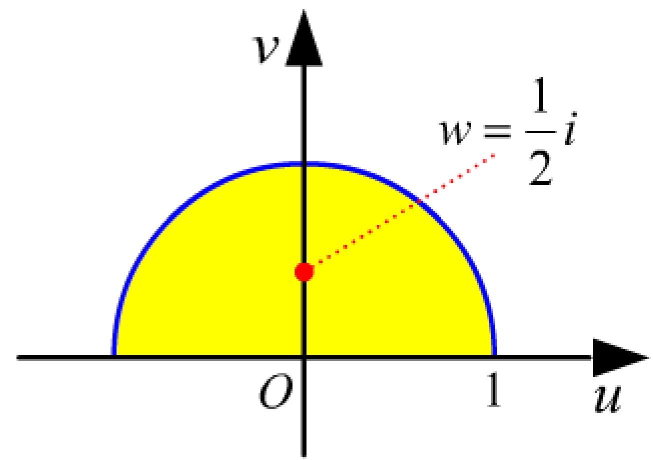
$$D=\{z:0<|z|<1,\ 0<\arg z<\pi/2\},$$

令 $z=re^{i\theta}$，则 $w=z^2=r^2e^{i2\theta}$，

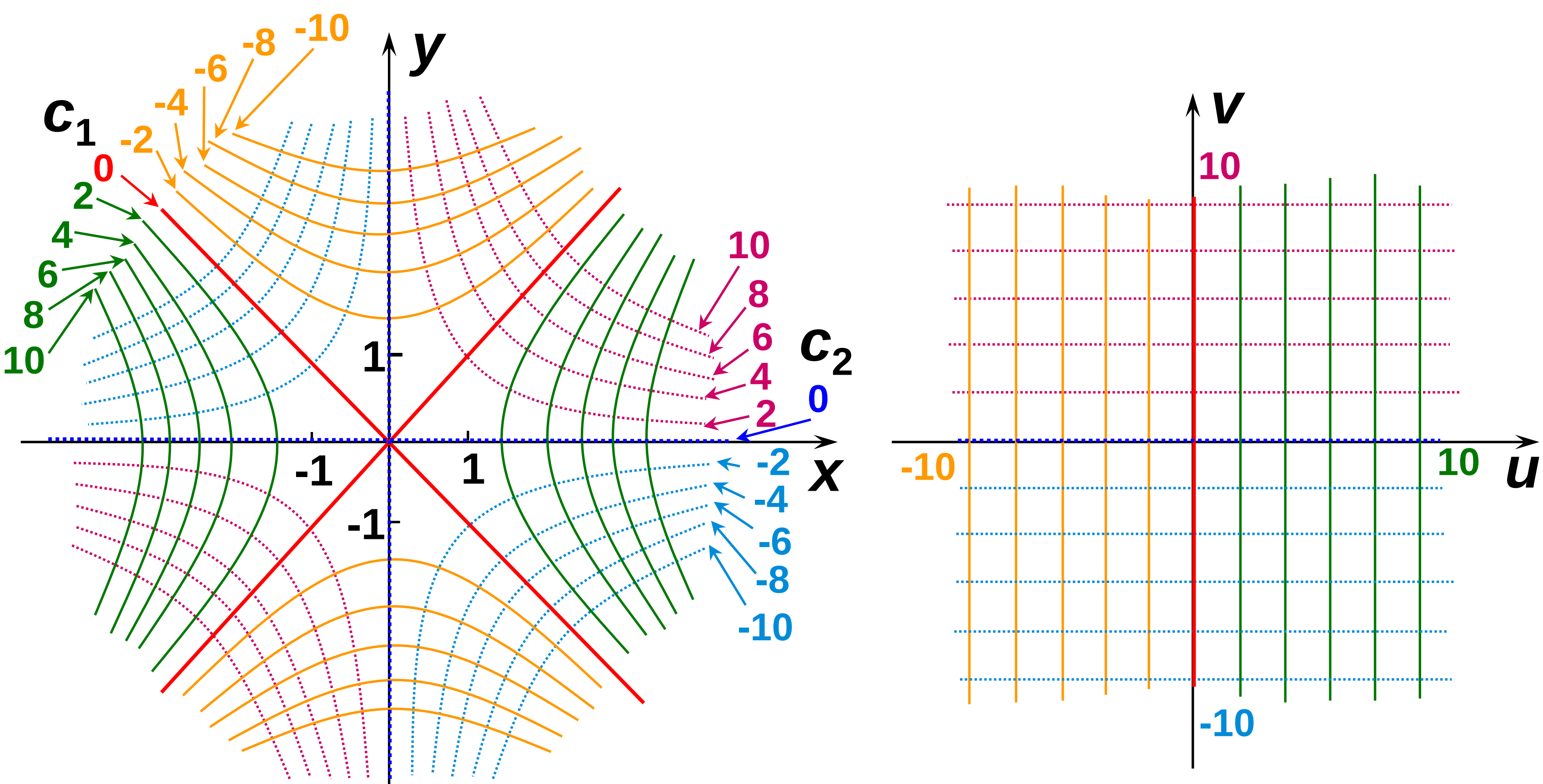
可得区域 D 的像(区域)G 满足

$$0<|w|<1,\ 0<\arg w<\pi,$$

即 $G=\{w:\operatorname{Im}w>0,|w|<1\}$.



例 函数 $w=z^2$ 对应于两个二元实变函数 $u=x^2-y^2$, $v=2xy$, 因此，它把 z 平面上的两族双曲线 $x^2-y^2=c_1$, $2xy=c_2$, 分别映射成 w 平面上的两族平行直线 $u=c_1$, $v=c_2$.



例 求曲线$x^2+y^2=4$在反演映射$w=\dfrac{1}{z}$下的象曲线.

解 法1. 设$z=x+iy$, $w=u+iv$

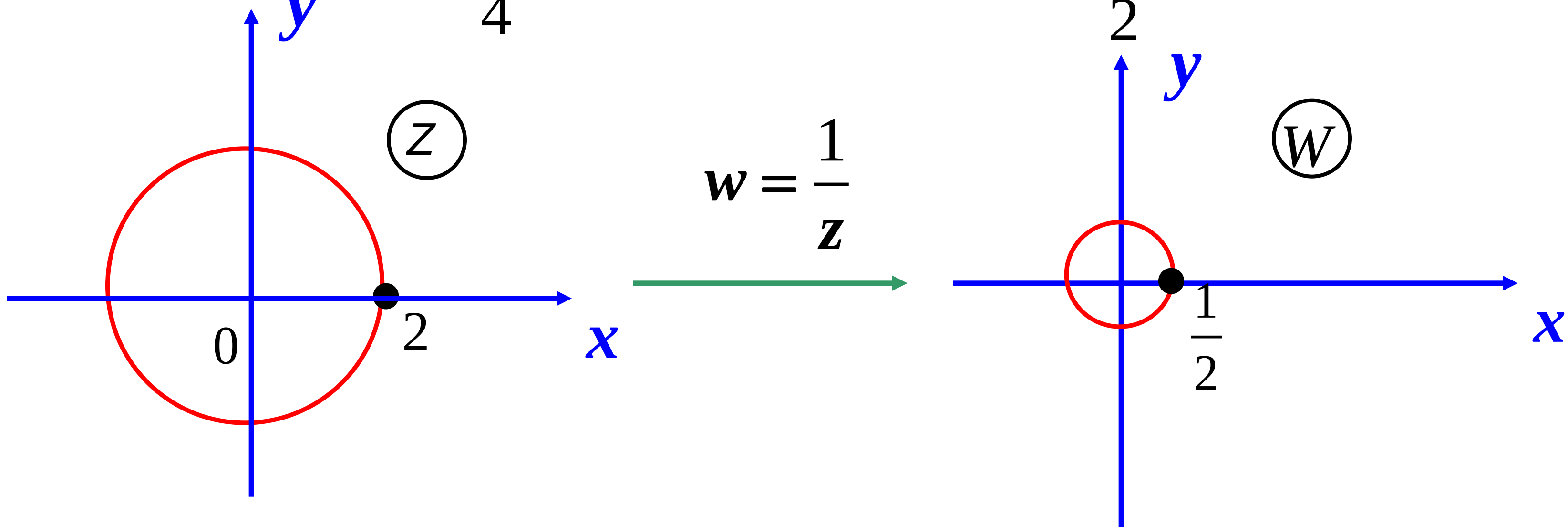
则由$w=\dfrac{1}{z}\Rightarrow z=\dfrac{1}{w}$,

$$x+iy=\frac{1}{u+iv}=\frac{u}{u^2+v^2}-i\frac{v}{u^2+v^2}$$

得 $x=\dfrac{u}{u^2+v^2}$, $y=\dfrac{-v}{u^2+v^2}$

$$\therefore \text{曲线 } x^2+y^2=4 \xrightarrow[\text{映射}]{w=\frac{1}{z}} \left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2+\left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right)^2=4$$

化简得：$u^2+v^2=\dfrac{1}{4}$ 即象线是半径为$\dfrac{1}{2}$的圆



法 2 $\because x^2+y^2=4 \Leftrightarrow |z|=2$

$$\therefore \; |w|=\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{2}$$

即象线为$|w|=\dfrac{1}{2}$，是半径为$\dfrac{1}{2}$的圆.

第六节　复变函数的极限和连续性

一、复变函数的极限

二、复变函数的连续性

一、极限

定义 设函数 $w=f(z)$ 在 z_0 的去心领域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义，若存在复数 $A\neq\infty$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\,\rho\geq\delta>0$, 使得

当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时,有 $|f(z)-A|<\varepsilon$,

则称 A 为函数 $w=f(z)$当 z 趋向于 z_0 时的极限, 记作

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \quad \text{或} \quad f(z)\to A \ (z\to z_0).$$

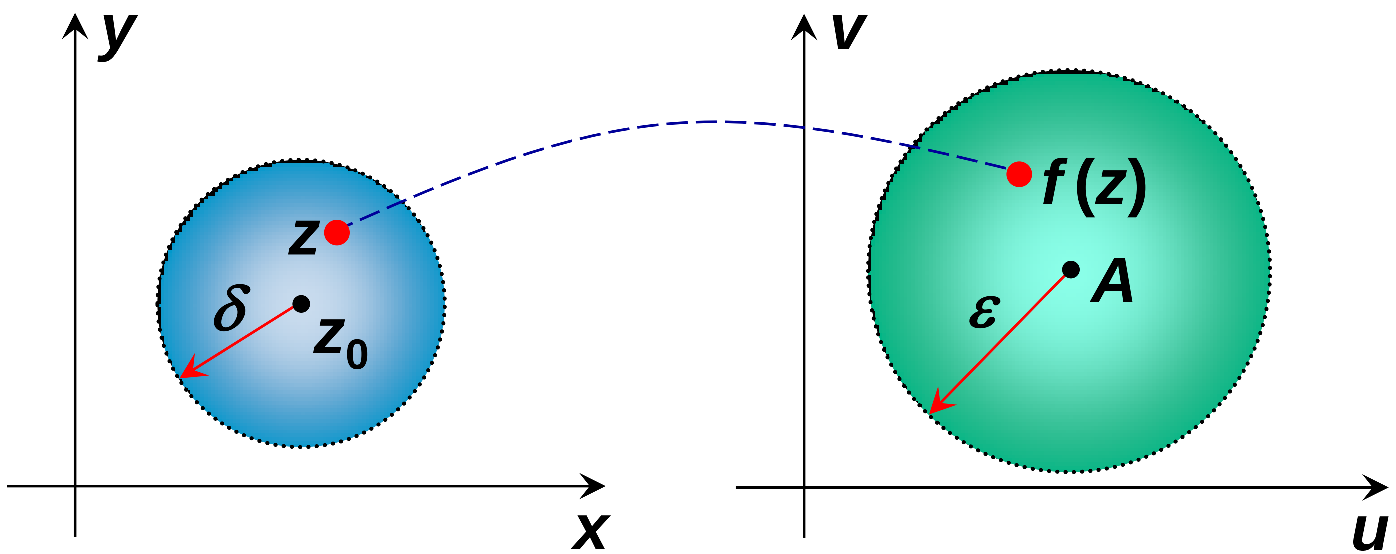
注 (1) 函数 $f(z)$ 在 z_0 点可以无定义；

(2) z 趋向于 z_0 的方式是任意的；

(3) 若 $f(z)$ 在 z_0处有极限,其极限是唯一的

一、极限

几何意义



当变点 z 一旦进入 z_0 的充分小去心邻域时,它的象点 $f(z)$ 就落入 A 的一个预先给定的 ε 邻域中

一、极限

定理一 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$A=u_0+iv_0$，$z_0=x_0+iy_0$，

则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$.

证明 必要性 $\Rightarrow$ 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，

当 $0<|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，

$$|f(z)-A|=\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}<\varepsilon,$$

$$\Rightarrow \quad |u-u_0|<\varepsilon,\ |v-v_0|<\varepsilon,$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

一、极限

定理一 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$A=u_0+iv_0$，$z_0=x_0+iy_0$，

则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$.

证明 充分性 $\Leftarrow$ 如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$，

则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，

$$|u-u_0|<\frac{\varepsilon}{2},\ |v-v_0|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\Rightarrow |f(z)-A|=|(u-u_0)+i(v-v_0)|\le|u-u_0|+|v-v_0|<\varepsilon,$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)=A.$$

一、极限

定理一 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$A=u_0+iv_0$，$z_0=x_0+iy_0$，

则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$.

意义： 此定理的意义在于，复变量函数极限问题，可转化为求实变量二元函数的极限问题

一、极限

定理二 （四则运算法则）

若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A,\ \lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$，则

$$(1)\quad \lim_{z\to z_0}\left[f(z)\pm g(z)\right]=A\pm B$$

$$(2)\ \lim_{z\to z_0} f(z)g(z)=AB$$

$$(3)\ \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}\ (B\neq 0)$$

一、极限

关于含∞ 的极限作如下规定：

(1) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=A \quad\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right)=A$;

(2) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty \quad\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{1}{f(z)}=0$;

(3) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty \quad\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)}=0$.

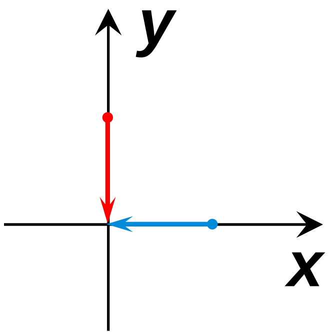
注：如何证明极限不存在？选择不同的路径进行攻击。

例 讨论函数 $f(z)=\dfrac{\overline{z}}{z}$ 在 $z\to 0$ 的极限。

解 **法1**

$$f(z)=\frac{\overline{z}^{2}}{|z|^{2}}=\frac{x^{2}-y^{2}-i\,2xy}{x^{2}+y^{2}},$$

$$u(x,y)=\frac{x^{2}-y^{2}}{x^{2}+y^{2}},$$



当 $y=0,\ x\to 0$ 时, $u(x,y)\to 1$,

当 $x=0,\ y\to 0$ 时, $u(x,y)\to -1$,

因此极限不存在。

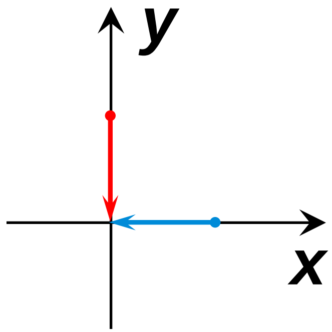
例 讨论函数 $f(z)=\dfrac{\overline{z}}{z}$ 在$z\to 0$ 的极限。

解 法2 $f(z)=\dfrac{x-iy}{x+iy}$,

当 $y=0,\ x\to 0$ 时, $f(z)\to 1$,

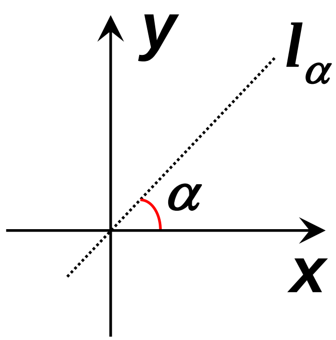
当 $x=0,\ y\to 0$ 时, $f(z)\to -1$,

因此极限不存在。



法3 沿着射线 l_α: $z=r\,\mathrm{e}^{i\alpha},\ r\to 0$,

$$\lim_{\substack{z\in l_\alpha \\ z\to 0}} f(z)=\mathrm{e}^{i(-2\alpha)},$$



与 α 有关，因此极限不存在。

例 设 $f(z)=\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\overline{z}}-\dfrac{\overline{z}}{z}\right)\quad(z\neq 0)$

证明：当$z\to 0$时，$f(z)$的极限不存在

证明： 法 1： 令 $z=x+iy$

则 $$f(z)=\frac{z^2-\overline{z}^2}{2i\,\overline{z}z}=\frac{4xyi}{2i\left(x^2+y^2\right)}=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$$\therefore\ u(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}\ ,\ v(x,y)=0$$

而当$(x,y)\xrightarrow{\text{设 } y=kx}(0,0)$时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}u(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{2k}{1+k^2}$

k取不同时，极限值不相等. $\therefore \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}u(x,y)$不存在

故 $\lim\limits_{z\to 0}f(z)$不存在

法 2： 令 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

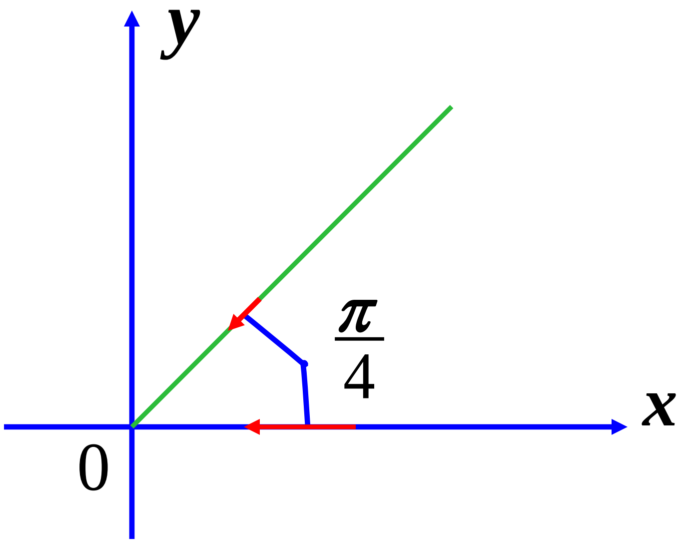
则 $f(z)=\dfrac{z^2-\bar{z}^2}{2i\bar{z}z}=\dfrac{1}{2i}\cdot\dfrac{4r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}=\sin 2\theta$

故当 $z\xrightarrow{沿\theta=0}0$时，$\lim\limits_{\substack{z\to0\\(\theta=0)}}f(z)=0$

当 $z\xrightarrow{沿\theta=\frac{\pi}{4}}0$时，

$\lim\limits_{\substack{z\to0\\\left(\theta=\frac{\pi}{4}\right)}}f(z)=1$

故 $\lim\limits_{z\to0}f(z)$不存在



二、连续性

定义 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，则称 $f(z)$ 在 z_0 点连续

若 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续，则称 $f(z)$ 在 D 内连续

注 (1) 连续的三个要素：$f(z_0)$ 存在；$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在；相等。

(2) 连续的等价表示：

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0) \iff \lim_{\Delta z\to 0}\Delta w=0 \iff \lim_{|\Delta z|\to 0}|\Delta w|=0.$$

其中， $\Delta z=z-z_0$, $\Delta w=f(z)-f(z_0)$.

通常说：当自变量充分靠近时，函数值充分靠近。

二、连续性

定理 函数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+i\,y_0$ 点连续的充要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续。

例如 函数 $f(z)=\ln(x^2+y^2)+i(x^2-y^2)$ 在复平面内除原点外是处处连续的

因为 $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 除原点外是处处连续的，
而 $v(x,y)=x^2-y^2$ 是处处连续的。

二、连续性

定理四 (1) 在 z_0 连续的两个函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商(分母在 z_0 不为零)在 z_0 处连续。

(2) 如果函数 $\xi = g(z)$ 在 z_0 处连续，函数 $w = f(\xi)$ 在 $\xi_0 = g(z_0)$ 连续，则函数 $w = f[g(\xi)]$ 在 z_0 处连续。

由以上讨论 $\Rightarrow$

$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ 在整个复平面内是连续的；

$R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在复平面内除分母为0点外处处连续

二、连续性

有界性 (1) $f(z)$在曲线C上 z_0 点连续的意义是指

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0) \quad z\in C$$

(2) 在闭曲线或包括曲线端点上连续的函数$f(z)$，必在曲线C上是有界的

即$\exists M>0$, 在C上恒有 $\left|f(z)\right|\le M$.

例 讨论函数 $w = f(z) = |z|^2$ 的连续性。

解 $w = |z|^2 = z \cdot \overline{z}$,

$$|\Delta w| = |(z + \Delta z)(\overline{z} + \overline{\Delta z}) - z \cdot \overline{z}|$$

$$= |\Delta z \cdot \overline{z} + \overline{\Delta z} \cdot z + \Delta z \cdot \overline{\Delta z}|$$

$$\leq 2|\Delta z| \cdot |z| + |\Delta z|^2 \to 0,$$ （当 $\Delta z \to 0$ 时）

故函数 $w = f(z) = |z|^2$ 处处连续。