第一章 矩阵及其应用

矩阵是代数学中最重要的基本概念之一，是代数学研究的主要对象，也是数学许多分支研究及应用的重要工具，它贯穿于线性代数的各个部分.在很多领域中的一些数量关系都可以用矩阵来描述。

本章主要介绍矩阵的概念、性质和运算；可逆矩阵的计算；还将介绍矩阵的初等变换及分块矩阵等相关知识，为今后的学习打下扎实的理论基础

一、 矩阵的概念

1. 矩阵的引出

考察线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$$

隐去未知量和等号，所有未知量的系数按原来位置排列成一矩阵列表

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

同理，未知数的系数与常数项也可以构成一矩形表格

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

这样的矩形数表在数学上就称为矩阵。

定义 由 **m×n** 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ **排成一个 m 个行 n 个列的矩形数表**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $m \times n$ **矩阵或 m 行 n 列矩阵，简称矩阵。**横排称为矩阵的行，纵排称为矩阵的列，$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 称为矩阵的第 i 行第 j 列元或 (i,j) 元。

表示法：

① A、B、C、E；等；

② $A_{m\times n}$， $B_{s\times r}$ 等；

③ $A=(a_{ij})$ 或 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 等。

2. 几种特殊的矩阵

1) 同型矩阵：行数相等且列数相等的两个矩阵。

例如：$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$为同型矩阵。

2) 相等矩阵：若两个矩阵$A=\left(a_{ij}\right)$与$B=\left(b_{ij}\right)$为同型矩阵,并且对应元素相等,

即 $a_{ij}=b_{ij}\left(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n\right)$，记作 $A=B$ 。

例　　设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & x & 3 \\ y & 1 & z \end{pmatrix},$$

已知 $A=B$,求 $x, y, z.$

解：$\because\ A=B,\ \therefore x=2,\ \ y=3,\ \ z=2.$

3) 方阵：行数与列数都等于n的矩阵A

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

4) 上、下三角矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

主对角线、次对角线

5) 对角矩阵

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

6) 单位矩阵

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}.$$

7) 行矩阵（行向量）：只有一行的矩阵。 $\boldsymbol{A}=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$.

8) 列矩阵（列向量）：只有一列的矩阵。

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11}\\ b_{21}\\ \vdots\\ b_{m1}\end{bmatrix}.$$

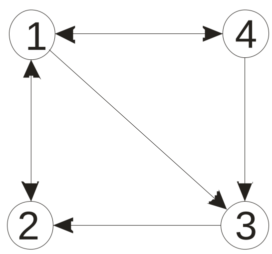
9) 零矩阵：元素全为零的矩阵。

$$\boldsymbol{O}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}.$$

注意：不同阶数的零矩阵是不同的.

矩阵的重要性在于它可以把一个实际问题变成一个数值表，使得我们可以通过研究数值表的规律和特性来解决实际问题！

例 四个城市间的单向航线如下图所示



若令

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市有一条单向航线；}\\ 0 & \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市没有单向航线。}\end{cases}$$

则图中的航线用矩阵表示为

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.
$$

例　**线性变换**：设n个变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$与m个变量$y_1, y_2, \cdots, y_m$之 间的关系式为

$$
\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases}
$$

其中a_{ij}为常数.

这个关系称为 从变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$的 线性变换。

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{系数矩阵}
$$

线性变换与矩阵之间存在着一一对应关系。

若线性变换为

$$
\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases}
$$

称之为恒等变换。

$$
\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases} \xleftrightarrow{\text{对　应}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{单位矩阵。}
$$

二、　矩阵的计算

1. 矩阵的加法

1) 定义

定义　两个 $m\times n$ 矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)$, $B=\left(b_{ij}\right)$, **那末矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记作 $\boldsymbol{A+B}$，规定为**

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$
$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

说明　只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算。

例　计算 $\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

解 $\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12+1 & 3+8 & -5+9 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3+3 & 6+2 & 8+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

2)　矩阵加法的运算规律

$(1)\ A+B=B+A;$

$(2)\ \left(A+B\right)+C=A+\left(B+C\right).$

$(3)\ -A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}=\left(-a_{ij}\right)$, 称为矩阵$A$的负矩阵 。

$(4)\ A+\left(-A\right)=0,\ A-B=A+\left(-B\right)$ 。

2.　矩阵的数乘

1)　定义

定义　数λ与矩阵的乘积,记作λA 或 $A\lambda$，规定为

$$\lambda A=A\lambda=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

例　已知$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-2&2\\0&1&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&0&0\\3&-2&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$

求 $2A, 2A-B.$

解　$2A=2\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-2&2\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&6\\4&-4&4\\0&2&0\end{pmatrix}$

$2A-B=2A+(-B)=2A+(-1)B$

$$=\begin{pmatrix}2&4&6\\4&-4&4\\0&2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&0&0\\-3&2&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4&6\\1&-2&3\\1&2&-1\end{pmatrix}。$$

2)　数乘矩阵的运算规律

设 A、B 为 $m\times n$ 矩阵，λ、μ为数

$(1)\left(\lambda\mu\right)A=\lambda\left(\mu A\right);$

$(2)\left(\lambda+\mu\right)A=\lambda A+\mu A;$

$(3)\lambda\left(A+B\right)=\lambda A+\lambda B.$

矩阵加法、减法、数乘统称为矩阵的线性运算.

3.　矩阵的乘法

矩阵乘法是出于研究线性方程组以及线性变换的乘法的需要建立起来的。

1)　定义

定义　设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$ ，$B=(b_{ij})_{s\times n}$ ，**规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个 $\boldsymbol{m\times n}$ 矩阵** $C=(c_{ij})_{m\times n}$ **，记作 $\boldsymbol{AB}$，即** $C=AB=(c_{ij})$ **。其中**

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\qquad(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

设 $A_{m\times s}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}$, $B_{s\times n}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sj} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$

$$C_{m\times n}=AB=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$

注：要求 A 的列数与 B 的行数相等。

例 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

求 AB, AC

解 $AB=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

$AC=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 因为 A 的列数不等于 C 的行数，因此不可乘。

2) 矩阵乘法的运算规律

(1) $(AB)C=A(BC)$;

(2) $A(B+C)=AB+AC, (B+C)A=BA+CA$;

(3) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$，（其中λ为数）;

(4) $AE=EA=A$;

(5) $(\lambda\mu)AB=(\lambda A)(\mu B)=(\mu A)(\lambda B)$;

(6)若A是n阶方阵,则记$A^k=\underbrace{AA\cdots A}_{k\text{个A}}$, 并称之为$A$的$k$次幂, 易 知 $(A^k)^m=A^{km}$, $A^mA^n=A^{m+n}$ 。

注意　矩阵一般不满足交换律。即 $AB\neq BA$；

$$AB=0\cancel{\Rightarrow}A=0,B=0\text{；}\quad A\neq 0,AC=BC\cancel{\Rightarrow}A=B$$

例 设 $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$，则 $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，$BA=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}$，故$AB\neq BA$ 。

但也有例外，比如设

$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$，　$B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$，　则 $AB=BA=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}$

若 *AB=BA*,　　则称 *A* 与 *B* 可交换。

例　计算下列乘积：

(1)　$\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}$　　　(2)　$\begin{pmatrix}1,-1,0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&6&12\\4&9&42\\-8&10&33\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

解　(1)　$\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times1&2\times2\\-2\times1&-2\times2\\3\times1&3\times2\end{pmatrix}_{3\times2}=\begin{pmatrix}2&4\\-2&-4\\3&6\end{pmatrix}$

(2)　$\begin{pmatrix}1,-1,0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&6&12\\4&9&42\\-8&10&33\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2,-3,-30\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=(28)$

定义　方阵多项式

设有 n 阶矩阵 A 和多项式 $f(\lambda)=a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$

规定 $f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E$

称 $f(A)$ **为方阵** A **的矩阵多项式。**

例　设有多项式 $f\ (\lambda)\ =\ \lambda 2-3\lambda+2$ 和矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\1&2&1\end{bmatrix}$，求矩阵多项式 $f(A)$ 。

解　因为 $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\1&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&5\\-1&-1&-2\\2&3&1\end{bmatrix}$

$$3\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-3&6\\0&3&-3\\3&6&3\end{bmatrix}$$

则

$f\ (A)\ =\ A2\text{-}3A+2E$

$$=\begin{bmatrix}3&2&5\\-1&-1&-2\\2&3&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&-3&6\\0&3&-3\\3&6&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&5&-1\\-1&-2&1\\-1&-3&0\end{bmatrix}$$

4.　矩阵的其它运算

1)　矩阵的转置、转置矩阵

◆　**定义 把矩阵 A 的行换成同序数的列得到的新矩阵，叫做 A 的转置矩阵，记作** A^{T} **。**

例　$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\4&5&8\end{pmatrix}$，$A^T=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\2&8\end{pmatrix}$；

$B=\begin{pmatrix}18&6\end{pmatrix}$，$B^T=\begin{pmatrix}18\\6\end{pmatrix}$。

◆　转置矩阵的运算性质

$(1)\left(A^T\right)^T=A;$

$(2)\left(A+B\right)^T=A^T+B^T;$

$(3)\left(\lambda A\right)^T=\lambda A^T;$

$(4)\left(AB\right)^T=B^TA^T.$

$(5)R(A^T)=R(A)$

下面对第（4）个性质进行证明。

证明　设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，

记 $AB=C=(c_{ij})_{m\times n}$，　$B^TA^T=D=(d_{ij})_{n\times m}$．要证 $c_{ji}=d_{ij}$

$$c_{ji}=a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\cdots+a_{js}b_{si}$$

$$d_{ij}=b_{1i}a_{j1}+b_{2i}a_{j2}+\cdots+b_{si}a_{js}$$

例　已知

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix},$$

求 $(AB)^T$.

解法 1　$\because AB=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&14&-3\\17&13&10\end{pmatrix},$

$$\therefore \left(AB\right)^T=\begin{pmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{pmatrix}.$$

解法 2　$(AB)^T=B^TA^T$

$$=\begin{pmatrix}1&4&2\\7&2&0\\-1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&3\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{pmatrix}。$$

2)　对称矩阵与反称矩阵

定义　设 A 为 n 阶方阵，如果满足 $A^T=A$，即 $a_{ij}=a_{ji}\ \left(i,j=1,2,\cdots,n\right)$，那末 A 称为对称矩阵。

例如 $A=\begin{pmatrix}12&6&1\\6&8&0\\1&0&6\end{pmatrix}$ 为对称矩阵.

说明 对称阵的元素以主对角线为对称轴对应相等。

如果 $A^T=-A$ 则矩阵A称为反对称矩阵。

例　设列矩阵 $X=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T$ 满足 $X^TX=1$， E 为 n 阶单位矩阵，$H=E-2XX^T$，证明 H 是对称矩阵，且 $HH^T=E$。

证明　$\because H^T=\left(E-2XX^T\right)^T=E^T-2(XX^T)^T=E-2XX^T=H$，

$\therefore H$是对称矩阵 。

$$HH^T = H^2 = (E - 2XX^T)^2$$

$$= E - 4XX^T + 4(XX^T)(XX^T) = E - 4XX^T + 4X(X^TX)X^T$$

$$= E - 4XX^T + 4XX^T = E$$

例　证明任一n阶矩阵都可表示成对称阵与反称阵之和。

证明　设$C = A + A^T$

则$C^T = (A + A^T)^T = A^T + A = C$，

所以 C 为对称矩阵，所以 C/2 也是对称矩阵。

设$B = A - A^T$， 则$B^T = (A - A^T)^T = A^T - A = -B$，

所以 B 为反对称矩阵，所以 B/2 也是反对称矩阵。

而$A = \dfrac{A + A^T}{2} + \dfrac{A - A^T}{2} = \dfrac{C}{2} + \dfrac{B}{2}$，证毕。

三、　可逆矩阵

1. 概念的引入

在数的运算中，当数$a \neq 0$时，有

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

其中$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$为a的倒数，（或称a的逆）。

在矩阵的运算中，单位阵E相当于数的乘法运算中 1，那么，对于矩阵A，如果存在一个矩阵A^{-1}，使得$AA^{-1} = A^{-1}A = E$，则矩阵A^{-1}称为A的逆矩阵，A称为可逆矩阵。

2. 逆矩阵的概念

定义　设A是一个n阶方阵,若存在一个n阶矩阵B, 使得： $AB = BA = E,$

则称矩阵A可逆,且称B是A的逆矩阵,记作A^{-1}，即$A^{-1} = B.$

例　设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \because AB = BA = E, \therefore B$是$A$的一个逆矩阵.

说明　若A是可逆矩阵，则A的逆矩阵是唯一的.

证明： 若设 B 和 C 是 A 的可逆矩阵，则有

$$AB=BA=E,\quad AC=CA=E$$

可得 $B=EB=(CA)B=C(AB)=CE=C$

所以 A 的逆矩阵是唯一的，即 $B=C=A^{-1}$。

例　设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，求 A 的逆矩阵。

解　利用待定系数法

设 $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$是 A 的逆矩阵，

则 $$AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2a+c & 2b+d\\ -a & -b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2a+c=1,\\ 2b+d=0,\\ -a=0,\\ -b=1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0,\\ b=-1,\\ c=1,\\ d=2.\end{cases}$$

考查：

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=BA=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

所以 $$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}。$$

3. 逆矩阵的运算性质

(1) 若A可逆,则A^{-1}亦可逆,且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A.$

(2) 若A可逆,数$\lambda\neq 0$,则λA可逆,且$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}.$

(3)若 A 可逆，则 A^T 也可逆，且$\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$。

证明 $\because\ A^T\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^{-1}A\right)^T=E^T=E$

$\therefore\ \left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$。

(4) 若A,B为同阶方阵且均可逆,则AB亦可逆,且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

证明　$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E$

$\therefore (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

推广　$(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$。

例　设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}$，

求矩阵X使满足 $AXB=C$。

解　$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-3/2&-3&5/2\\1&1&-1\end{pmatrix}, B^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$

又由　$AXB=C\Rightarrow A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$

于是　$X=A^{-1}CB^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-3/2&-3&5/2\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1\\0&-2\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2&1\\10&-4\\-10&4\end{pmatrix}$$

例　设方阵 A 满足方程 $A^2-A-2E=0$，证明 $A, A+2E$ 都可逆，并求它们的逆矩阵。

证明　由$A^2-A-2E=0$，得$A(A-E)=2E$，$\Rightarrow A\dfrac{A-E}{2}=E$，故$A$可逆。

$\therefore\ A^{-1}=\dfrac{1}{2}(A-E)$。

又由$A^2-A-2E=0$

$$\Rightarrow (A+2E)(A-3E)+4E=0\Rightarrow (A+2E)\left[-\frac{1}{4}(A-3E)\right]=E$$

故$A+2E$可逆，且$\left(A+2E\right)^{-1}=-\frac{1}{4}\left(A-3E\right)$。

例　解矩阵方程

（1）$\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$；　　（2）$X\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 5\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$。

解　(1) $\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$

给方程两端左乘矩阵$\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 4\end{pmatrix}^{-1}$，得

$$\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -5\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17 & -28\\ -4 & -6\end{pmatrix}。$$

$$(2)\ X\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

给方程两端右乘矩阵$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$，

得　$X=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 9 & -5\\ -2 & -8 & 6\\ -4 & -14 & 9\end{pmatrix}$。

$$(3)\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 5\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

给方程两端左乘矩阵$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}$，右乘矩阵$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}$，

得 $$X=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4&2&3\\0&-1&5\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&3&-1\\-1&-2&1\\-1&-5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&3\\0&-1&5\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&-1\\-1&-2&1\\-1&-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&-54&21\\9&54&-21\\21&120&-47\end{pmatrix}。$$

例 设三阶矩阵A,B满足关系：$A^{-1}BA=6A+BA$，且$A=\begin{pmatrix}1/2&&\\&1/4&\\&&1/7\end{pmatrix}$，求 B。

解：

$$A^{-1}BA-BA=6A\Rightarrow\left(A^{-1}-E\right)BA=6A\Rightarrow\left(A^{-1}-E\right)B=6E\Rightarrow B=6\left(A^{-1}-E\right)^{-1}。$$

$$B=6\left(A^{-1}-E\right)^{-1}=6\left[\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}=6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/3&0\\0&0&1/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}。$$

四、 分块矩阵

在矩阵的运算中，人们经常用若干条横线和纵线把矩阵分成若干块，目的是简化矩阵运算。每一小块叫做矩阵的子块（子矩阵），并且把每个子块在运算中直接看作是矩阵地元素一样。这种以子块为元素的形式上的矩阵，就是分块矩阵。通过适当地分块，不仅可以利用子块的特点简化运算，而且使得矩阵结构简洁清晰，意义更加明确。

1. 分块矩阵的运算规则

1) A+B：同型矩阵，分法相同，对应子块相加。

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1r}\\\vdots&&\vdots\\A_{s1}&\cdots&A_{sr}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}B_{11}&\cdots&B_{1r}\\\vdots&&\vdots\\B_{s1}&\cdots&B_{sr}\end{pmatrix}$$

其中A_{ij}与B_{ij}的行数相同,列数相同,那末

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}。$$

例 $A=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{array}\right)$， $B=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

$$A+B=\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \end{array}\right) \qquad A_{11}+B_{11}=(1\ \ 2)+(1\ \ 1)=(2\ \ 3)$$

作 A+B 运算，要求对 A 和 B 的行、列的分法相同。

2) λA: 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, λ为数, 那么 $\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}$。

作λA 运算，对 A 的分法无要求。

3) AB: 设A为$m\times l$矩阵, B为$l\times n$矩阵, 分块成

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix} \qquad \text{其中} C_{ij}=\sum_{k=1}^{t} A_{ik}B_{kj} \quad \left(i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,r\right)。$$

作 AB 运算，要求对 A 的列的分法与 B 的行的分法相同。

例 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.求 AB。

解：把 A,B 分块成

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hline -1&2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{E}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\\hline 1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{B}_{22}\end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{B}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_{22}\end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{B}_{21}=\begin{bmatrix}-1&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&4\\0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&4\\-1&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_{22}=\begin{bmatrix}-1&2\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&1\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3\\3&1\end{bmatrix}$$

于是 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\-2&4&3&3\\-1&1&3&1\end{bmatrix}$

4) 设 $A=\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1r}\\\vdots&&\vdots\\A_{s1}&\cdots&A_{sr}\end{pmatrix}$，则 $A^T=\begin{pmatrix}A_{11}^T&\cdots&A_{s1}^T\\\vdots&&\vdots\\A_{1r}^T&\cdots&A_{sr}^T\end{pmatrix}$。

5) 分块对角阵 $A=\begin{pmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_s\end{pmatrix}$, 其中 A_i均为方阵.

分块对角矩阵的具有下述性质：

（a）$\begin{pmatrix}A_1&0&\cdots&0\\0&A_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&A_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1&0&\cdots&0\\0&B_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&B_s\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}A_1B_1&0&\cdots&0\\0&A_2B_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&A_sB_s\end{pmatrix}$.

（b）设 $A=\begin{pmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_s\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&&&\\&A_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&A_s^{-1}\end{pmatrix}$。

例 设 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$, 求 A^{-1}。

解：$A=\left(\begin{array}{c|cc}5&0&0\\\hline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$,

$A_1=(5)$, $A_1^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\end{pmatrix}$;

$A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$, $A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$;

$\therefore\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&O\\O&A_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/5&0&0\\0&1&-1\\0&-2&3\end{pmatrix}$.

五、 初等矩阵

1. 初等矩阵的引入——高斯消元法

高斯消元法是求解线性方程组的一种基本方法。其基本思想是通过消元变形，把方程组化成容易求解的同解方程组。即得到能直接求出解或者能够直接判断其无解的通解方程组。

例* 解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2-3x_3=9,\\x_1+x_2+x_3=4,\\3x_1+5x_2+2x_3=32.\end{cases}\tag{1}$$

解： Step1 交换第一、第二个方程位置，得

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=4,\\2x_1+x_2-3x_3=9,\\3x_1+5x_2+2x_3=32.\end{cases}\tag{2}$$

Step2 把第一步中得到的方程组得第一个方程的－2 倍加到第二个方程上，得

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=4,\\-x_2-5x_3=1,\\3x_1+5x_2+2x_3=32.\end{cases}\tag{3}$$

Step3 同样的把第一步中得到的方程组的第一个方程的－3 倍加到第三个方程上，得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -x_2 - 5x_3 = 1, \\ 2x_2 - x_3 = 20. \end{cases} \tag{4}$$

Step4 把上方程组中的第二个方程的 2 倍加到第三个方程上，得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -x_2 - 5x_3 = 1, \\ -11x_3 = 22. \end{cases} \tag{5}$$

Step4 得到的方程组具有这样的特点：自上而下未知数个数依次减少称为阶梯形状，称这样的方程组为**阶梯形方程组**。

第三个方程两边同乘以（－1/11）得：x3＝－2；将 x3＝－2 代入第二个方程得：x2＝9；再将 x2＝9，x3＝－2 代入第一个方程得：x1＝－3。从而，方程组的解为：

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 9, \quad x_3 = -2 \tag{6}$$

分析上例：我们对方程组反复进行了三种变换，即：

（1） 互换两个方程的位置；

（2） 用一个非零数乘某个方程；

（3） 把一个方程的 k 倍加到另一个方程上。

我们称这三种变换为线性方程组的初等变换。

说明：线性方程组的初等变换是可逆的。

即，方程组（1）经初等变换化为一个新方程组，那么新方程组也可以经过初等变换还原为原方程组（1）。因而，方程组（1）与它经过若干此初等变换之后得到的新方程组是同解的。

2. 初等变换

1) 定义

矩阵的**初等行变换**是指下列三种变换：

1）互换矩阵的第 i 行和第 j 行的位置；记做：$r_i \leftrightarrow r_j$

2）用一个非零数 k 乘矩阵的第 i 行；记做：kr_i

3）把矩阵的第 j 行元的 k 倍加到第 i 行上；记做：$r_i + kr_j$

若把定义中的行换成列，就得到矩阵的三种**初等列变换**！相应的记为：

$c_i \leftrightarrow c_j$；kc_i；$c_i + kc_j$

初等列变换和初等列变换通称为矩阵的**初等变换**。

如果矩阵 A 经过有限次初等行变换变成矩阵 B，则称 **A 与 B 行等价**，记作 $A \xrightarrow{r} B$；

如果矩阵 A 经过有限次初等列变换变成矩阵 B，则称 **A 与 B 列等价**，记作 $A \xrightarrow{c} B$；

如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B，则称 **A 与 B 等价**，记作 $A \longrightarrow B$。

※　矩阵之间的等价关系具有下列性质：

（1）反身性　　$A \longrightarrow A$

（2）对称性　　若 $A \longrightarrow B$，则 $B \longrightarrow A$；

（3）传递性　　若 $A \longrightarrow B$，$B \longrightarrow C$，则 $A \longrightarrow C$。

※　两个线性方程组同解,就称这两个线性方程组等价.

说明：对线性方程组施行一次初等变换，相当于对它的增广矩阵施行一次对应的初等**行**变换，而化简线性方程组相当于用初等**行**变换化简它的增广矩阵。

例　例*中用消元法解线性方程的过程相当于对其增广矩阵施行初等行变换

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 32 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 9 \\ 3 & 5 & 2 & 32 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & 22 \end{bmatrix} \xrightarrow[-r_2, r_1 - r_2 - r_3]{-\frac{1}{11}r_3, r_2 - 5r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

以最后一个矩阵为增广矩阵的方程组为

$$\begin{cases} x_1 & & & =-3 \\ & x_2 & & =9 \\ & & x_3 & =-2 \end{cases}$$

因此方程组有唯一解，这个结果和消元法一致！

定义 满足下列两个条件的矩阵称为**行阶梯矩阵**，简称**阶梯形**。

（1）若有零行，则零行位于非零行的下方；

（2）每个首非零元（非零行从左边数起第一个不为零的元）前面零的个数逐行增加。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

首非零元为 1，且首非零元所在列的其它元都为零的梯矩阵，称为**行最简形矩阵**，简称**最简形**。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

问题：是否每个矩阵都可以经过初等行变换化为行阶梯矩阵呢？

定理 任意 $m \times n$ 矩阵 A 总可以经初等行变换化为阶梯形矩阵及行最简形矩阵。

证明 Step1 若 A 的元全为 0, A 已经是一个阶梯矩阵。

Step2 设非零矩阵 A 的第 j_1 列是自左而右的第一个非零列，设 $a_{1j} \neq 0$

(否则，若 a_{ij_1} 非零，作行变换 $r_1 \leftrightarrow r_i$，总可使第 j_1 列的第一个元非零)，矩阵

A 的各行分别作行变换：$r_i + (-\frac{a_{ij_1}}{a_{1j_1}})r_1, i = 2,3,\dots,m.$

得到：

$$A \to \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,j_1} & a_{1,j_1+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & & A_1 & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \end{pmatrix} = B$$

其中 A_1 是 $(m-1)\times(n-j_1)$ 矩阵，对施行上面同样的步骤，如此下去，即可得梯矩阵。

继续对行阶梯矩阵做行变换：

每个非零行同除以该行的首非零元，就可以将该行的首非零元化为 1。

再利用矩阵的初等行变换(3)，将首非零元所在列的其他元素化为零，就得到最简形。

证毕。

推论　$m\times n$ 矩阵 A 经过初等行变换化成的行最简形矩阵是唯一的。

例　用初等行变换将矩阵 A 化成行阶梯矩阵和最简形。

$$A=\begin{bmatrix}0&4&-12&2\\3&-1&-6&2\\-1&-1&6&2\\2&-2&0&0\end{bmatrix}$$

解：

$$A\xrightarrow[\substack{r_2+3r_1\\ r_4+2r_1}]{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}-1&-1&6&2\\0&-4&12&4\\0&4&-12&2\\0&-4&12&4\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+r_2\\ r_4-r_2}]{-1r_1}\begin{bmatrix}1&1&-6&-2\\0&-4&12&4\\0&0&0&6\\0&0&0&0\end{bmatrix}=B$$

$$\xrightarrow[\frac{r_3}{6}]{-\frac{r_2}{4}}\begin{bmatrix}1&1&-6&2\\0&1&-3&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1-r_2]{\substack{r_2+r_3\\ r_1+2r_3}}\begin{bmatrix}1&0&-3&0\\0&1&-3&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=C$$

B 是所求的梯矩阵，C 是最简形。

3.　初等矩阵的概念

2)　定义

由单位矩阵 E 经过一次初等变换而得到的方阵称为初等矩阵。

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{r_1+4r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

三种初等变换对应着三种初等矩阵。

1.　$r_i\leftrightarrow r_j$ (或 $c_i\leftrightarrow c_j$)

$$
\begin{array}{c}
E(i,j)=\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

左乘于A,相当于对 A 施行了$r_i \leftrightarrow r_j$.

$$
E_m(i,j)A=\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\
\end{array}
$$

右乘于A,相当于对A 施行了 $c_i \leftrightarrow c_j$.

$$
AE_n(i,j)=\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

2. kr_i (或 kc_i)

$$
E(i(k))=\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & k & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

左乘于A,相当于对A 施行了$r_i \times k$,

$$E_m(i(k))A=\begin{array}{l}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

类似地，右乘于A, 相当于对A施行$c_i \times k$.

$$AE_n(i(k))=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & ka_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

3. $r_i + kr_j$ (或 $c_j + kc_i$)

$$E(i,j(k))=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \leftarrow \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

以 $E_m(i,j(k))$ 左乘矩阵 A,

$$E_m(i,j(k))A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

相当于对 A施 行了$r_i + kr_j$.

类似地，以 $E_n(i,j(k))$ 右乘A, 相当于对 A 施行了$c_j + kc_i$.

$$AE_n(i,j(k))=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & ka_{1i}+a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & ka_{2i}+a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & ka_{mi}+a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$E(i,j),\quad E(i(k)),\quad E(i,j(k))$$

左乘行变,右乘列变

例　设$A=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\4&-2&5&3\\0&1&2&5\end{pmatrix}$, 求 $E(1,3)A,\ AE(1,3).$

解　$E(1,3)A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\4&-2&5&3\\0&1&2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2&5\\4&-2&5&3\\1&0&2&-1\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\4&-2&5&3\\0&1&2&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}0&1&2&5\\4&-2&5&3\\1&0&2&-1\end{pmatrix}$$

$$AE(1,3)=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\4&-2&5&3\\0&1&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1&-1\\5&-2&4&3\\2&1&0&5\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\4&-2&5&3\\0&1&2&5\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3}\begin{pmatrix}2&0&1&-1\\5&-2&4&3\\2&1&0&5\end{pmatrix}$$

定理　设 A 是一个$m\times n$矩阵，对 A 施行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘以一个相应的 m 阶初等矩阵；对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以一个相应的 n 阶初等矩阵。

由定理，可知：

$$E(i,j)E(i,j)=E,$$

$$E(i(k))E(i(\frac{1}{k}))=E,$$

$$E(i,j(k))E(i,j(-k))\ =\mathrm{E}.$$

初等矩阵均是可逆矩阵，且其逆矩阵还是初等矩阵。具体地,有：

$$E(i,j)^{-1}=E(i,j),$$

$$E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k})),$$

$$E(i,j(k))^{-1}=E(i,j(-k)) .$$

定理 对任何 $m\times n$ 矩阵 A,必可经有限次初等变换化为如下形式的矩阵 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。

$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 称为矩阵 A 的标准形。其中 r 就是行阶梯形矩阵中非零行的行数，也即以后要讲的矩阵的秩。

定理 n 阶方阵可逆的充要条件是它能表示成一些初等矩阵的乘积

证 必要性 由前面两定理知，对于 n 阶方阵 A，必存在初等矩阵 $P_1,\cdots,P_s$ 和 $Q_1,\cdots,Q_t$，使

$$P_s\cdots P_1AQ_1\cdots Q_t=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=N$$

因 A 可逆，由可逆矩阵的乘积仍为可逆矩阵可知，标准形 N 也是可逆矩阵，从面必定有 $r=n$。于是上式变成 $P_s\cdots P_1AQ_1\cdots Q_t=E$，即

$$A=\left(P_s\cdots P_1\right)^{-1}E\left(Q_1\cdots Q_t\right)^{-1}=P_1^{-1}\cdots P_s^{-1}Q_t^{-1}\cdots Q_1^{-1}$$

由初等矩阵的逆矩阵还是初等矩阵，可得 A 可以表示成有限个初等矩阵的乘积。

充分性 若有初等矩阵 $P_1,\cdots,P_m$，使得 $A=P_1\cdots P_m$，因初等矩阵均是可逆矩阵，又可逆矩阵的乘积仍是可逆矩阵，故 A 可逆。

证毕。

推论 $m\times n$ 阶矩阵 A 与 B 等价的充要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P 与 n 阶可逆矩阵 Q，使

$$PAQ=B$$

由定理，得出利用初等行变换求逆阵的方法：

由 $A^{-1}=P_l\cdots P_2P_1$，有 $P_l\cdots P_2P_1A=E$，$P_l\cdots P_2P_1E=A^{-1}$，用分块矩阵将两式合并， $P_l\cdots P_2P_1\left(A\vdots E\right)=\left(E\vdots A^{-1}\right)$

即对 $n\times 2n$ 矩阵 $\left(A\vdots E\right)$ 施行初等行变换，当把 A 化成 E 时，原来的 E 就化成了 A^{-1}。

例　设$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，求$A^{-1}$。

解　$$(A\vdots E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2&-1&1&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3\times(-1)}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2&-1&1&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1+2r_3]{r_2+5r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&-2&0&3&6&-5\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\div(-2)}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&1&0&-\dfrac{3}{2}&-3&\dfrac{5}{2}\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-3/2&-3&5/2\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

利用初等行变换求逆矩阵的方法还，可用于求$A^{-1}B$。

$\because\ A^{-1}(A\vdots B)=(E\vdots A^{-1}B)$

$\therefore (A\vdots B)\xrightarrow{r\cdots}(E\vdots A^{-1}B)$

例　求矩阵X，使得$AX=B$，其中$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，　$B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}$。

解　若A可逆，则$X=A^{-1}B$。

$$(A\vdots B)=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{array}\right)\xrightarrow{r\cdots}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&3&2\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&1&3\end{array}\right)$$

第二章 行列式

行列式是一种常用的数学工具，也是代数学中必不可少的基本概念，在数学和其他应用科学以及工程技术中有着广泛得用应用.本章主要介绍行列式的概念、性质和计算方法.

一、 二阶与三阶行列式

1. 二阶行列式的引入

用消元法解二元线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, & (1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. & (2) \end{cases}$

$(1)\times a_{22}$: $\qquad a_{11}a_{22}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_1a_{22},$

$(2)\times a_{12}$: $\qquad a_{12}a_{21}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_2a_{12},$

两式相减消去x_2，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\ x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2;$$

类似地，消去x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\ x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

当$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$时,方程组的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \qquad (3)$$

由方程组的四个系数确定。

由四个数排成二行二列（横排称行、竖排称列）的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \qquad (4)$$

表达式$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$称为数表（4）所确定的**二阶行列式**，并记作$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$（5）。

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

2. 二阶行列式的计算——对角线法则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

主对角线，次对角线

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \text{——系数行列式}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则二元线性方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意　　分母都为原方程组的系数行列式。

例　求解二元线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$

解　$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7 \neq 0$

$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14$，$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -21$

$$\therefore \quad x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{7}=2, x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{7}=-3.$$

3. 三阶行列式

设有 9 个数排成 3 排 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}, \end{aligned}$$

上式称为数表所确定的**三阶行列式**。

4. 对角线法则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

注意　　红线上三元素的乘积冠以正号，蓝线上三元素的乘积冠以负号。

说明 1　　对角线法则只适用于二阶与三阶行列式。

三阶行列式包括 3!项,每一项都是位于不同行，不同列的三个元素的乘积,其中三项为正,三项为负。

5. 利用三阶行列式求解三元线性方程组

如果三元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3; \end{cases}$

的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$，

若记 $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$， $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$， $D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$，

则三元线性方程组的解为：

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, x_3=\frac{D_3}{D}$$

例　　计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

解　按对角线法则，有

$$\begin{aligned} D &= 1\times 2\times(-2)+2\times 1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times 4 \\ &\quad -1\times 1\times 4-2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times 2\times(-3) \\ &= -4-6+32-4-8-24 \\ &= -14 \end{aligned}$$

例　求解方程组 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0$

解　　方程左端

$$\begin{aligned} D &= 3x^2+4x+18-9x-2x^2-12 \\ &= x^2-5x+6 \end{aligned}$$

由　　$x^2-5x+6=0$

解得　　$x=2$ 或 $x=3$。

例　　解线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2+-3x_3=1, \\ -x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$

解　由于方程组的系数行列式

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1\times 1\times\left(-1\right)+\left(-2\right)\times\left(-3\right)\times\left(-1\right)+1\times 2\times 1 \\ &\quad -1\times 1\times\left(-1\right)-\left(-2\right)\times 2\times\left(-1\right)-1\times\left(-3\right)\times 1 \\ &= -5\neq 0 \end{aligned}$$

同理可得

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5, D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-10, D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-5,$$

故方程组的解为：

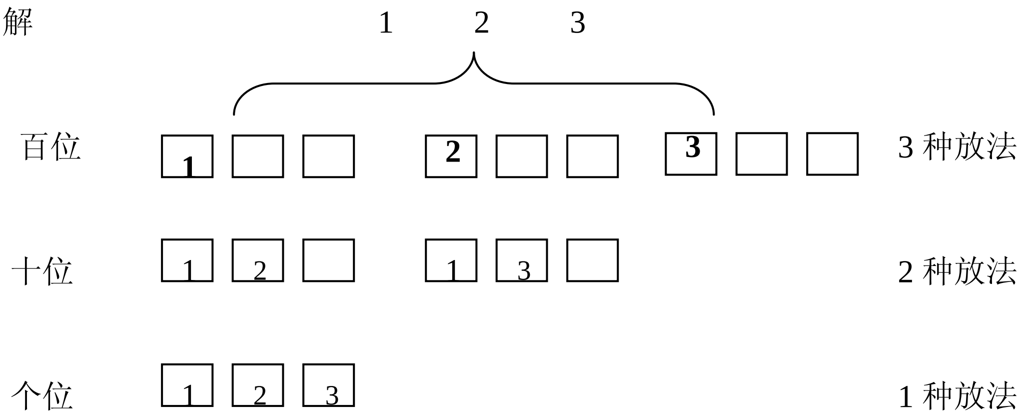
$$x_1=\frac{D_1}{D}=1, x_2=\frac{D_2}{D}=2, x_3=\frac{D_3}{D}=1。$$

二、 n 阶行列式

1. 全排列及其逆序数

引例 用 1、2、3 三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解



共有$3\times2\times1=6$种放法。

问题 把n个不同的元素排成一列，共有多少种不同的排法？

定义 由n个不同地正整数组成的一个有序数组，称为一个n**元排列**。

n个不同的元素的所有排列的种数，通常用P_n表示。

由引例 $P_3=3\cdot2\cdot1=6$

同理 $P_n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=n!$。

我们规定各元素之间有一个标准次序， n个不同的自然数，规定由小到大为**标准排列或自然排列**。

定义 在一个排列$\left(i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n\right)$中，若数$i_t>i_s$，则称这两个数组成一个**逆序**。

一个排列中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**。

例如 排列 32514 中，逆序数为 3+1+0+1+0=5。

◆ **排列的奇偶性** 逆序数为奇数的排列称为奇排列；

逆序数为偶数的排列称为偶排列。

◆ 计算排列逆序数的方法

方法 1 分别计算出排在$1,2,\cdots,n-1,n$前面比它大的数码之和即分别算

出$1,2,\cdots,n-1,n$，这n个元素的逆序数，这个元素的逆序数的总和即为所求排列的逆序数。

方法 2　分别计算出排列中每个元素前面比它大的数码个数之和，即算出排列中每个元素的逆序数，这每个元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数。

例　求排列 32514 的逆序数。

解　在排列 32514 中, 3 排在首位,逆序数为 0;

2 的前面比 2 大的数只有一个 3,故逆序数为 1;

5 的前面没有比 5 大的数,其逆序数为 0;

1 的前面比 1 大的数有 3 个,故逆序数为 3;

4 的前面比 4 大的数有 1 个,故逆序数为 1;

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}$$

于是排列 32514 的逆序数为$t=0+1+0+3+1=5$。

定义　将一个 n 元排列中某两个数的位置互换，而其余数不动，就得到另一个排列，这样的变换称为对换。

$$4213 \qquad t=0+1+2+1=4$$
$$1243 \qquad t=0+0+0+1=1$$

对换会改变排列的奇偶性？

定理　对换一次改变排列的奇偶性。

证明：（1）对换的两数相邻。设 n 元排列为

$$a_1a_2\ldots a_lijb_1b_2\ldots b_m$$

其逆序数为τ_1，将相邻两数 i，j 对换，得到新排列

$$a_1a_2\ldots a_ljib_1b_2\ldots b_m$$

其逆序数为τ_2，于是

当　i>j 时，$\tau_2=\tau_1-1$

当　i<j 时，$\tau_2=\tau_1+1$

所以，一次相邻对换改变排列的奇偶性。

（2）　一般情况。设 n 元排列为

$$a_1a_2\dots a_l i b_1 b_2\dots b_m j c_1 c_2\dots c_p$$

将两数 i，j 对换，得到新排列

$$a_1a_2\dots a_l j b_1 b_2\dots b_m i c_1 c_2\dots c_p$$

（2）可看作是由（1）把 i 依次和$b_1,b_2,\dots,b_m$对换，即作了 m 次相邻对换得到的排列

$$a_1a_2\dots a_l b_1 b_2\dots b_m i j c_1 c_2\dots c_p$$

后，再将（3）中的 j 依次和$i,b_1,b_2,\dots,b_m$作 m＋1 次对换而得。这样由（1）经 2m＋1 次相邻对换可得到排列（2），由前面证明可知，排列（2）和（1）奇偶性不同。　　　证毕

2.　n 阶行列式的定义

三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} =a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \end{matrix}$$

说明（1）三阶行列式共有 6 项，即 3！项；

（2）每项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积；

（3）每项的正负号都取决于位于不同行不同列的三个元素的下标排列。

例如　$a_{13}a_{21}a_{32}$列标排列的逆序数为$t(312)=1+1=2,$偶排列　　　+正号

$a_{11}a_{23}a_{32}$列标排列的逆序数为$t(132)=1+0=1,$奇排列　　　$-$负号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

定义　由n^2个数组成的n阶行列式等于所有取自不同行不同列的n个元素的乘积的代数和$\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记作$\det\left(a_{ij}\right)$或$\left|a_{ij}\right|$，数a_{ij}称为行列式$\det\left(a_{ij}\right)$的元素。

其中$p_1 p_2 \cdots p_n$为自然数$1,2,\cdots$，n的一个排列，t 为这个排列的逆序数。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} \left(-1\right)^{t\left(p_1 p_2 \cdots p_n\right)} a_{1 p_1} a_{2 p_2} \cdots a_{n p_n}$$

说明　1、行列式是一种特定的算式，它是根据求解方程个数和未知量个数相同的一次方程组的需要而定义的;

2、n 阶行列式是 n!项的代数和;

3、n 阶行列式的每项都是位于不同行、不同列 n 个元素的乘积;

4、一阶行列式$|a|=a$不要与绝对值记号相混淆;

5、$a_{1 p_1} a_{2 p_2} \cdots a_{n p_n}$的符号为$(-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)}$。

例　计算行列式$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

解　分析　展开式中项的一般形式是$a_{1 p_1} a_{2 p_2} a_{3 p_3} a_{4 p_4}$

若$p_1 \neq 4$，$\Rightarrow a_{1 p_1}=0$,从而这个项为零，所以p_1只能等于 4,

同理可得$p_2=3, p_3=2, p_4=1$，

即行列式中不为零的项为$a_{14} a_{23} a_{32} a_{41}$，

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{t(4321)} 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24\text{。}$$

例　计算上三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

解　分析　展开式中项的一般形式是 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$

$$p_n = n, p_{n-1} = n-1, p_{n-3} = n-3, \cdots p_2 = 2, p_1 = 1,$$

所以不为零的项只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{t(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例　$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = ?$

解　$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = 1\cdot 4\cdot 5\cdot 8 = 160$

同理可得下三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

例　证明对角行列式（主对角线以外全为 0 的行列式）和次对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

证明　第一式是显然的,下面证第二式。

若记 $\lambda_i = a_{i,n-i+1}$，则依行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{t[n(n-1)\cdots 21]} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

证毕。

定理　n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 的一般项可以记为

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\ldots i_n)+\tau(j_1j_2\ldots j_n)} a_{i_1j1}a_{i_2j2}\ldots a_{i_nj n}$$

证明略，见书上 P49。

推论　 n 阶行列式也可以定义为

$$\sum_{i_1i_2\ldots i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\ldots i_n)} a_{i_11}a_{i_22}\ldots a_{i_nn}$$

三、　行列式的性质

1)　行列式的性质

设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

定义：行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式。

性质 1　$D^T = D$

证明　令 $b_{ij} = a_{ji}$，记 $D = \det(a_{ij})$ 的转置行列式

$$D^T=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}$$

$$=\sum(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}=D$$

性质 1 说明：

- ◆ 行列式的行与列的地位是对称的，即凡对行成立的的性质对列也成立。
- ◆ 因此，我们下面着重以行来介绍行列式的性质。

性质 2　互换行列式的两行（列）,行列式变号。

证明　由行列式定义

$$D=\det(a_{ij})_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

交换 D 的 i,k 行，得 D_1

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)\pm 1}a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n}$$

根据定理一，对换一次改变排列的奇偶性，即：

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}=-(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}$$

上式 $=-\sum(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n}=-D$

即：$D_1=-D$ 。任意互换行列式的两行（列），行列式变号！证毕！

例如 $\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&2\\3&7&4\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix}1&0&1\\3&7&4\\2&1&2\end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&2\\3&7&4\end{vmatrix}\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix}0&1&1\\1&2&2\\7&3&4\end{vmatrix}$$

推论　如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零。

证明　互换相同的两行，有 $D=-D$，$\therefore\quad D=0$。

性质 3 行列式某行（列）的公因子可以提到行列式符号的外面，即：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ ka_{i1}&ka_{i2}&\cdots&ka_{in}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

证明　$\text{左}=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots(ka_{ip_i})\cdots a_{np_n}=k\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}=\text{右}$

推论 1　用数 k 乘行列式 D 等于 D 中某一行（列）所有元同乘以数 k。

例

$$\begin{vmatrix}0&-3&-3&6\\2&8&-12&0\\7&-1&3&4\\18&0&-9&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\div 2}2\begin{vmatrix}0&-3&-3&6\\1&4&-6&0\\7&-1&3&4\\18&0&-9&2\end{vmatrix}\xlongequal{c_4\div 2}2\times2\times\begin{vmatrix}0&-3&-3&3\\1&4&-6&0\\7&-1&3&2\\18&0&-9&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3\div 3}4\times3\times\begin{vmatrix}0&-3&-1&3\\1&4&-2&0\\7&-1&1&2\\18&0&-3&1\end{vmatrix}=\cdots\cdots$$

推论 2　行列式中如果有两行（列）对应元素成比例, 则此行列式为零。

$$
\text{证明}\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_j \div k} k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{根据性质2的推论}} 0
$$

性质 4 若行列式的第 **i** 行（列）的每一个元素都可以表示为两数之和，则该行列式可表示为两个行列式之和，即：

(1):

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}
$$

(2):

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

性质 5 把行列式的第 **j** 行（列）元的 **k** 倍加到第 **i** 行（列）的对应元上，行列式的值不变，即：

(1):$c_i + k \times c_j$

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{c_i + kc_j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

(2):$r_i + k \times r_j$

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i + kr_j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

说明：使用行列式性质时，为了使过程清晰醒目，约定如下记号：

$r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$

$kr_i (kc_i)$

$r_i + kr_j (c_i + kc_j)$

1. 行列式性质应用举例

◆ 计算行列式的基本方法：三角化。

◆ 计算行列式的主要手段：$r_i + kr_j$。

例 计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}$

解 $$D \underline{\underline{r_2+3r_1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \underline{\underline{r_3-2r_1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_4-3r_1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \underline{\underline{r_5-4r_1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_2 \leftrightarrow r_4}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \underline{\underline{r_3+r_2}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_4+r_3}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \underline{\underline{r_5-2r_3}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_5+4r_4} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -(-2)(-1)(-6) = 12$$

例　计算 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

解　将第 $2,3,\cdots,n$ 列都加到第一列得

$$D = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=2,\cdots,n]{c_j - bc_1} [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a-b & & & \\ 1 & 0 & a-b & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

问题：是不是所有的行列式都可以化为三角行列式？

例　设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$，$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$，$D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$

证明　$D = D_1 D_2$。

证　对 D_1 作运算 $r_i + kr_j$，把 D_1 化为下三角形行列式

设为　$D_1 = \begin{vmatrix} p_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix} = p_{11} \cdots p_{kk}$；

对 D_2 作运算 r_i+kr_j,把 D_2 化为下三角形行列式

设为 $D_2=\begin{vmatrix} q_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}=q_{11}\cdots q_{nn}$；

对 D 的前 k 行作运算 r_i+kr_j，再对后 n 列作运算 c_i+kc_j,把 D 化为下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & 0 & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ d_{11} & \cdots & d_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ d_{n1} & \cdots & d_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix},$$

故 $D=p_{11}\cdots p_{kk}\cdot q_{11}\cdots q_{nn}=D_1D_2$。

例 计算 $D_5=\begin{vmatrix} 9 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & -2 & 2 & 7 \\ c & d & 0 & 3 & 1 \\ e & f & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$。

解 $D_5=\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}=-3\cdot|-2|\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=(-3)\cdot(-2)\cdot(-7)=-42$

四、 行列式按行（列）展开

1. 余子式与代数余子式

例如
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)+a_{12}\left(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33}\right)+a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right)$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

定义 在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的元按

原来的次序构成$n-1$阶行列式叫做元素a_{ij}的**余子式**，记作M_{ij}。记$A_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}M_{ij}$叫做元素$a_{ij}$的**代数余子式**。

例如 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ $M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$

$$A_{23}=\left(-1\right)^{2+3}M_{23}=-M_{23}$$

2. 行列式按行(列)展开

引理　一个n阶行列式，如果其中第i行所有元素除a_{ij}外都为零，那末这行列式等于a_{ij}与它的代数余子式的乘积，即$D=a_{ij}A_{ij}$

例如 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

$$=a_{33}A_{33}=\left(-1\right)^{3+3}a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

证　当a_{ij}位于第一行第一列时，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(1j_2\cdots j_n)}a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$=a_{11}\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_2\cdots j_n)}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

即有 $D=a_{11}M_{11}$。

又 $A_{11}=\left(-1\right)^{1+1}M_{11}=M_{11}$

从而 $D=a_{11}A_{11}$

对于一般情形，设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把D的第i行依次与第$i-1$行,第$i-2$行,第1行对调,得

$$D=(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

再把D的第j列依次与第$j-1$列,第$j-2$列,第1列对调,得

$$D=(-1)^{i-1}\cdot(-1)^{j-1}\begin{vmatrix} a_{ij} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i+j-2}\begin{vmatrix} a_{ij} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{ij} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot M_{ij}=a_{ij}A_{ij}$$

定理 3　n 阶行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$D=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

证

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

说明：

计算行列式时，直接利用定理 3 展开行列式，通常并不能减少计算量，除非某一行（列）含有较多的零元，因此计算行列式时，应先运用行列式性质，将某一行（列）尽可能多得化为零，然后使用行列式的展开。

例

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}\underset{c_4+c_3}{\overset{c_1+(-2)c_3}{=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2+r_1}{=\!=\!=}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}=40\text{。}$$

定理　n 阶行列式任一行（列）的各元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j$$

证　当 $i\neq j$ 时, 把行列式 $D=\det(a_{ij})$ 按第 j 行展开, 有

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}A_{jk}=a_{j1}A_{j1}+\cdots+a_{jn}A_{jn}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{i1}&\cdots&a_{in}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{j1}&\cdots&a_{jn}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\overset{r_j+r_i}{====}\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{i1}&\cdots&a_{in}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{i1}+a_{j1}&\cdots&a_{in}+a_{jn}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

按 j 行展开：
$$=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+a_{jk})A_{jk}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+a_{jk})A_{jk}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}+\sum_{k=1}^{n}a_{jk}A_{jk}$$

所以 $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0$

另一条同理可证。证毕!

★ 关于代数余子式的重要性质：

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=D\delta_{ij},\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij}$$

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1,当\,i=j,\\0,当\,i\neq j.\end{cases}$$

例 证明范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\ x_1&x_2&\cdots&x_n\\ x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\geq i>j\geq1}(x_i-x_j).\qquad(1)$$

证 用数学归纳法

$\because\ D_2=\begin{vmatrix}1&1\\x_1&x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{2\geq i>j\geq1}(x_i-x_j)$

$\therefore$ 当 $n=2$ 时（1）式成立.

假设（1）对于 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立，

$$\because D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\prod_{n \ge i > j \ge 2}(x_i - x_j) = \prod_{n \ge i > j \ge 1}(x_i - x_j).$$

例　计算 $D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & & b \\ & a & & 0 & & b & \\ & & \ddots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & & & a & b & & \\ & 0 & & & & 0 & \\ & & & c & d & & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \ddots & & \\ & c & & 0 & & d & \\ c & & & & & & d \end{vmatrix}$.

解　对行列式按第一行展开，得：

$$D_{2n} = aD_1 + d(-1)^{1+n} D_2$$

$$= adD_{2(n-1)} + dc(-1)^{1+n}(-1)^{n-1+1} D_{2(n-1)}$$

$$= adD_{2(n-1)} - dcD_{2(n-1)} = (ad - dc)D_{2(n-1)}$$

$$= (ad - dc)^2 D_{2(n-2)} = \cdots$$

$$= (ad - dc)^{n-1} D_2$$

$$= (ad - dc)^{n-1}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$=(ad-dc)^n$ 递推法

例 计算 $D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & 0 & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & 0 & & & & & 0 & \\ & & & c & d & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & c & & 0 & & & d & \\ c & & & & & & & d \end{vmatrix}$.

解 最后一行和最后列逐次向上和向左换行和换列,得

$$D_{2n}=(-1)^{2n-2}\cdot(-1)^{2n-2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}D_{2(n-1)}=(ad-bc)D_{2(n-1)}.$$

例 已知四阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & -6 \end{vmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A_{41}+2A_{42}+3A_{43}+4A_{44}}$,其中 $\boldsymbol{A_{ij}}$ 为行列式的代数余子式.

解. 构造行列式

$$\boldsymbol{D_1}=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{A_{41}+2A_{42}+3A_{43}+4A_{44}=D_1}=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=\boldsymbol{-96}$$

五、 行列式的应用

1. 伴随矩阵与逆矩阵

定义 行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的**伴随矩阵**。

定理 $AA^* = A^*A = |A|E$。

证明 设 $A = (a_{ij})$,记 $AA^* = (b_{ij})$,

$$b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = |A|\delta_{ij},$$

故 $AA^* = (|A|\delta_{ij}) = |A|(\delta_{ij}) = |A|E$

同理可得 $A^*A = \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj}\right) = (|A|\delta_{ij}) = |A|(\delta_{ij}) = |A|E$

定理 n 阶方阵 A 可逆的充要条件是$|A| \neq 0$，且 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^*$。

证明 必要性 若 A 可逆，即有A^{-1}使$AA^{-1} = E.$

故$|A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1,$ 所以$|A| \neq 0.$

充分性 当$|A| \neq 0$时,

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & |A| & \\ & & & |A| \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} &= |A| \\ a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \cdots + a_{nn}A_{nn} &= |A| \end{aligned}}$$

$$AA^* = A^*A = |A|E \Rightarrow A\frac{A^*}{|A|} = \frac{A^*}{|A|}A = E$$

按逆矩阵的定义得 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$, 证毕。

推论 若$AB = E$(或$BA = E$),则$B = A^{-1}.$

证明　$|A|\cdot|B|=|E|=1$,故$|A|\neq 0$,

因而A^{-1}存在,于是

$$B=EB=\left(A^{-1}A\right)B=A^{-1}\left(AB\right)=A^{-1}E=A^{-1}$$

推论　**若$\boldsymbol{A}$可逆，且$\boldsymbol{AB=AC}$,则$\boldsymbol{B=C}$.**

例　求方阵$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$的逆矩阵。

解　$\because\ |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2,\therefore\ A^{-1}$存在.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2,A_{12}=-\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=-3,$$

同理可得　$A_{13}=2,\ A_{21}=6,\ A_{22}=-6,\ A_{23}=2, A_{31}=-4,\ A_{32}=5,\ A_{33}=-2,$

得　$$A^{*}=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$$

故　$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-3/2&-3&5/2\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

2.　克拉默法则

设线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

若常数项$b_1,b_2,\cdots,b_n$不全为零,则称此方程组为非齐次线性方程组;

若常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零，此时称方程组为齐次线性方程组.

定理　克拉默(Cramer)法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

的系数行列式不等于零，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么线性方程组(1)有解，并且解是唯一的，且解可以表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

其中：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明

用D中第j列元素的代数余子式$A_{1j}, A_{2j}, \cdots, A_{nj}$依次乘方程组$(1)$的$n$个方程,得

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2}$$

再把n个方程依次相加，得

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{kj}\right)x_1 + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\right)x_j + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kn}A_{kj}\right)x_n = \sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}$$

由前面的定理可知,上式中x_j的系数等于D, 而其余$x_i\left(i \neq j\right)$的系数均为0; 又等式右端为D_j。

于是

$$Dx_j = D_j\left(j = 1, 2, \cdots, n\right) \tag{3}$$

当$D \neq 0$时，方程组(3)有唯一的一个解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

另外，可以证明

$$x_1=\frac{D_1}{D},\cdots,x_j=\frac{D_j}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}$$

也是方程组(1)的解。

$\because \forall i=1,2,\ldots,n,$ 有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{vmatrix}=0$$

按第 1 行展开,得

$$a_{i1}(-1)^{1+1}(-1)^{n-1}D_1+a_{i2}(-1)^{1+2}(-1)^{n-2}D_2+\cdots+a_{ij}(-1)^{1+j}(-1)^{n-j}D_j+\cdots$$
$$+a_{in}(-1)^{1+n}(-1)^{n-n}D_n+b_i(-1)^{1+(n+1)}D=0$$

$$a_{i1}(-1)^{n+1}D_1+\cdots+a_{ij}(-1)^{n+1}D_j\cdots+a_{in}(-1)^{n+1}D_n$$
$$=b_i(-1)^{n+1}D$$

$$\therefore a_{i1}D_1+\cdots+a_{ij}D_j\cdots+a_{in}D_n=b_iD$$

$$\therefore a_{i1}\frac{D_1}{D}+\cdots+a_{ij}\frac{D_j}{D}\cdots+a_{in}\frac{D_n}{D}=b_i.$$

例　用克拉默则解方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8, \\ x_1-3x_2-6x_4=9, \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5, \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0. \end{cases}$$

解　$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=27\neq 0$

$$D_1=\begin{vmatrix}8&1&-5&1\\9&-3&0&-6\\-5&2&-1&2\\0&4&-7&6\end{vmatrix}=81,\ D_2=-108, D_3=-27,\ \ D_4=27$$

$$\therefore x_1=\frac{D_1}{D}=3, x_2=\frac{D_2}{D}=-4, x_3=\frac{D_3}{D}=-1,\ \ x_4=\frac{D_4}{D}=1.$$

例　已知多项式函数 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ 在 $x=\pm1, x=\pm2$ 值：

$f(1)=f(-1)=f(2)=6$，$f(-2)=-6$，试求 $f(x)$。

解：　将 $x=+1,-1,+2,-2$ 代入函数.由题设得到关于 a_0,a_1,a_2,a_3 的线性方程组。

➢ **重要结论**

结论 1　如果线性方程组(1)的系数行列式 $D\neq0$, 则(1)一定有解,且解是唯一的。

结论 2　如果线性方程组(1)无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零。

➢ **齐次线性方程组的相关定理**

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}\tag{4}$$

$x_1=0, x_2=0,\cdots,x_n=0$ 称为方程组(4)的零解，不是零的解称为方程组(4)的非零解。

定理　若齐次线性方程组的系数行列式不为零,则该齐次线性方程组只有零解.

另外，以后将证明：若系数行列式 $D=0$，(4)必有非零解。

定理 齐次线性方程组有非零解的充要条件是系数行列式等于零。

例　问λ取何值时，齐次方程组

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0,\\2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0,\\x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0,\end{cases}$$

有非零解？

解　$$D=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&4\\2&3-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)(2-\lambda)$$

因为 D=0 时，齐次方程组有非零解

所以$\lambda=0,\lambda=2$或$\lambda=3$时齐次方程组有非零解。

第二章小结

一、内容总结

1. n阶行列式定义:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

2. 行列式的性质

(1). $D^T=D$

(2). 互换行列式的两行（列），行列式变号。

推论：如果行列式有两行（列）完全相同，则行列式等于零。

(3). 行列式某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式的外面。

推论：用数k乘以行列式D等于D中某一行（列）所有元素同乘以数k

推论：若行列式的某两行（列）对应元成比例，则该行列式等于零。

(4). 行列式可以按某一行（列）拆分成两个行列式之和。

(5). 把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一数后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式值不变。

3. 行列式按行展开

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}$$

定理：n阶行列式D的任一行（列）的各元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即：

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0$$

4. 方阵可逆的充要条件：$|\mathbf{A}|\neq 0$，且$\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{A^*}{|\mathbf{A}|}$。

5. 克莱姆（Cramer）法则

若方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式$D \neq 0$，则该方程组有唯一解，且

$$x_j = \frac{D_j}{D}$$

克莱姆（Cramer）法则的逆否定理为：如果线性方程组无解或有超过一个以上的解，则它的系数行列式必为零。

推论 1　对于$n \times n$齐次线性方程组$AX = 0$，当系数行列式$|A| \neq 0$时，$AX = 0$只有一个零解。

推论 2　若$n \times n$齐次线性方程组$AX = 0$，有非零解，则必有$|A| = 0$。

补充结论:

1. $|kA| = k^n|A|$
2. $|AB| = |A||B|$ （教材$p54$性质6）
3. $|A^T| = |A|$
4. $|A^*| = |A|^{n-1}$

证明：因为$AA^* = |A|E$，则$|AA^*| = |A||A^*| = ||A|E| = |A|^n$，所以$|A^*| = |A|^{n-1}$。

二、行列式的计算

技巧：主要的方法是把矩阵变换为行阶梯形（三角形），然后计算其主对角线元素的连乘积；其次是充分利用含零元素较多的行或列进行展开；

其他还有加边法、公式法、递推法、数学归纳法等等。

(1). 计算四阶行列式$D = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 10 & 28 \\ 6 & 5 & 6 & 21 \\ 9 & 3 & 2 & 12 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

解：利用行列式性质把行列式化为三角行列式（性质法、三角化法）

$$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_4} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 6 & 21 \\ 9 & 3 & 2 & 12 \\ 6 & 6 & 10 & 28 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-6r_1]{\substack{r_2-6r_1 \\ r_3-9r_1}} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -16 & -24 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+6r_2]{r_2\times(-1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 20 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 \leftrightarrow r_4} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 20 & -6 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+10r_3} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 34 \end{vmatrix} = 68$$

(2). 证明:

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix} = (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_4-a_3)$$

证:利用行列式性质及行列式按列展开(性质法、展开法)

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2-a_1r_1]{\substack{r_4-a_1r_3 \\ r_3-a_1r_2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & a_4-a_1 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & a_4(a_4-a_1) \\ 0 & a_2^2(a_2-a_1) & a_3^2(a_3-a_1) & a_4^2(a_4-a_1) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{并提取公因子}]{\text{按第一列展开}} (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2-a_2r_1]{r_3-a_2r_2} (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_3-a_2 & a_4-a_2 \\ 0 & a_3(a_3-a_2) & a_4(a_3-a_2) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{并提取公因子}]{\text{按第一列展开}} (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_4-a_3)$$

(3). 计算 n 阶行列式(空白处都为零) $D_n = \begin{vmatrix} & & & 1 & \\ & & 2 & & \\ & \iddots & & & \\ n-1 & & & & \\ & & & & n \end{vmatrix}$

解：其中只有 n 个非 0 元素，这 n 个元素之积正是行列式唯一的非零项，再由列下标全排列（n-1,n-2,…,2,1,n）的逆序数确定该项的正负。

$$D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$$

(4). 计算 5 阶行列式 $D_5=\begin{vmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&2&3&0\\0&0&4&5&6\\7&8&0&0&0\\9&10&0&0&0\end{vmatrix}$

解：由分块矩阵行列式公式:

$$\begin{vmatrix}O&A_{m\times m}\\B_{n\times n}&O\end{vmatrix}=(-1)^{m\times n}|A||B|$$

则得

$$D_5=(-1)^{3\times2}\begin{vmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{vmatrix}\begin{vmatrix}7&8\\9&10\end{vmatrix}=-36$$

(5). 计算 5 阶行列式 $D_5=\begin{vmatrix}4&3&0&0&0\\1&4&3&0&0\\0&1&4&3&0\\0&0&1&4&3\\0&0&0&1&4\end{vmatrix}$

解：该行列式称为三对角行列式，通常可以用递推法来求解

$$D_5\overset{\text{按}c1\text{展开}}{=\!=\!=}4\begin{vmatrix}4&3&0&0\\1&4&3&0\\0&1&4&3\\0&0&1&4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&0&0&0\\1&4&3&0\\0&1&4&3\\0&0&1&4\end{vmatrix}=4D_4-3D_3$$

$$D_5-D_4=3(D_4-D_3)=3^2(D_3-D_2)=3^3(D_2-D_1)=3^5$$

$$D_5=D_4+3^5=D_3+3^4+3^5=D_2+3^3+3^4+3^5=D_1+3^2+3^3+3^4+3^5=364$$

(6). 设A、B均为 n 阶方阵，$|A|=3$，$|B|=5$，求$|3A^*B^T|$。

解：由于$|kA|=k^n|A|$，$|AB|=|A||B|$，$|A^T|=|A|$，$|A^*|=|A|^{n-1}$

则有 $|3A^*B^T|=3^n|A^*||B^T|=3^n|A^{n-1}||B|=5*3^{2n-1}$

(7). 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，矩阵$B$满足：$\mathbf{A}^{*}BA=4I-3BA$，其中$I$为单位矩阵，

A^{*}是A的伴随矩阵，求$|B|$。

解：由于 $|A|=3\neq 0$，则存在A^{-1}，且有 $A\mathbf{A}^{*}=|A|I$，$3B=4I-3AB$ 即有：

$3(I+A)B=4I$，两边取行列式，有：$3^{3}|I+A||B|=4^{3}$，而$|I+A|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=4$，

则$|B|=\dfrac{16}{27}$。

(8). 设 $A=(a_1,a_2,a_3)$，A为三阶方阵且$|A|=5$，$B=(a_1+3a_2,a_2+2a_3,a_3-a_1)$，求$|B|$。

解：根据分块矩阵的乘法概念，有：

$$B=(a_1+3a_2,a_2+2a_3,a_3-a_1)=(a_1,a_2,a_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

则 $|\mathrm{B}|=|A|\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=5\times(-5)=-25$。

第三章 矩阵的秩与线性方程组

一、 矩阵的秩

1. 矩阵秩的概念

1) 矩阵的 k 阶子式的概念

定义 在 $m\times n$ 矩阵 A 中任取 k 行 k 列（$k\le m,k\le n$），位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 A 中所处的位置次序而得的 k 阶行列式，称为矩阵 A 的 k 阶子式。

$m\times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k C_n^k$ 个.

2) 矩阵的秩的概念

定义 $m\times n$ **矩阵** A **中不等于零的最高阶非零子式的阶数称为矩阵** A **的秩，记作** $R(A)$ **。并规定零矩阵的秩为 0。**

易知：$(1)R(A)\le \min(m,n)$

(2) 若矩阵A有一个r阶子式不等于零,则$R(A)\ge r$

(3) 若矩阵A的所有$r+1$阶子式全为零,则$R(A)\le r$

(4)规定零矩阵的秩为 0

(5) 满秩矩阵, 降秩矩阵

对 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$，若 $|a_{ij}|\ne 0$，则 $R(A)=n$，称 A 为满秩矩阵；

若 $|a_{ij}|=0$，则 $R(A)<n$，称 A 为降秩矩阵。

任何矩阵 $A_{m\times n}$，总可经过有限次初等行变换把它变为行阶梯形，行阶梯形矩阵中非零行的行数是唯一确定的。非零行的行数就是矩阵的秩。

例 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ 的秩

解 在 A 中, $\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}\ne 0.$

又 $\because$ A的3阶子式只有一个 $|A|$，且 $|A|=0$，

$\therefore \quad R(A)=2.$

例　求矩阵 $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩

解　$\because$　B是一个行阶梯形矩阵，其非零行有3行，

$\therefore$　B 的所有 4 阶子式全为零.

而 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0, \therefore \quad R(B)=3.$

行阶梯形矩阵的秩 ＝ 非零行的行数

例　已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$，求该矩阵的秩。

解　$\because$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, 计算 A 的 3 阶子式，

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore R(A)=2.$

另解　对矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 做初等变换，

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

显然，非零行的行数为 2，

$\therefore R(A)=2.$

此方法简单！

3)　求矩阵秩的初等变换法

因为对于任何矩阵 $A_{m\times n}$，总可以经过有限次初等行变换把它变为行阶梯形。

问题：经过初等变换，两个矩阵的秩是否相同？

定理　初等变换不改变矩阵的秩。

◆初等变换求矩阵秩的方法：把矩阵用初等行变换变成为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩.

例　设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，求矩阵 A 的秩，并求 A 的一个最高阶非零子式。

解　对A作初等行变换，变成行阶梯形矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-r_4} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-3r_1]{r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-4r_2]{r_3-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由阶梯形矩阵有三个非零行可知 $R(A)=3$.

求 A 的一个最高阶非零子式 .

$\because\quad R(A)=3,\quad$ 知A的最高阶非零子式为3阶 .

A 的 3 阶子式共有 $C_4^3\bullet C_5^3=40$ 个 .

考察A的行阶梯形矩阵， 记$A=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$,则矩阵$A_1=(a_1,a_2,a_4)$的行阶梯形矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\because R(A_1)=3, \therefore A_1$ 中必有3阶非零子式.

计算A_1的前三行构成的子式

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 11 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 6 & 11 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -16 \neq 0.$$

这个子式也是 A 的一个最高阶非零子式.

例　求n阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ x & 1 & x & \cdots & x \\ x & x & 1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 的秩。

解: 初等行变换.

例　设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$，求矩阵 A 及矩阵 $B=(A|b)$ 的秩。

分析：　设 B 的行阶梯形矩阵为 $\tilde{B}=(\tilde{A},\tilde{b})$, 则 $\tilde{A}$ 就是 A 的行阶梯形矩阵，

故从 $\tilde{B}=(\tilde{A},\tilde{b})$ 中可同时看出 $R(A)$ 及 $R(B)$.

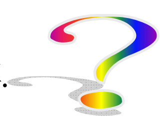
解：

$$B=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3+2r_1}} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+3r_2]{\substack{r_2\div 2 \\ r_3-r_2}} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4-r_3]{r_3\div 5} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\therefore R(A)=2, \quad R(B)=3.$

以$B=(A,b)$为增广矩阵的线性方程组无解.



4) 矩阵秩的性质

(1) $\mathbf{0 \le R\left(A_{m\times n}\right) \le \min(m,n)}$

(2) $\boldsymbol{R(A)=R(A^T)}$

(3) $\boldsymbol{R(kA)=R(A) \quad k\ne 0}$

(4) 若 $\boldsymbol{P,Q}$ 可逆,则 $\boldsymbol{R(PA)=R(AQ)=R(PAQ)}$

(5) $\boldsymbol{\max\{R(A),R(B)\}\le R(A,B)\le R(A)+R(B)}$

(6) $\boldsymbol{A_{m\times n},B_{n\times s}}$,则 $\boldsymbol{R(AB)\ge R(A)+R(B)-n}$

(7) $\boldsymbol{A_{m\times n},B_{n\times s}}$ 且 $\boldsymbol{AB=0}$,则 $\boldsymbol{R(A)+R(B)\le n}$

二、 线性方程组解的判定

矩阵的秩与线性方程组的解之间的关系

1. 判定定理

n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1}$$

$A_{m\times n}x=b$ 的解的情况如下：

（1） 有解的充要条件是 $R(A)=R(B)$

（2） 有唯一解的充要条件是 $R(A)=R(B)=n$

（3） 有无穷多解的充要条件是 $R(A)=R(B)<n$ 。

小结 $R(A)=R(B)=n \Leftrightarrow Ax=b$ 有唯一解。

$R(A)=R(B)<n \Leftrightarrow Ax=b$ 有无穷多解。

定义 方程组的含有 $n-r$ 个独立参数的解称为**方程组的通解**。$(r=R(A))$

齐次线性方程组：系数矩阵化成行最简形矩阵，便可写出其通解；

非齐次线性方程组：增广矩阵化成行阶梯形矩阵，便可判断其是否有解. 若有解，

化成行最简形矩阵，便可写出其通解；

2. 线性方程组的解法

例 求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

解 对系数矩阵 A 施行初等行变换化为最简形：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \div (-3)]{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - \dfrac{5}{3}x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + \dfrac{4}{3}x_4 = 0, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = 2x_3 + 5/3x_4, \\ x_2 = -2x_3 - 4/3x_4, \end{cases} \qquad (x_3, x_4 \text{ 可任意取值}).$$

令 $x_3 = c_1, x_4 = c_2$, 得通解:

$$\begin{cases} x_1 = 2c_1 + \dfrac{5}{3}c_2, \\ x_2 = -2c_1 - \dfrac{4}{3}c_2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{其中} c_1, c_2 \text{为任意实数.}$$

例　求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

解　对增广矩阵 B 进行初等行变换：

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_2]{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\therefore R(A) = 2, R(B) = 3,$ 故方程组无解。

例　求解非齐次方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2 \end{cases}$$

解　　对增广矩阵 B 进行初等行变换：

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore R(A) = R(B) = 2$

$\therefore$ 有解。

$$\therefore \begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2 \\ x_3 = 2x_4 + 1/2 \end{cases}$$

令 $x_2 = c_1, x_4 = c_2,$ 得方程组的通解：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + 1/2 \\ c_1 \\ 2c_2 + 1/2 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{其中} c_1, c_2 \text{为任意常数.}$$

例　证明方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \\ x_5 - x_1 = a_5 \end{cases}$ 有解的充要条件是 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$。在有解的情况下，求出它的一切解。

解证　对增广矩阵 B 进行初等变换，

方程组的增广矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^{5} a_i \end{pmatrix}$$

$$\because R(A) = R(B) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} a_i = 0$$

$\therefore$ 方程组有解的充要条件是 $\sum_{i=1}^{5} a_i = 0.$

由于原方程组等价于方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \end{cases}$

由此得通解：

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + x_5 \\ x_2 = a_2 + a_3 + a_4 + x_5 \\ x_3 = a_3 + a_4 + x_5 \\ x_4 = a_4 + x_5 \end{cases} \qquad (x_5\text{为任意实数})$$

例　设有线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases},$$

问 λ 取何值时,无解?有唯一解?有无穷多个解?

解　对增广矩阵 $B = (A, b)$ 作初等行变换，

$$B=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ \lambda & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-\lambda r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3\end{pmatrix}$$

$$B\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda)\\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda)(1+\lambda)^2\end{pmatrix}$$

(1) 当$\lambda=1$时, $B\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$， $R(A)=R(B)=1<3$, 方程组有无穷多解.

其通解为$\begin{cases}x_1=1-c_1-c_2\\ x_2=c_1\\ x_3=c_2\end{cases}$ $(c_1, c_2$为任意实数$)$.

(2) 当$\lambda\neq 1$时, $B\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & 1 & -1 & -\lambda\\ 0 & 0 & 2+\lambda & (1+\lambda)^2\end{pmatrix}$

这时又分两种情形：

1) $\lambda\neq -2$时, $R(A)=R(B)=3$, 方程组有唯一解：

$$x_1=-\frac{\lambda+1}{\lambda+2},\quad x_2=\frac{1}{\lambda+2},\quad x_3=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}.$$

2) $\lambda=-2$时, $B\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $R(A)\neq R(B)$, 方程组无解.

第4章　向量空间

一、n 维向量

(1) 定义

n 个有次序的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 所组成的数组称为 n **维向量**，这 n 个数称为该向量的 n 个分量，第 i 个数 a_i 称为第 i 个分量。

分量全为实数的向量称为实向量；

分量全为复数的向量称为复向量。

例如　$(1,2,3,\cdots,n)$ $\longrightarrow$ n 维实向量

$(1+2i, 2+3i, \cdots, n+(n+1)i)$ $\longrightarrow$ n 维复向量

(2) n 维向量的表示方法

n 维向量写成一行，称为行向量，也就是行矩阵，通常用 $a^T, b^T, \alpha^T, \beta^T$ 等表示，如：

$$a^T = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

$$a^T = (1,2,-2,0,-5) \qquad \beta^T = (0,1,-3,4,-8,2,7)$$

n 维向量写成一列，称为列向量，也就是列矩阵，通常用 a, b, α, β 等表示，如：

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad a = (3,-2,0,6)^T$$

注意　　1．行向量和列向量总被看作是两个不同的向量；

2．行向量和列向量都按照矩阵的运算法则进行运算；

$$2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-2\\1\end{pmatrix}$$

3．当没有明确说明是行向量还是列向量时，默认向量类型为列向量.

(3) n 维向量的加法和数乘运算规律

向量加法：交换律、结合律

数乘向量：结合律、分配律（数的分配、向量的分配）

$$\begin{aligned}&\alpha+0=\alpha\\&\alpha+(-\alpha)=0\\&1\times\alpha=\alpha\end{aligned}$$

二、向量组的线性相关性

(1) 向量、向量组与矩阵

若干个同维数的列向量（或同维数的行向量）所组成的集合叫做向量组。

例如　矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$有$n$个$m$维列向量

$$\begin{array}{ccccccc} & \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_j & & \alpha_n\\ A= & \left(\boxed{\begin{matrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{matrix}}\right. & \boxed{\begin{matrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{matrix}} & \begin{matrix}\cdots\\\cdots\\\vdots\\\cdots\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{matrix}} & \begin{matrix}\cdots\\\cdots\\\vdots\\\cdots\end{matrix} & \left.\boxed{\begin{matrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{matrix}}\right)\end{array}$$

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$称为矩阵$A$的列向量组.

类似地,矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$又有$m$个$n$维行向量：

$$A=\begin{pmatrix}\boxed{a_{11}\quad a_{12}\quad\cdots\quad a_{1n}}\\\boxed{a_{21}\quad a_{22}\quad\cdots\quad a_{2n}}\\\vdots\qquad\vdots\qquad\cdots\qquad\vdots\\\boxed{a_{i1}\quad a_{i2}\quad\cdots\quad a_{in}}\\\vdots\qquad\vdots\qquad\cdots\qquad\vdots\\\boxed{a_{m1}\quad a_{m2}\quad\cdots\quad a_{mn}}\end{pmatrix}\begin{matrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\\\alpha_i^T\\\\\alpha_m^T\end{matrix}$$

向量组$\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_m^T$称为矩阵 A 的行向量组。

反之，由有限个向量所组成的向量组可以构成一个矩阵。

m个n维列向量所组成的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$,构成一个$n\times m$矩阵。

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$$

m个n维行向量所组成的向量组$\beta_1^T,\beta_2^T,\cdots\beta_m^T$,构成一个$m\times n$矩阵。

例如 $a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，$a_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}$，$a_3=\begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ $A=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&0&0\\3&0&0\\4&2&0\end{pmatrix}_{4\times3}$

$$\begin{array}{l}b_1^t=(1,2,3),b_2^t=(2,0,0),\\ b_3^t=(0,0,3),b_4^t=(0,4,0)\end{array}\longrightarrow B=\begin{pmatrix}b_1^t\\b_2^t\\b_3^t\\b_4^t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&0&0\\0&0&3\\0&4&0\end{pmatrix}$$

- 线性方程组的向量表示

$$\begin{cases}\boxed{a_{11}}x_1+\boxed{a_{12}}x_2+\cdots+\boxed{a_{1n}}x_n=\boxed{b_1},\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\alpha_1}x_1+\boxed{\alpha_2}x_2+\cdots+\boxed{\alpha_n}x_n=\boxed{b}$$

方程组与增广矩阵的列向量组之间一一对应。

(2) 线性组合，线性表示

定义 给定向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，对于任何一组实数$k_1$，$k_2,\cdots,k_m$，向量$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$称为向量组的一个**线性组合**，$k_1$，$k_2,\cdots,k_m$称为这个线性组合的系数。

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\qquad \alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)x=b$$

定义 给定向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$和向量$b$，如果存在一组数$k_1$，$k_2,\cdots,k_m$，

使

$$b = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots k_m\alpha_m$$

则向量b是向量组A的线性组合，这时称向量b能由向量组A线性表示或线性表出。

即线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = b$$

有解。

定理　n维向量β可由n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示

$\Leftrightarrow$线性方程组$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_m\alpha_m = \beta$有解

$\Leftrightarrow$矩阵$A = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$的秩等于矩阵$\overline{A} = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta)$的秩。

向量b能由向量组A线性线性表示的充分必要条件是矩阵$A = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$的秩等于矩阵$B = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta)$的秩。

(3) 线性相关性的概念

定义　给定向量级$A = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$。如果存在不全为零的数$k_1$，$k_2,\cdots,k_m$，使$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$，则称向量组$A$是线性相关的，否则称它线性无关。

注意　1. 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，则只有当$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$时，才有$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_n\alpha_n = 0$成立。

2．对于任一向量组，不是线相关就是线性无关。

3．向量组只包含一个向量α时，若$\alpha = 0$则说α线性相关，若$\alpha \neq 0$，则说α线性无关。

4．包含零向量的任何向量组是线性相关的。

5．对于含有丙个向量的向量组，它线性相关的充要条件是两向量的分量对应成比例，几何意义是两向量共线；三个向量相关的几何意义是三向量共面。

- 线性相关性在线性方程组中的应用

若方程组中有某个方程是其余方程的线性组合时，这个方程就是多余的，这是称

方程组（各个方程）是线性相关的；当方程组中没有多余方程，就称该方程组（各个方程）线性无关（或线性独立）。

结论　向量组 A 线性相关就是齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$，即 $\mathrm{A}x=0$ 有非零解。其中 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)$。

例　已知

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix},$$

试讨论向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性相关性。

解　方法 1 判断齐次线性方程组是否有非零解。

方法 2 直接由向量组形成的矩阵判断该矩阵所对应的齐次方程组解的情况。

例　已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$b_1=\alpha_1+\alpha_2$，$b_2=\alpha_2+\alpha_3$，$b_3=\alpha_3+\alpha_1$，试证 b_1,b_2,b_3 线性无关。

证　设有 x_1,x_2,x_3，使

$$x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3=0$$

即　$x_1(\alpha_1+\alpha_2)+x_2(\alpha_2+\alpha_3)+x_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$

亦即　$(x_1+x_3)\alpha_1+(x_1+x_2)\alpha_2+(x_2+x_3)\alpha_3=0$

因 α_1，α_2，α_3 线性无关，故有

$$\begin{cases}x_1+x_3=0,\\x_1+x_2=0,\\x_2+x_3=0.\end{cases}$$

由于此方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0$$

故方程组只有零解 $x_1=x_2=x_3=0$，所以向量组 b_1,b_2,b_3 线性无关。

性质　若向量组 A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则向量组 $B:\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$ 也线性相

关；反言之，若向量组 B 线性无关，则向量组 A 也线性无关。

（部分相关，则整体相关；整体无关，则部分无关）。

(4) 线性相关性的判定

定理　对于向量组 A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，记 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\right)$，则

1．A 线性相关的充要条件是 $R(A)<m$。

2．A 线性无关的充要条件是 $R(A)=m$。

证明：1.向量组 A 线性相关充要条件是 Ax=0 有非零解, Ax=0 有非零解的充要条件是 R(A)<m.

2.向量组 A 线性无关充要条件是 Ax=0 只有零解, Ax=0 只有零解的充要条件是 R(A)=m.

证毕.

定理的三个推论：

推论 1 设 A 为 n 阶方阵，则 A 的列向量组线性相关的充要条件是 A 的行列式等于零。

推论 2 当 $m>n$ 时，m 个 n 维向量组成的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 一定线性相关。

推论 3 设有两个向量组

$$T_1:\alpha_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{rj})^T,(j=1,2,\ldots,m)$$

$$T_2:\beta_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{rj},a_{r+1j},\cdots,a_{nj})^T,(j=1,2,\ldots,m)$$

若向量组 T_1 线性无关，则向量组 T_2 也线性无关。

若向量组 T_2 线性相关，则向量组 T_1 也线性相关。

例　n 维向量组

$$e_1=\left(1,0,\cdots,0\right)^T,e_2=\left(0,1,\cdots,0\right)^T,\cdots,\ e_n=\left(0,0,\cdots,1\right)^T$$

称为 n 维单位坐标向量组,讨论其线性相关性 .

解　法 1　n 维单位坐标向量组构成的矩阵 $E=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 是 n 阶单位矩阵。即 $R(E)$ 等于向量组中向量个数，故由定理知此向量组是线性无关的。

法 2　利用线性相关性的定义。

例　设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}$，试讨论向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$及$\alpha_1,\alpha_2$的线性相关性。

分析　对矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，施行行初等变换，化为行阶梯形矩阵，便可同时看出矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$及$(\alpha_1,\alpha_2)$的秩，利用定理即可得出结论.

解　$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{pmatrix}\overset{r\cdots}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore R((\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3))=2<3$，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关；

$R((\alpha_1,\alpha_2))=2$，向量组α_1,α_2线性无关.

定理　向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m(m\geq 2)$线性相关的充要条件是$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$中至少有一个向量可由其它$m-1$个向量线性表示.

证明　必要性　设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，则存在不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0,$$

不妨设$k_1\neq 0$，

则　$$\alpha_1=(-\frac{k_2}{k_1})\alpha_2+(-\frac{k_3}{k_1})\alpha_3+\cdots+(-\frac{k_m}{k_1})\alpha_m,$$

即α_1可由$\alpha_2,\alpha_3,\cdots\alpha_m$线性表示.

充分性　设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中至少有一个向量可由其他$m-1$个向量线性表示，不妨设$\alpha_m$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$表示，则

$$\alpha_m=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{m-1}\alpha_{m-1}$$

移项得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{m-1}\alpha_{m-1}-\alpha_m=0$$

所以，存在$k_1,k_2,\cdots,k_{m-1},-1$不全为 0

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关

定理　设向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，而向量组$B:\alpha_1,\cdots,\alpha_m,b$线性相关，则向量$b$必能由向量组$A$线性表示，且表示式是唯一的。

证明 $\because$ 组$B:\alpha_1,\cdots,\alpha_m,b$线性相关,

$\therefore$ 存在不全为零的数$k_1,\cdots,k_m,k$,使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+kb=0$$

$\because \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关,$\therefore k\neq 0$,

$\therefore b=(-\frac{k_1}{k})\alpha_1+(-\frac{k_2}{k})\alpha_2+\cdots+(-\frac{k_m}{k})\alpha_m$;

设$b=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m$,

$b=\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2+\cdots+\mu_m\alpha_m$,

$(\mu_1-\lambda_1)\alpha_1+(\mu_2-\lambda_2)\alpha_2+\cdots+(\mu_m-\lambda_m)\alpha_m=0$,

$\because \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关,$\therefore \mu_1=\lambda_1,\cdots,\mu_m=\lambda_m$.

三、向量组的秩

1. 向量组的等价

定义　设有两个向量组A:　$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与　B:　$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$.若向量组 B 中的向量均可由向量组 A 线性表示, 则称向量组 B 可由向量组 A 线性表示;

若向量组 A 与向量组 B 可以相互线性表示, 则称向量组 A 与向量组 B 等价.

性质：反身性、对称性、传递性

线性表示中的系数矩阵 K

设有两个向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m;B:b_1,b_2,\cdots,b_s$，$B$能由$A$线性表示，即对每个向量$b_j(j=1,2,\cdots,s)$存在数$k_{1j},k_{2j},\cdots k_{mj}$，使

$$\begin{aligned} b_1 &= k_{11}\alpha_1 + k_{21}\alpha_2 + \cdots + k_{m1}\alpha_m \\ b_2 &= k_{12}\alpha_1 + k_{22}\alpha_2 + \cdots + k_{m2}\alpha_m \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_j &= k_{1j}\alpha_1 + k_{2j}\alpha_2 + \cdots + k_{mj}\alpha_m \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_s &= k_{1s}\alpha_1 + k_{2s}\alpha_2 + \cdots + k_{ms}\alpha_m \end{aligned}$$

$$(b_1, b_2, \cdots, b_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)K$$

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{ms} \end{pmatrix}$$

若矩阵$C = AB$,设$C_{m\times n}, A_{m\times s}, B_{s\times n}$,

$$(c_1, c_2, \cdots, c_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

则C的列向量组能由A的列向量组线性表示,B为这一表示的系数矩阵.

类似地,若$C_{m\times n} = A_{m\times s}B_{s\times n}$

$$\begin{pmatrix} \gamma_1^T \\ \gamma_2^T \\ \vdots \\ \gamma_m^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_s^T \end{pmatrix}$$

C的行向量组能由B的行向量组线性表示,A为这一表示的系数矩阵.

定理　若向量组$T_1:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$可由向量组$T_2:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性表示，且$m > n$，则$T_1$线性相关。

推论 1　若向量组$T_1:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$可由向量组$T_2:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性表示，且$T_1$线性无关，则$m \le n$。

推论 2　若两个线性无关向量组等价，则它们所包含的向量的个数相等。

定理　矩阵 A 经初等行变换化为矩阵 B，则 A 与 B 的任何对应的列向量构成的列向量组有相同的线性组合关系。

2.　最大线性无关组

定义　设有向量组$A:\alpha_i$,如果在向量组A中存在r个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$,满足

(1) 向量组$A_0:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关;

(2) 向量组A中任意$r+1$(若有)个向量线性相关;

则称向量组A_0是向量组A的一个最大线性无关组,(简称最大无关组).

定义　向量组A_0中所含向量的个数r称为向量组的秩.

向量组$A:a_1,a_2,\cdots,a_m$的秩记作$R(a_1,a_2,\cdots,a_m)$,$R(A)$.

只含0向量的向量组的秩规定为0.

例　设$a_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},a_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},a_5=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},a_6=\begin{pmatrix}12\\71\\29\end{pmatrix}$

证明：a_1,a_3,a_4是向量组A的一个最大无关组.

证明　$\because A=(a_1,a_3,a_4)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\therefore R(A)=3$,$\therefore$向量组a_1,a_3,a_4线性无关,

又$\because$任意4个向量构成的向量组线性相关,

$\therefore a_1,a_3,a_4$是一个最大无关组.

3.　矩阵的秩与向量组的秩的关系

定理　矩阵的秩等于它的列向量组的秩,也等于它的行向量组的秩.

证　设$\mathrm{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$, $R(\mathrm{A})=r$,并设r阶子式$D_r\neq 0$. 则D_r所在的r列线性无关.

又由A中所有$r+1$(若有)阶子式均为零,知A中任意$r+1$(若有)个列向量都线性相关。

因此D_r所在的r列是A的列向量组的一个最大无关组.

所以列向量组的秩等于$r=R(\mathrm{A})$.

类似可证A的行向量组的秩也等于$R(\mathrm{A})$.

重要推论(最大无关组的求法)：

若D_r是矩阵A的一个最高阶非零子式,则:

D_r所在的r列即是列向量组的一个最大无关组，

D_r所在的r行即是行向量组的一个最大无关组.

例　已知向量组$A: a_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$,

求向量组A的秩,并求A的一个最大无关组.

解　记$\mathrm{A}=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore R(a_1,a_2,a_3)=R(\mathrm{A})=2$

又$\because \begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0, \begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0, \begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$

$\therefore a_1,a_2$、a_1,a_3、a_2,a_3是向量组A的最大线性无关组.

所以:　(1)一般地,最大无关组不唯一,但所含向量个数相同 .

(2)向量组与它的最大无关组是等价的.

证　设向量组$A_0: a_1,a_2,\cdots,a_r$是向量组$A: a_1,a_2,\cdots,a_m$的一个最大无关组,

显然,向量组A_0可以由向量组A线性表示,

由最大无关组的定义,知向量组A可以由向量组A_0线性表示,

所以,向量组A_0与向量组A等价.

(3)一个向量组的两个不同最大无关组是等价的.

例　全体n维向量构成的向量组记作R^n，求R^n的一个最大无关组及R^n的秩.

解　因为n维单位坐标向量构成的向量组 $E: e_1, e_2, \cdots, e_n$是线性无关的，

又$\because R^n$中的任意$n+1$个向量都线性相关，

因此向量组E是R^n的一个最大无关组,且R^n的秩等于n.

例　设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

求矩阵A的列向量组的一个最大无关组，并把不属最大无关组的列向量用最大无关组线性表示.

解　记 $A=(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$， 对$A$施行初等行变换变为行阶梯形矩阵

$$A=(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \overset{\text{初等行变换}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知$R(A)=3$,

故列向量组的最大无关组含3个向量.

而三个非零行的非零首元在1、2、4三列，

故 a_1, a_2, a_4,为列向量组的一个最大无关组.

为了把a_3, a_5用a_1, a_2, a_4线性表示,将A再变成行最简形矩阵.

$$A=(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \overset{\text{初等行变换}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得　$\begin{cases} a_3=-a_1-a_2+0a_4 \\ a_5=4a_1+3a_2-3a_4 \end{cases}$

初等行变换保持矩阵列向量组间的线性关系. 初等列变换保持矩阵行向量组间的线性关系.

定理　若向量组 T_1 可由向量组 T_2 线性表示，则向量组 T_1 的秩不超过向量组

T_2 的秩。

证明　不妨设向量组 T_1 和向量组 T_2 的极大线性无关组分别为：

$$(\mathrm{I})\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r;\text{和}(\mathrm{II})\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$$

向量组(I)可由向量组 T_1 线性表示；向量组 T_1 可由向量组 T_2 线性表示；向量组 T_2 可由向量组(II)线性表示。所以由向量组的线性表示的可传递性，向量组(I)可由向量组(II)线性表示，得到： $r \le s$

即，向量组 T_1 的秩不超过的向量组 T_2 秩。

推论　等价向量组的秩相等。

证　　设向量组A与向量组B的秩依次为 s和 r.

因两个向量组等价,即两个向量组能相互线性表示,

故$s \le r$与$r \le s$同时成立

推论　$R(AB) \le \min\left\{R(A), R(B)\right\}$

四、n 维向量空间

1. 向量空间的概念

定义　设V 是n 维向量构成的非空集合，且满足

(1)对$\forall \alpha, \beta \in V$,有$\alpha + \beta \in V$,

(2)对$\forall \alpha \in V$，任意数k有$k\alpha \in V$,

那么就称集合V 是一个向量空间。

说明　　集合V 对于加法及乘数封闭是指：

若$\alpha \in V, \beta \in V$, 则$\alpha + \beta \in V$;

若$\alpha \in V, k \in R$, 则$k\alpha \in V$.

例　证明:3 维向量的全体R^3,是一个向量空间.

$\because$ (1)R^3非空,

(2)$\forall \alpha, \beta \in R^3$,有$\alpha + \beta \in R^3$,

(3)$\forall k \in R, \forall \alpha \in R^3$,有$k\alpha \in R^3$,

$\therefore R^3$是一个向量空间.

类似地，n维向量的全体R^n，也是一个向量空间.

向量空间必含零向量.

例　判别下列集合是否为向量空间。

$$V_1=\left\{x=\left(0,x_2,\cdots,x_n\right)^T \ x_2,\cdots,x_n\in R\right\}$$

解　显然V_1由n维向量构成的集合，非空，

又$\because$对于V_1的任意两个元素

$\alpha=\left(0,a_2,\cdots,a_n\right)^T,\ \beta=\left(0,b_2,\cdots,b_n\right)^T\in V_1,$

有　$\alpha+\beta=\left(0,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n\right)^T\in V_1$

$\lambda\alpha=\left(0,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n\right)^T\in V_1(\forall\lambda\in R)$

$\therefore V_1$是向量空间.

例　判别下列集合是否为向量空间。

$$V_2=\left\{x=\left(1,x_2,\cdots,x_n\right)^T \ x_2,\cdots,x_n\in R\right\}$$

解　因为　对于$\alpha=\left(1,a_2,\cdots,a_n\right)^T\in V_2,$

有$2\alpha=\left(2,2a_2,\cdots,2a_n\right)^T\notin V_2.$

$\therefore V_2$不是向量空间.

例　设a,b为两个已知的n维向量，集合

$$V=\left\{x=\lambda a+\mu b\,\middle|\,\lambda,\mu\in R\right\}$$

试判断集合是否为向量空间。

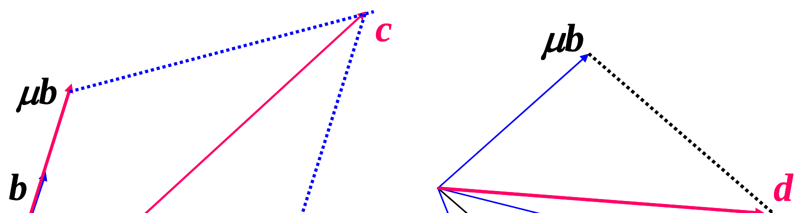
解　$\because\forall x_1=\lambda_1 a+\mu_1 b\in V,x_2=\lambda_2 a+\mu_2 b\in V$，$k\in R$

有　$x_1+x_2=(\lambda_1+\lambda_2)a+(\mu_1+\mu_2)b\in V,$

$kx_1=(k\lambda_1)a+(k\mu_1)b\in V.$

又$V\neq\phi(\because\theta\in V)$　　$\therefore V$是向量空间.

这个向量空间称为由向量a,b所生成的向量空间.记作$L(a,b)$.



一般地，由向量组$a_1, a_2, \cdots, a_m$所生成的向量空间为

$$V = \left\{ x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in R \right\}$$

记作 $V = L[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m]$

例　设向量组 $a_1, \cdots, a_m$ 与向量组 $b_1, \cdots, b_s$ 等价，记

$$V_1 = \left\{ x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in R \right\}$$

$$V_2 = \left\{ x = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \cdots + \mu_s b_s \,\middle|\, \mu_1, \mu_2, \cdots \mu_s \in R \right\}$$

试证　$V_1 = V_2$.

证　设$x \in V_1$，则x可由$a_1, \cdots, a_m$线性表示.

因$a_1, \cdots, a_m$可由$b_1, \cdots, b_s$线性表示，故x可由$b_1, \cdots, b_s$线性表示，

$\therefore V_1 \subset V_2$,

同理可证:$V_2 \subset V_1$,

$\therefore V_1 = V_2$.

2.　子空间

定义　设V_1, V_2都是向量空间,若$V_1 \subset V_2$,则称V_1是V_2的子空间.

例　$V_1 = \left\{ x = (0, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_2, \cdots, x_n \in R \right\}$

$\because V_1 \subset R^n, V_1$是向量空间,

$\therefore V_1$是R^n的子空间.

3. 向量空间的基与维数

定义 设V是一个向量空间,若r个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \in V$,满足

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关;

(2) V中任一向量都可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性表示.

则称向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$是$V$的一个基, r称为V的维数, 并称V为r维向量空间.

说明 （1）只含有零向量的向量空间称为 0 维向量空间，它没有基。

（2）若把向量空间 V 看作向量组，那末 V 的基就是向量组的最大线性无关组， V 的维数就是向量组的秩.

（3）若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是向量空间$V$的一个基，则$V$可表示为

$$V = \left\{ x = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_r\alpha_r \ \lambda_1, \cdots, \lambda_r \in R \right\}$$

$$= L[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r]$$

例 设矩阵 $A = (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = (b_1, b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$,

验证a_1, a_2, a_3是R^3的一个基，并把 b_1, b_2用这个基线性表示.

解 $$(A \vdots B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{初等行变换}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

因有$A \sim E$，故a_1, a_2, a_3为R^3的一个基，且

$$b_1 = \frac{2}{3}a_1 - \frac{2}{3}a_2 - a_3,$$
$$b_2 = \frac{4}{3}a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3.$$

4.　向量在基下的坐标

定义　设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是$m$维向量空间$V$的一组基，对$\beta\in V$，有

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m$$

那么组合系数$x_1,x_2,\cdots,x_m$构成的向量（$x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$称为$\beta$在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$下的坐标。

向量空间 V 的基确定之后，V 中向量在该基下的坐标是唯一的。

例
$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{3}a_1 - \frac{2}{3}a_2 - a_3, \\ b_2 &= \frac{4}{3}a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3. \end{aligned}$$

b_1在a_1,a_2,a_3下的坐标为：（$\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-1)^{\mathrm{T}}$

b_2在a_1,a_2,a_3下的坐标为：（$\frac{4}{3},1,\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$

5.　基变换公式与过渡矩阵

问题：在n维线性空间V中，任意n个线性无关的向量都可以作为　的一组基．对于不同的基，同一个向量的坐标是不同的．

那么，同一个向量在不同的基下的坐标有什么关系呢？换句话说，随着基的改变，向量的坐标如何改变呢？

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$及$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是线性空间$V_n$的两个基,且有

$$\begin{cases} \beta_1 = p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + \cdots + p_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = p_{12}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + \cdots + p_{n2}\alpha_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_n = p_{1n}\alpha_1 + p_{2n}\alpha_2 + \cdots + p_{nn}\alpha_n \end{cases},$$

称此公式为基变换公式.

由于

$$\begin{cases} \beta_1 = p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + \cdots + p_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = p_{12}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + \cdots + p_{n2}\alpha_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_n = p_{1n}\alpha_1 + p_{2n}\alpha_2 + \cdots + p_{nn}\alpha_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P \longrightarrow \text{基变换公式}$$

在基变换公式

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$$

中，矩阵P称为由基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵。

过渡矩阵P是可逆的。

过渡矩阵 P 就建立了向量空间 V 中的两组基之间的关系，作为过渡矩阵，P 具有如下关系：

（1） 满足基变换公式的矩阵 P 的第 j 列是 β_j 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 下的坐标。

（2） 由于基是线性无关的，因而 P 是可逆矩阵。而且 P^{-1} 是从 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 的过渡矩阵。

6. 坐标变换公式

定理 设V_n中的元素α，在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的坐标为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，在基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$下的坐标为$(x_1',x_2',\cdots,x_n')^T$，若两个基满足关系式

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$$

则有坐标变换公式$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}$, 或$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$.

证明

$$\because \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}$$

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$$

$$\therefore(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}.$$

即 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

由于矩阵P可逆,所以 $$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}。$$

五、欧氏空间 R^n

1. 内积的定义及性质

定义　设有n维向量 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, 称 $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$ 为x与y的内积,

记做：$\langle x, y \rangle$。

即 $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$。

定义了内积的向量空间 R^n 称为欧几里得空间，简称欧氏空间。

欧几里得：

● 在差不多一百年前，几何就是欧几里德。

● 公元前 330 年~前 275 年，是古希腊数学家，以《几何原本》闻名于世——它的基本原理和定理直到现在仍是科学教科书的一部分。

一句箴言：

公元前 300 年左右，在托勒密王（公元前 364 ~ 前 283）的邀请下，来到亚历山大，长期在那里工作。他是一位温良敦厚的教育家，对有志数学之士，总是循循善诱。但反对不肯刻苦钻研、投机取巧的作风，也反对狭隘实用观点。据普罗克洛斯（约 410 ~ 485）记载，托勒密王曾经问欧几里得，除了他的《几何原本》之外，还有没有其他学习几何的捷径。欧几里得回答说：“在几何里，没有专为国王铺设的大道。”这句话后来成为传诵千古的学习箴言。

例　设$x=(1,0,-1,0)^T$, $y=(1,2,3,4)^T$, 求$\langle x,y\rangle$.

解　$\langle x,y\rangle = 1\times1+0\times2+(-1)\times3+0\times4=-2$。

说明　如果x,y都是列向量,内积可用矩阵记号表示为:$\langle x,y\rangle = x^T y$.

◆内积的运算性质

其中x,y,z为n维向量,λ为实数:

(1) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

(2) $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$

(3) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

(4) $\langle x,x\rangle \ge 0$,且当$x\ne 0$时有$\langle x,x\rangle > 0$.

(5) 柯西−施瓦茨不等式:$\langle x,y\rangle^2 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$

2.　向量的长度及性质

定义　设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, 令$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\sqrt{x^T x}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$, 称$\|x\|$为$n$维向量$x$的长度（或范数）。

向量的长度具有下述性质：

1. 非负性　当$x\ne 0$时,$\|x\|>0$;当$x=0$时,$\|x\|=0$;

2. 齐次性　$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$;

3. 三角不等式　$\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$。

单位向量及n维向量间的夹角：

(1) 当$\|x\|=1$时,称x为单位向量；

(2) 当$\|x\|\ne 0,\|y\|\ne 0$时,$\theta=\arccos\dfrac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$称为$n$维向量$x$与$y$的夹角。

例　求向量$\alpha=(1,2,2,3)^T$与$\beta=(3,1,5,1)^T$的夹角.

解　$\because \cos\theta=\dfrac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\|\|\beta\|}=\dfrac{18}{3\sqrt{2}\cdot 6}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{4}.$

3. 正交向量组的概念及求法

1) 正交的概念

当$\langle x, y\rangle = 0$时,称向量x与y 正交。

例如 设$x = (1,0,2,0)^T, y = (0,3,0,4)^T$

$\because \langle x, y\rangle = 0, \therefore$向量$x$与$y$正交.

由定义知,若 $x = 0$,则 x 与任何向量都正交.

2) 正交向量组的概念

若 (1) 向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$均非零向量,

(2) 向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$两两正交,

则称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$是一个正交向量组.

3) 正交向量组的性质

定理 若n维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是一个正交向量组,则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关。

证明 设有 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 使

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_r\alpha_r = 0$$

以α_1^T左乘上式两端,得 $\lambda_1\alpha_1^T\alpha_1 = 0$

由$\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1^T\alpha_1 = \|\alpha_1\|^2 \neq 0$, 从而有$\lambda_1 = 0$.

同理可得$\lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$, 故$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关.

4) 向量空间的正交基

若 (1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是向量空间$V$的一个基,

(2) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是一个正交向量组,

则称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是向量空间$V$的一个正交基.

例 已知三维向量空间中两个向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\qquad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

正交，试求α_3使$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$构成三维空间的一个正交基.

解　设$\alpha_3=\left(x_1,x_2,x_3\right)^T\neq 0,$且分别与$\alpha_1,\alpha_2$正交

则有　$\langle\alpha_1,\alpha_3\rangle=\langle\alpha_2,\alpha_3\rangle=0$

即　$\begin{cases}\langle\alpha_1,\alpha_3\rangle=x_1+x_2+x_3=0\\ \langle\alpha_2,\alpha_3\rangle=x_1-2x_2+x_3=0\end{cases}$

解之得　$x_1=-x_3,\ x_2=0.$

令 $x_3=1,$则有　$\alpha_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

由上可知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$构成三维空间的一个正交基。

5)　标准（规范）正交基

定义　若 (1) $e_1,e_2,\cdots,e_r$是向量空间 V的一个基,

(2) $e_1,e_2,\cdots,e_r$是一个正交向量组,

(3) $e_1,e_2,\cdots,e_r$均是单位向量,

则称 $e_1,e_2,\cdots,e_r$是向量空间V的一个规范正交基.

例如　$e_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$

由于　$\begin{cases}\langle e_i,e_j\rangle=0, & i\neq j\text{且}i,j=1,2,3,4.\\ \langle e_i,e_j\rangle=1, & i=j\text{且}i,j=1,2,3,4.\end{cases}$

所以e_1,e_2,e_3,e_4为R^4的一个规范正交基.

同理可知 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ 也为 R^4 的一个规范正交基.

- 求规范正交基的方法（Schmidt 正交化方法）

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量空间 V 的一个基, 求 V 的一个与之等价的规范正交基

$e_1,e_2,\cdots,e_r$, 这个问题叫做把 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 这个基规范正交化.

（1） 正交化，取 $b_1=a_1$，

$$b_2=a_2-\frac{\langle a_2,b_1\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle}b_1,$$

$$b_3=a_3-\frac{\langle a_3,b_1\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle}b_1-\frac{\langle a_3,b_2\rangle}{\langle b_2,b_2\rangle}b_2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_r=a_r-\frac{\langle a_r,b_1\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle}b_1-\frac{\langle a_r,b_2\rangle}{\langle b_2,b_2\rangle}b_2-\cdots-\frac{\langle a_r,b_{r-1}\rangle}{\langle b_{r-1},b_{r-1}\rangle}b_{r-1}$$

那么 $b_1,\cdots,b_r$ 与 $a_1,\cdots a_r$ 等价, 且 $b_1,\cdots,b_r$ 两两正交.

（2） 单位化，取

$$e_1=\frac{b_1}{\|b_1\|},\quad e_2=\frac{b_2}{\|b_2\|},\ \cdots\cdots, e_r=\frac{b_r}{\|b_r\|},$$

则 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 为 V 的一个与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$ 等价的规范正交基.

上述由线性无关向量组 $a_1,\cdots,a_r$ 构造出正交向量组 $b_1,\cdots,b_r$ 的过程, 称为 施密特正交化过程。

例 用施密特正交化方法，将向量组

$$a_1=(1,1,1,1)^T,a_2=(1,-1,0,4)^T,a_3=(3,5,1,-1)^T$$

正交规范化。

解 先正交化，取

$b_1=a_1=(1,1,1,1)^T$

$$b_2=a_2-\frac{\langle a_2,b_1\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle}b_1=(1,-1,0,4)^T-\frac{1-1+4}{1+1+1+1}(1,1,1,1)^T=(0,-2,-1,3)^T$$

$$b_3 = a_3 - \frac{\langle a_3, b_1\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 - \frac{\langle a_3, b_2\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle} b_2 = (3,5,1,-1)^T - \frac{8}{4}(1,1,1,1)^T - \frac{-14}{14}(0,-2,-1,3)^T = (1,1,-2,0)^T$$

再单位化，得规范正交向量组如下

$$e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$$

$$e_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(0,-2,-1,3)^T = \left(0, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)^T$$

$$e_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2,0)^T = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, 0\right)^T$$

正交矩阵

定义　若n阶方阵A满足 $A^T A = E\left(\text{即} A^{-1} = A^T\right)$,则称$A$为 正交矩阵 .

性质

(1) 若 A 为正交矩阵，则$|A| = 1$或-1。

(2) A^T, A^{-1}, A^* 均正交。

(3) 若 A 、B 为正交矩阵，则 AB 正交。

(4) A 为正交矩阵的充要条件是 A 的列向量都是单位向量且两两正交。

证明　$$A^T A = E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = E$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{pmatrix} = E$$

$$\Leftrightarrow \alpha_i^T \alpha_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{当} i = j; \\ 0, \text{当} i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

例　证明$R(A^T A) = R(A)$.

证　设A为$m \times n$矩阵, x为n维列向量.

若x满足$Ax = 0$,则有$A^T(Ax) = 0$,即$(A^T A)x = 0$;

若x满足$(A^T A)x=0$,则有$x^T(A^T A)x=0$,

$\therefore (Ax)^T(Ax)=0$,从而推知$Ax=0$;

综上可知方程组$Ax=0$与$(A^T A)x=0$同解, $\therefore R(A^T A)=R(A)$.

六、线性方程组解的结构

(1) 齐次线性方程组解的结构

1) 解向量

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

若 $x_1=\xi_1, x_2=\xi_2, \cdots, x_n=\xi_n$ 是方程组的解，称$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$ 为方程组的解向量。

2) 齐次线性方程组解的性质及解空间

(1)若ξ_1,ξ_2是$Ax=0$的解,则$\xi_1+\xi_2$也是$Ax=0$的解.

证明 $\because A\xi_1=0,\ A\xi_2=0$

集合**S**对于加法封闭.

$\therefore A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=0$

$\therefore \xi_1+\xi_2$ 也是$Ax=0$的解.

(2)若ξ是$Ax=0$的解,则对$\forall k\in R$, $k\xi$也是$Ax=0$的解.

证明 $\because A\xi=0$,

集合**S**对于数乘封闭.

$\therefore A(k\xi)=kA\xi=k0=0$,

$\therefore k\xi$也是$Ax=0$的解.

记 $S=\{x \mid Ax=0\}\neq\phi$,称$S$为$Ax=0$的解空间.

要写出所有的解，只须知道解空间的一个基即可

(2) 齐次线性方程组的基础解系及其求法

1) 基础解系

设向量$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$均为齐次线性方程组 $Ax=0$的解, 如果

(1)向量组$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$线性无关;

(2)$Ax=0$的任一解都可由$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$线性表示.

则称向量组$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$为$Ax=0$的一个基础解系.

若$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$为$Ax=0$的一个基础解系, 则$S=\{x\mid Ax=0\}=Span[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t]$

$$=\{x=c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_t\eta_t\mid c_i\in R\}$$

而$Ax=0$的通解为 $x=c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_t\eta_t$, c_i为任意常数.

2) 齐次线性方程组基础解系的求法

对齐次线性方程组 Ax=0, 设 R(A)=r, 不妨设 A 的前 r 个列向量线性无关.

$$A\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&\cdots&0&b_{11}&\cdots&b_{1,n-r}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ 0&\cdots&1&b_{r1}&\cdots&b_{r,n-r}\\ 0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ 0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}$$

$$Ax=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&\cdots&0&b_{11}&\cdots&b_{1,n-r}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ 0&\cdots&1&b_{r1}&\cdots&b_{r,n-r}\\ 0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ 0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n\end{cases}$$

取定$x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$的一组值,便可得到原方程组的一个解.

取定$x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$如下$n-r$组值:

$$\begin{pmatrix}x_{r+1}\\x_{r+2}\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\ \cdots,\ \begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$$

分别代入 $\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n \end{cases}$

依次得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix}.$

从而求得原方程组的 $n-r$ 个解：

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

向量$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$均是$Ax=0$的解，向量组$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$线性无关.

要证：向量组$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$是$Ax=0$的一个基础解系.

下面证明方程组的任一解都可由$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$线性表示。

设$x = \xi = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \cdots, \lambda_n)^T$为$Ax=0$的任意一个解.

作 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 的线性组合，$\eta = \lambda_{r+1}\xi_1 + \lambda_{r+2}\xi_2 + \cdots + \lambda_n \xi_{n-r}$

由于$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$是方程组$Ax=0$的解，所以$\eta$也是方程组$Ax=0$的解.

下面来证明$\xi = \eta$.

$$\eta = \lambda_{r+1}\xi_1 + \lambda_{r+2}\xi_2 + \cdots + \lambda_n \xi_{n-r} = \lambda_{r+1}\begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_{r+2}\begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \\ \lambda_{r+1} \\ \lambda_{r+2} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

由于ξ与η都是方程$Ax=0$的解，而$Ax=0$又等价于方程组

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n \end{cases}$$

所以ξ与η都是此方程组的解，

由$\xi = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ \lambda_{r+1} \\ \lambda_{r+2} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \eta = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \\ \lambda_{r+1} \\ \lambda_{r+2} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = c_1, \cdots, \lambda_r = c_r.$

故$\xi = \eta$.即$\xi = \lambda_{r+1}\xi_1 + \lambda_{r+2}\xi_2 + \cdots + \lambda_n\xi_{n-r}$.

所以$\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$是齐次线性方程组解空间的一个基.

说明　１．解空间的基不是唯一的.

２．解空间的基又称为方程组的基础解系.

３．若$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$是$Ax = 0$的基础解系，则其通解为

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}.$$

其中$k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$是任意常数.

定理　n元齐次线性方程组$A_{m\times n}x = 0$的全体解所构成的集合S是一个向量空间,

当系数矩阵的秩$R(A) = r$时,解空间S的维数为 $n-r$.

当$R(A) = n$时,方程组只有零解,故没有基础解系(此时解空间只含一个零向量);

当$R(A) = r < n$时,方程组必有由$n-r$个向量构成的基础解系(如:$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$),

此时,方程组$Ax = 0$的通解可表示为　$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$

$Ax = 0$的解空间:　$S = \{x = k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} \mid k_1, \cdots, k_{n-r} \in R\}$.

例　求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0, \\ 2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0, \\ 7x_1-7x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases}$$

的基础解系与通解。

解　对系数矩阵 A 作初等行变换，变为行最简矩阵，有

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/7 & -3/7 \\ 0 & 1 & -5/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

便得
$$\begin{cases} x_1=\dfrac{2}{7}x_3+\dfrac{3}{7}x_4, \\ x_2=\dfrac{5}{7}x_3+\dfrac{4}{7}x_4. \end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 对应有 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{pmatrix}$,

即得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

并由此得到通解
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (c_1, c_2\in R).$$

例　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+4x_4-3x_5=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3+5x_4-5x_5=0 \\ x_1-x_2+3x_3-2x_4-x_5=0 \\ 3x_1+x_2+5x_3+6x_4-7x_5=0 \end{cases}$$

解　对系数矩阵施行初等行变换

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A)=r=2, n=5, n-r=3,$ 即方程组有无穷多解，其基础解系中有三个线性无关

的解向量。

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

代入 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - 4x_4 + 3x_5 \\ \quad x_2 = x_3 - 3x_4 + x_5 \end{cases}$

依次得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

所以原方程组的一个基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

故原方程组的通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3$. 其中k_1, k_2, k_3为任意常数 .

(3) 非齐次线性方程组解的性质

1) 非齐次线性方程组解的性质

(1)设$x = \eta_1$及$x = \eta_2$都是$Ax = b$的解,则$x = \eta_1 - \eta_2$为对应的齐次方程 $Ax = 0$的解.

证明 $\because A\eta_1 = b, \quad A\eta_2 = b$

$\therefore A(\eta_1 - \eta_2) = b - b = 0.$

$\therefore x = \eta_1 - \eta_2$是方程$Ax = 0$的解.

(2) 设$x = \eta$是方程 $Ax = b$的解, $x = \xi$ 是方程$Ax = 0$的解,则$x = \xi + \eta$ 仍是方程 $Ax = b$ 的解.

证明 $\because A(\xi + \eta) = A\xi + A\eta = 0 + b = b,$

$\therefore x = \xi + \eta$ 是方程 $Ax = b$的解.

2) 非齐次线性方程组的通解

非齐次线性方程组 Ax=b 的通解为

$$x = k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*.$$

其中 $\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$是$Ax = 0$的一个基础解系,η^*是方程组$Ax = b$的任意一个特解.

3)　与方程组 $Ax=b$ 有解等价的命题

线性方程组 $Ax=b$ 有解

$\Leftrightarrow$ 向量b能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示;

$\Leftrightarrow$ 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$等价;

$\Leftrightarrow$ 矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$与矩阵$B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b)$的秩相等.

4)　线性方程组的解法

(1) 克莱姆法则

特点：只适用于系数行列式不等于零的方形线性方程组，计算量大，理论价值大于实用价值.

(2) 初等变换法

特点：适用于方程组无解、唯一解、无穷多解的各种情形，运算在一个矩阵中进行，计算简单，是非常有效的方法.

(3) 基础解系法

特点：解的结构清楚,计算简单,也是很好的方法.

例　求解方程组$\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2+x_3-3x_4=1, \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4=-1/2. \end{cases}$

解　对增广矩阵B施行初等行变换:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见$R(A)=R(B)=2$,故方程组有解,并有

$$\begin{cases} x_1=x_2+x_4+1/2, \\ x_3= \quad\quad 2x_4+1/2. \end{cases}$$

取$x_2=x_4=0$,则$x_1=x_3=\dfrac{1}{2}$,即得方程组的一个解

$$\eta^*=\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

在对应的齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4, \\ x_3 = \quad 2x_4 \end{cases}$中,取

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 及 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 则 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 及 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

即得对应的齐次线性方程组的基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

于是所求通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, (c_1, c_2 \in R).$$

例　求下述方程组的解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 9x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 9x_5 = -6. \end{cases}$$

解　$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 & 23 \\ 9 & 3 & 6 & 3 & -9 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

由$R(A) = R(B)$,知方程组有解.又$R(A) = 2, n - r = 3,$ 所以方程组有无穷多解.

且原方程组等价于方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 - x_5 + 7 \\ 2x_2 = -x_3 - 2x_4 - 6x_5 + 23 \end{cases}$$

求特解　　令 $x_3 = x_4 = x_5 = 0,$ 得$x_1 = -\dfrac{9}{2}, x_2 = \dfrac{23}{2}.$ ➔

$$\boxed{\eta^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/2 \\ 23/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

求基础解系　　令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

代入 $\begin{cases} x_1+x_2=-x_3-x_4-x_5 \\ 2x_2=-x_3-2x_4-6x_5 \end{cases}$

依次得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$

故得基础解系

$$\xi_1=\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以方程组的通解为

$$x=k_1\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -9/2 \\ 23/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

以前的解法

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 & 23 \\ 9 & 3 & 6 & 3 & -9 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 & -2 & -9/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 & 3 & 23/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则原方程组等价于方程组

$$\begin{cases} x_1=-\dfrac{1}{2}x_3+2x_5-\dfrac{9}{2} \\ x_2=-\dfrac{1}{2}x_3-x_4-3x_5+\dfrac{23}{2} \end{cases}$$

令$x_3=k_1, x_4=k_2, x_5=k_3$, 得原方程组的通解为

$$x=k_1\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -9/2 \\ 23/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

其中k_1,k_2,k_3为任意常数.

第5章　相似矩阵

从花斑猫头鹰说起

一九九 0 年六月，美国鱼类和野生动物管理局终于将花斑猫头鹰列为濒危物种，并据此而划出了总数达六百九十万英亩的花斑猫头鹰栖息保护区。做出这一决定的根据纯粹是科学性的。

八十年代伐木业的增长正使这个地区的古代森林急剧减少，不仅严重威胁着花斑猫头鹰的生存，甚至也威胁到这个地区的生态环境。

数理生态学家们为了搞清楚花斑猫头鹰的数量动态，他们把猫头鹰的生命周期划分为三个阶段：雏鸟期(1 岁以前)，接近成年期(1-2 岁)，成年期(2 岁以后)。

猫头鹰在未成年期或成年期寻找配偶并终身生活在一起大约 20 年，每一对需要约 4 平方英里生活领地，最危险的时刻在雏鸟离开巢穴时。要想存活并成长接近成年，雏鸟必须能够找到新的生活空间及配偶。

18%的雏鸟成活率是受有效的原始森林面积所影响的。实际上，大约有 60%的雏鸟离开巢穴后能存活，但在另一个研究区域，却只有 30%离开巢穴并找到新的生活领地，其余的在寻找过程中都死亡了。

猫头鹰寻找新家失败的重要原因在于由于分散在各处的采伐者采伐树木，使连片森林变成越来越多的小块。猫头鹰离开了森林的庇护，在飞越砍伐光的林地时受天敌攻击的风险显著增加。但是如果 50%以上的雏鸟离开巢穴并能成功找到新家，猫头鹰的数量将会增加。

研究动态数量的第一步是以年为间隔建立人口(数量)模型，令 $k=0,1,2,\ \cdots$，假设在每一生命期雌、雄鸟数量是 1:1，并且只计算雌鸟的数量。第 k 年的数量可以用向量 $x_k=(j_k,s_k,a_k)$描述，j_k,s_k,a_k 分别表示雌鸟在雏鸟期，接近成年期，成年期的数量。

借助于来自人口统计图研究获得的实域数据，R.Lamberson 和他的合作者建立了如下的矩阵模型：

$$\begin{bmatrix} j_{k+1} \\ s_{k+1} \\ a_{k+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & .33 \\ .18 & 0 & 0 \\ 0 & .71 & .94 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{bmatrix}$$

这个矩阵模型是一个形如 $x_{k+1}=Ax_k$ 的差分方程。这样的方程通常称为**动态系统(或离散线性动态系统)**。

一、方阵的特征值与特征向量

1. 特征值与特征向量的概念

定义　设 A 是 n 阶矩阵，如果数 λ 和 n 维非列零向量 x 使关系式

$$Ax=\lambda x$$

成立，那么，这样的数 λ 称为方阵 A 的特征值，非零向量 x 称为 A 对应于特征值 λ 的特征向量。

说明　1. 特征向量$x\neq 0$,特征值问题是对方阵而言的.

2. n 阶矩阵 A 的特征值，就是使齐次线性方程组 $(\lambda E-A)x=0$ 有非零解的 λ 值，即满足$|\lambda E-A|=0$ 的 λ 都是矩阵 A 的特征值。

3. $|\lambda E-A|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}=0$

称以λ为未知数的一元 n次方程$|\lambda E-A|=0$为A的特征方程。

记 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$,它是λ的n次多项式, 称其 为方阵A的 特征多项式。

求矩阵特征值与特征向量的步骤：

（1）. 计算 A 的特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$；

（2）． 求特征方程$|\lambda E-A|=0$的全部根$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，就是 A 的全部特征值；

（3）． 对于特征值λ_i，求齐次方程组$(\lambda E-A)x=0$的非零解，就是对应于λ_i的特征向量。

例 求$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解 A的特征多项式为

$$\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1\\ 1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2-1=8-6\lambda+\lambda^2=(4-\lambda)(2-\lambda)$$

所以A的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=4.$

当$\lambda_1=2$时,对应的特征向量应满足$\begin{pmatrix}2-3 & 1\\ 1 & 2-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$

即 $\begin{cases}x_1-x_2=0,\\ -x_1+x_2=0.\end{cases}$ 解得$x_1=x_2,$

所以对应的特征向量为$p_1=k\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}(k\neq 0).$

当$\lambda_2=4$时,由$\begin{pmatrix}4-3 & 1\\ 1 & 4-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$,即$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$

解得$x_1=-x_2$,所以对应的特征向量为

$$p_2=k\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}(k\neq 0)$$

例 求矩阵$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解 A的特征多项式为$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)^2,$

所以A的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1.$

当$\lambda_1=2$时,解方程$(2E-A)x=0$.由

$$2E-A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\4&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

所以$k\,p_1(k\neq 0)$是对应于$\lambda_1=2$的全部特征向量.

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时,解方程$(E-A)x=0$.由

$$E-A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\4&-2&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $p_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$,

所以$k\,p_2(k\neq 0)$是对应于$\lambda_2=\lambda_3=1$的全部特征向量.

例 设$A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$, 求 A 的特征值与特征向量.

解 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2&-1&-1\\0&\lambda-2&0\\4&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2$,

令 $-(\lambda+1)(\lambda-2)^2=0$

得A的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2$.

当$\lambda_1=-1$时,解方程$(-E-A)x=0$.由

$$-E-A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-3&0\\4&-1&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$

故对应于$\lambda_1=-1$的全体特征向量为$k\,p_1 \qquad (k\neq 0).$

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时,解方程$(2E-A)x=0.$由

$$2E-A=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\0&0&0\\4&-1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系为：

$$p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\qquad p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},$$

所以对应于$\lambda_2=\lambda_3=2$的全部特征向量为:$k_2p_2+k_3p_3 \quad (k_2,k_3$不同时为$0)$.

定理　设n阶方阵$A=(a_{ij})$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则有

(1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$.

分析$\because\ \forall\lambda\in R, f(\lambda)=|A-\lambda E|=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$

$\therefore f(0)=|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

考察$f(\lambda)$中λ^{n-1}的系数知:

$(-1)^{n-1}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$

$(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})$

又 $$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\cdots&\lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

展开式中λ的 n 及 n-1 次只能在主对角线上各元乘积中出现。其余各项至多包含 n-2 个主对角线元(关于λ的次数至多是 n-2)。

$$|\lambda E-A|=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|$$

$$\left|\lambda \boldsymbol{E}\text{-}\boldsymbol{A}\right| = \lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

推论　设 A 为 n 阶方阵，则|A|=0 的充要条件是数 0 是 A 的特征值。

由定理的结论(2)　$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A|$.

定义　n 阶方阵 $A=(a_{ij})$的主对角线上元之和称为 A 的迹，记作 $tr(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$.

定理　设 λ 是矩阵 A 的一个特征值，对应的特征向量为 x，且 $f(x)$ 是一个关于 x 的多项式,则 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的一个特征值，对应的特征向量还是 x。

证明

$\because \boldsymbol{Ax = \lambda x},$

$\forall \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{Z}$，$\exists$　$\boldsymbol{A^k x = A^{k-1}(Ax) = \lambda(A^{k-1}x) = \cdots = \lambda^k x}$

设$\boldsymbol{x}$的一元多项式$\boldsymbol{f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m}$

则　　$\boldsymbol{f(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + \cdots + a_{m-1}A + a_mE}$

对上式等号两边均右乘向量$\boldsymbol{x}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f(A)x} &= \boldsymbol{a_0A^m x + a_1A^{m-1}x + \cdots + a_{m-1}Ax + a_m x}\\ &= \boldsymbol{(a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m)x}\\ &= \boldsymbol{f(\lambda)x}\end{aligned}$$

$\therefore$ $\boldsymbol{f(A)}$的特征值为$\boldsymbol{f(\lambda)}$

例　设三阶方阵 A 的特征值为 1,－2，3，求行列式　$|A^2+A-E|$。

解　由定理知　A^2+A-E 的全部特征值为 1，1，11。

$\therefore$　$|A^2+A-E|=1\times1\times11=11$.

定理　设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是方阵$A$的$m$个特征值,$p_1,p_2,\cdots,p_m$依次是与之对应的特征向量.如果$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$各不相等,则 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 线性无关.

证明　设有常数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 使

$$x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_mp_m = 0.$$

则　$A\left(x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_mp_m\right) = 0$,即

$$\lambda_1x_1p_1 + \lambda_2x_2p_2 + \cdots + \lambda_mx_mp_m = 0,$$

类推之，有 $\lambda_1^kx_1p_1 + \lambda_2^kx_2p_2 + \cdots + \lambda_m^kx_mp_m = 0.\ \left(k = 1,2,\cdots,m-1\right)$

把上列各式合写成矩阵形式，得

$$\left(x_1p_1,x_2p_2,\cdots,x_mp_m\right)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1}\\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1}\end{pmatrix}=\left(0,0,\cdots,0\right)$$

上式等号左端第二个矩阵的行列式为范德蒙行列式,当各λ_i不相等时,
该行列式不等于0,从而该矩阵可逆.于是有

$$\left(x_1p_1,x_2p_2,\cdots,x_mp_m\right)=\left(0,0,\cdots,0\right),$$

即 $x_jp_j=0\left(j=1,2,\cdots,m\right)$.但 $p_j\neq 0$,故 $x_j=0\left(j=1,2,\cdots,m\right)$.

所以向量组 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 线性无关.

注　1. 属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

2. 属于同一特征值的特征向量的非零线性组合仍是属于这个特征值的特征向量。

3. 矩阵的特征向量总是相对于矩阵的特征值而言的，一个特征值具有的特征向量不唯一。

4.　一个特征向量不可能属于不同的特征值。

证明　　假设ξ同时是A的属于特征值$\lambda_1,\lambda_2(\lambda_1\neq\lambda_2)$的特征向量,即有

$$\xi\neq 0, A\xi=\lambda_1\xi, A\xi=\lambda_2\xi\Rightarrow\lambda_1\xi=\lambda_2\xi\Rightarrow\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\xi=0,$$

由于$\lambda_1-\lambda_2\neq 0$,则$\xi=0$,与$\xi\neq 0$矛盾.

定理　　矩阵 A 的 m 个互不相同的特征值所对应的 m 组各自线性无关的特征向量并在一起仍是线性无关的。

定理　　设λ_0是 n 阶方阵 A 的一个 k 重特征值,对应于λ_0的特征向量的最大个数为 l，则$k\geq l$。

例　设 A 是n阶方阵，其特征多项式为

$$f\left(\lambda\right)=\left|\lambda E-A\right|,$$

求A^T的特征多项式.

解　$f_{A^T}\left(\lambda\right)=\left|\lambda E-A^T\right|=\left|\left(\lambda E-A\right)^T\right|=\left|\lambda E-A\right|=f(\lambda).$

A^T与A具有相同的特征多项式、特征值

二、相似矩阵

1. 相似矩阵与相似变换的概念

定义　设A,B都是n阶矩阵, 若有可逆矩阵P, 使得

$$P^{-1}AP=B,$$

则称B是A的相似矩阵,或说矩阵A与B相似.

对A进行运算$P^{-1}AP$称为对A进行相似变换.

可逆矩阵P称为把A变成B的相似变换矩阵.

2. 相似矩阵与相似变换的性质

(1)反身性　A与A本身相似.

$$\because E^{-1}AE=A$$

(2)对称性　若A与B相似,则B与A相似.

$$\because P^{-1}AP=B\Rightarrow(P^{-1})^{-1}B(P^{-1})=A$$

(3)传递性　若A与B相似,B与C相似,则A与C相似.

$$\because P_1^{-1}AP_1=B,\quad P_2^{-1}BP_2=C\Rightarrow(P_1P_2)^{-1}A(P_1P_2)=C$$

(4) 其他性质

若 A 与 B 相似，则

i. $R(A)=R(B)$

ii. $|A|=|B|$

iii. $tr(A)=tr(B)$

iv. 若 A 可逆，则 B 也可逆，且 A^{-1},B^{-1} 相似

v. kA与kB, A^m与B^m 相似

vi. $f(A)$与$f(B)$ 相似

定理　若n阶矩阵A与B相似,则A与B的特征多项式相同,A与B的特征值亦相同

证明　$\because A$与B相似,

$\therefore \exists$可逆阵P,使得$P^{-1}AP=B$

$$\therefore |B-\lambda E| = |P^{-1}AP-P^{-1}(\lambda E)P| = |P^{-1}(A-\lambda E)P|$$
$$= |P^{-1}||A-\lambda E||P| = |A-\lambda E|$$

3. 利用相似变换将方阵对角化

定义　如果 n 阶方阵 A 相似于对角矩阵Λ,则称之为把方阵A对角化,

也称方阵A可以对角化.

定理　n阶矩阵A与对角矩阵相似(即A能对角化)的充分必要条件是A有n个线性无关的特征向量

证明　假设存在可逆阵P,使$P^{-1}AP=\Lambda$为对角阵,

则 $AP=P\Lambda$,把 P 按列分块得 $P=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$.

$$\text{则}\ A(p_1,p_2,\cdots,p_n)=(p_1,p_2,\cdots,p_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$
$$=(\lambda_1 p_1,\lambda_2 p_2,\cdots,\lambda_n p_n)$$

又$\because A(p_1,p_2,\cdots,p_n)=(Ap_1,Ap_2,\cdots,Ap_n)\ \therefore Ap_i=\lambda_i p_i$.

$\therefore \lambda_i$是A的特征值,而P的列向量 p_i 就是 A的对应于特征值λ_i的特征向量.

又由于P可逆,所以$p_1,p_2,\cdots,p_n$线性无关,

$\therefore A$有n个线性无关的特征向量.

反之

设A有n个线性无关的特征向量$p_1,p_2\cdots,p_n$,相应特征值设为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$,

由此构造矩阵

$$P=(p_1,p_2,\cdots,p_n) \quad 和 \quad \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

则 $AP=P\Lambda$

$\therefore \ P^{-1}AP=\Lambda.$ 证毕.

推论 1　若n阶矩阵A的n个特征值互不相等,则A必可对角化.

说明　如果 A 的特征方程有重根，此时 A 不一定有 n 个线性无关的特征向量，从而矩阵 A 不一定能对角化；但如果能找到 n 个线性无关的特征向量，A 能对角化。

推论 2　n 阶方阵 A 可对角化的充要条件是 A 的每个 r 重特征值恰有 r 个线性无关的特征向量。

推论 3　若n阶方阵A与对角矩阵

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

相似, 则$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$即是$A$的所有特征值.

例　判断下列实矩阵能否化为对角阵？若能对角化,求作一个可逆矩阵 P，及对角阵∧，使得 $P^{-1}AP=\wedge$.

$$(1)\ A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix} \qquad (2)\ A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -2\\ -5 & 3 & -3\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

解　(1) 由$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 2\\ -2 & -2-\lambda & 4\\ 2 & 4 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)^2(\lambda+7)=0$

得 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-7.$

将 $\lambda_1=\lambda_2=2$代入$(A-\lambda_1E)=0$,得方程组

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

解之得基础解系

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

对应于$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, A有两个无关的特征向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

同理, 对$\lambda_3 = -7$, 由$\left(A - \lambda_3 E\right)x = 0$,

求得基础解系

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

令$P = (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2)$， $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -7 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

则有 $P^{-1}AP = \Lambda.$

令$P = (\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2)$， $\Lambda = \begin{pmatrix} -7 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

则有 $P^{-1}AP = \Lambda.$

(2) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -5 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left|A - \lambda E\right| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -2 \\ -5 & 3-\lambda & -3 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda - 1\right)^3$$

所以A的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$

把$\lambda=1$代入$(A-\lambda E)x=0$,解之得基础解系

$$\xi=(-1,-1,1)^T,$$

故 A 不能化为对角矩阵。

例　设$A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$A 能否对角化？若能对角化,则求出可逆矩阵$P$,

使$P^{-1}AP$为对角阵。

解　$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda&6&0\\-3&-5-\lambda&0\\-3&-6&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$

所以A的全部特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=-2.$

将$\lambda_1=\lambda_2=1$代入$(A-\lambda E)x=0$得方程组$\begin{cases}3x_1+6x_2=0\\-3x_1-6x_2=0\\-3x_1-6x_2=0\end{cases}$

$x_1=-2x_2$

解之得基础解系

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

将$\lambda_3=-2$代入$(A-\lambda E)x=0$,得方程组的基础解系

$$\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

由于ξ_1,ξ_2,ξ_3线性无关.所以A可对角化。

令　　$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-2&0&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}$

则有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$。

三、实对称矩阵的相似矩阵

1. 实对称矩阵的性质

说明：教材中本节所提到的对称矩阵，除非特别说明，均指实对称矩阵。

实对称矩阵一定可对角化，而且正交相似对角矩阵。

定理 实对称矩阵的特征值均为实数。

定理 设λ_1,λ_2是对称矩阵A的两个特征值，p_1,p_2是对应的特征向量，若$\lambda_1\neq\lambda_2$，则p_1与p_2正交

证明 $\lambda_1 p_1=Ap_1,\ \lambda_2 p_2=Ap_2,\ \lambda_1\neq\lambda_2,$

$\boxed{?\quad p_1^T p_2=0}$

$\because A$对称，$A=A^T,$

$\therefore \lambda_1 p_1^T=(\lambda_1 p_1)^T=(Ap_1)^T=p_1^T A^T=p_1^T A,$

$\therefore \lambda_1 p_1^T=p_1^T A$

$\therefore \lambda_1 p_1^T p_2=p_1^T Ap_2=p_1^T(\lambda_2 p_2)=\lambda_2 p_1^T p_2,$

$\therefore\ (\lambda_1-\lambda_2)p_1^T p_2=0,$

$\because \lambda_1\neq\lambda_2, \therefore p_1^T p_2=0,$ 即p_1与p_2正交.

定理 设 A 为 n 阶对称矩阵，则必有正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中Λ是以 A 的 n 个特征值为对角元素的对角矩阵。

证明 对 n 用数学归纳法。

推论 1 设 A 为n阶实对称矩阵，λ是 A 的 r 重特征值，则 A 必有 r 个对应于特征值λ的线性无关的特征向量。

推论 2 n阶实对称矩阵 A，存在n个正交单位特征向量。

2. 利用正交矩阵将实对称矩阵对角化的方法

根据上述结论，利用正交矩阵将实对称矩阵化为对角矩阵，其具体步骤为：

(1) 求出 A 的全部不同的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$，其重数分别为$r_1,r_2,\ldots,r_s$.

(2) 对每个$\lambda_i(i=1,2,\cdots,s)$，求出$(\lambda_i E-A)x=0$的基础解系，并将其正交化。得

到 A 的r_i个属于λ_i的的正交特征向量。这样共求出 A 的$r_1+r_2+\cdots+r_s=n$个正交特征向量。

(3) 将以上n个正交特征向量单位化，由所得正交单位向量作为列构成正交矩阵 Q，则

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=diag\left\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right\}$$

例 对下列各实对称矩阵，分别求一正交矩阵P，使$P^{-1}AP$为对角阵。

$$(1)A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix},\qquad (2)A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$$

解 (1)第一步 求 A 的特征值

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2&0\\2&\lambda-1&2\\0&2&\lambda\end{vmatrix}=\left(\lambda-4\right)\left(\lambda-1\right)\left(\lambda+2\right)=0$$

得 $\lambda_1=4,\lambda_2=1,\lambda_3=-2$。

第二步 由$\left(\lambda_iE-A\right)x=0$，求出 A 的基础解系

对$\lambda_1=4$，由$\left(4E-A\right)x=0$，得

$$\begin{cases}2x_1+2x_2=0\\2x_1+3x_2+2x_3=0\\2x_2+4x_3=0\end{cases}\qquad \text{解之得基础解系}\ \xi_1=\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

对$\lambda_2=1$，由$\left(E-A\right)x=0$，得

$$\begin{cases}-x_1+2x_2=0\\2x_1+2x_3=0\\2x_2+x_3=0\end{cases}\qquad \text{解之得基础解系}\ \xi_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}。$$

对$\lambda_3=-2$，由$\left(-2E-A\right)x=0$，得

$$\begin{cases}-4x_1+2x_2=0\\2x_1-3x_2+2x_3=0\\2x_2-2x_3=0\end{cases}\qquad \text{解之得基础解系}\ \xi_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}。$$

将特征向量正交化

由于ξ_1,ξ_2,ξ_3是属于A的3个不同特征值$\lambda_1=4,\lambda_2=1,\lambda_3=-2$的特征向量,故它们必两两正交

第三步　将特征向量单位化

令　$\eta_i=\dfrac{\xi_i}{\|\xi_i\|}$,　$i=1,2,3.$

得　$\eta_1=\begin{pmatrix}-2/3\\2/3\\-1/3\end{pmatrix}$, $\eta_2=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix}$,$\eta_3=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}$。

$\lambda_1=4$　　　$\lambda_2=1$　　　$\lambda_3=-2$

作　$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&2&1\\2&1&2\\-1&-2&2\end{pmatrix}$,

则　　$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

(2) $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&0&0\\0&\lambda-3&-1\\0&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(4-\lambda)^2$$

得特征值　$\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=4.$

对$\lambda_1=2$，由$(2E-A)x=0$，得基础解系$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

对$\lambda_2=\lambda_3=4$，由$(4E-A)x=0$，得基础解系$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$,　$\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

ξ_2与ξ_3恰好正交，所以ξ_1,ξ_2,ξ_3两两正交.

再将 ξ_1, ξ_2, ξ_3单位化, 令 $\eta_i = \dfrac{\xi_i}{\|\xi_i\|}(i=1,2,3)$得

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix},\ \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1 = 2$ $\qquad$ $\lambda_2 = 4$ $\qquad$ $\lambda_3 = 4$

于是得正交阵

$$P = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

四、小结

第6章　二次型

一、二次型及其矩阵表示

1.　二次型及其标准形的概念

定义　二次型　n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为 n 元二次型。

当 a_{ij} 是复数时，f 称为复二次型；

当 a_{ij} 是实数时，f 称为实二次型。

例如　$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3$

$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_3^2$

$f\left(x, y, z\right) = x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 3xy + yz$

只含有平方项的二次型

$$f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2$$

称为二次型的标准形。

2.　二次型的矩阵表示方法

对于二次型

$$\begin{aligned} f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ &+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \end{aligned}$$

取 $a_{ji} = a_{ij}$，则 $2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$，

$$\begin{aligned} f &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ &+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ &+ \cdots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ &= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) \\ &+ x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) \\ &+ \cdots + x_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n) \end{aligned}$$

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$$=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

记 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

则二次型可记作$f=x^T Ax$,其中A为对称矩阵.

A 称为二次型 f 的矩阵， f 称为 A 的二次型。

A 的秩 $R(A)$ 称为 f 的秩，记作 $R(f)$ 。

例 写出二次型

$$f=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-6x_2x_3$$

的矩阵形式。

解 $a_{11}=1, a_{22}=2, a_{33}=-3,$

$a_{12}=a_{21}=2, a_{13}=a_{31}=0,$

$a_{23}=a_{32}=-3$ 。

$\therefore \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$。

故 $f=x^T Ax$

$$=\left(x_1,x_2,x_3\right)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二、化二次型为标准型

对于二次型，我们要讨论的主要问题是：寻求可逆的线性变换，将二次型化为标准形。

设

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

记$C = (c_{ij})$, 则上述可逆线性变换可记作

$$x = Cy$$

将其代入$f = x^T Ax$,有

$$f = x^T Ax = (Cy)^T A(Cy) = y^T (C^T AC) y \text{。}$$

如果$C^T AC$是一个对角阵：

$$y^T (C^T AC) y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

$$= (y_1, y_2, \cdots, y_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

定义　A 与 B 合同

设 A,B 为 n 阶方阵，若存在 n 阶可逆矩阵 C，使得：

$$C^T AC = B$$

则称矩阵 A 与 B 合同。记做$A \simeq B$。

合同也是矩阵间的一种关系，它具有：(1) 反身性　(2) 对称性　(3) 传递性

定理　若 A 与 B 合同且 A 为对称矩阵，则 B 也为对称矩阵，且$R(B) = R(A)$。

证明：A 与 B 合同，即存在 n 阶可逆阵 C 使得

$$C^T AC = B$$

又，A为对称矩阵,即有$A = A^T$,于是

$$B^T=\left(C^TAC\right)^T=C^TA^TC=C^TAC=B,$$

即 B 为对称矩阵。

$\because A\sim B,\quad \therefore R(B)=R(A)$。　　　　　　　证毕　。

说明　$f=x^TAx=\left(Cy\right)^T A\left(Cy\right)=y^T\left(C^TAC\right)y$。

1. 二次型经可逆变换 $x=Cy$ 后,其秩不变,但 f 的矩阵由 A 变为 $B=C^TAC$；

2. 要使二次型 f 经可逆变换 $x=Cy$ 变成标准形, 就是要使

$$y^TC^TACy=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

$$=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},$$

也就是要使 C^TAC 成为对角矩阵。

1. 用配方法化二次型为标准形

（1）. 拉格朗日配方法

简称配方法，是利用代数公式，将二次型配成完全平方式的方法。

类型 1、二次型中含有平方项

类型 2、二次型中不含有平方项

拉格朗日配方法的步骤

类型 1. 若二次型含有 x_i 的平方项，则先把含有 x_i 的乘积项集中，然后配方，再对其余的变量同样进行，直到都配成平方项为止，经过非退化线性变换，就得到标准形；

类型 2. 若二次型中不含有平方项，但是 $a_{ij}\neq 0(i\neq j)$, 则先作可逆线性变换。

$$\begin{cases}x_i=y_i-y_j\\ x_j=y_i+y_j\\ \quad x_k=y_k\end{cases}\qquad\left(k=1,2,\cdots,n\text{且}k\neq i,j\right)$$

化二次型为含有平方项的二次型， 然后再按类型 1 中方法配方。

例　化二次型

$$f=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$$

为标准形,并求所用的变换矩阵。

解　$f=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$

$=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+5x_3^2+6x_2x_3$

$=(x_1+x_2+x_3)^2-x_2^2-x_3^2-2x_2x_3+2x_2^2+5x_3^2+6x_2x_3$

$=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3$

$=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+2x_3)^2$.

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2+x_3 \\ y_2=x_2+2x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1-y_2+y_3 \\ x_2=y_2-2y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

所用变换矩阵为

$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$(|C|=1\neq 0)$.

$\therefore f=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$

$=y_1^2+y_2^2$。

例　化二次型

$$f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$$

成标准形,并求所用的变换矩阵。

解　由于所给二次型中无平方项，所以

令 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2, \\ x_3=y_3 \end{cases}$

$\left(\text{即} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right)$

代入 $f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$,

得　$f=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3$。

再配方，得

$$f=2\left(y_1-y_3\right)^2-2\left(y_2-2y_3\right)^2+6y_3^2 。$$

令 $\begin{cases} z_1=y_1-y_3 \\ z_2=y_2-2y_3 \\ z_3=y_3 \end{cases}$

$$\boxed{\left(即 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right)}$$

$\Rightarrow \begin{cases} y_1=z_1+z_3 \\ y_2=z_2+2z_3, \\ y_3=z_3 \end{cases}$

得 $f=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2$ 。

所用变换矩阵为

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}}$$

$\left(|C|=-2\neq 0\right).$

2. 用正交变换法化二次型为标准形

由于对任意的实对称矩阵A,总有正交矩阵P, 使$P^{-1}AP=\Lambda$, 即$P^TAP=\Lambda$.

定理　任给二次型 $f=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\left(a_{ij}=a_{ji}\right)$,总有 正交变换$x=Py$,使$f$化为

标准形

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$f$的矩阵$A=(a_{ij})$的特征值。

用正交变换化二次型为标准形的具体步骤:

1. 求出二次型的矩阵A;

2. 求出A的所有特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$;

3. 求出对应于特征值的特征向量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$;

4. 将特征向量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$正交化,单位化,得$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$,记$C=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$;

5. 作正交变换$x=Cy$,则得f的标准形$f=\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$.

例　将二次型

$$f=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

　　通过正交变换 $x=Py$,化成标准形.

解　1．写出二次型的矩阵，并求其特征值

$$A=\begin{pmatrix}17 & -2 & -2\\ -2 & 14 & -4\\ -2 & -4 & 14\end{pmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-17 & 2 & 2\\ 2 & \lambda-14 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-14\end{vmatrix}=(\lambda-18)^2(\lambda-9)$$

从而得特征值　　$\lambda_1=9,\lambda_2=\lambda_3=18$。

2．求特征向量

将$\lambda_1=9$代入$(A-\lambda E)x=0$,得基础解系　　$\xi_1=(1/2,1,1)^T$。

将$\lambda_2=\lambda_3=18$代入$(A-\lambda E)x=0$,得基础解系　　$\xi_2=(-2,1,0)^T,\xi_3=(-2,0,1)^T$。

3．将特征向量正交化

取　$\alpha_1=\xi_1$,$\alpha_2=\xi_2,\alpha_3=\xi_3-\dfrac{[\alpha_2,\xi_3]}{[\alpha_2,\alpha_2]}\alpha_2$,

得正交向量组

$\alpha_1=(1/2,1,1)^T,\alpha_2=(-2,1,0)^T,\alpha_3=(-2/5,-4/5,1)^T$。

4．将正交向量组单位化，得正交矩阵

令　$\eta_i=\dfrac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}$,　$(i=1,2,3)$,

得　$\eta_1=\begin{pmatrix}1/3\\ 2/3\\ 2/3\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{5}\\ 0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{45}\\ -4/\sqrt{45}\\ 5/\sqrt{45}\end{pmatrix}$。

$\lambda_1=9$　　$\lambda_2=18$　　$\lambda_3=18$

取 $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}$。

于是所求正交变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=Py=\begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

$\lambda_1=9 \quad \lambda_2=18 \quad \lambda_3=18$

$$\boxed{\Lambda=\begin{pmatrix} 9 & & \\ & 18 & \\ & & 18 \end{pmatrix}}$$

且有 $f=9y_1^2+18y_2^2+18y_3^2.$

若取 $P=(\eta_3,\eta_1,\eta_2),\quad x=Py$

则 $f=18y_1^2+9y_2^2+18y_3^2$。

例 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+ax_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$$

的秩为 2，

(1) 求参数 a 及二次型所对应的矩阵的特征值；

(2) 指出 $f(x_1,x_2,x_3)=1$表示何种二次曲面。

解 二次型的矩阵为 $A=\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & a \end{bmatrix}$

(1) 因 R(A)＝2，所以|A|＝0，解得 a＝3。

由 A 的特征多项式

可求得 $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$

于是A的特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9,$

(2)由于二次型 $\mathrm{f}=\mathrm{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{Ax}$ 经过正交变换 $\mathrm{x}=\mathrm{Py}$ 可化为标准型

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

因此化二次型为 $f = 4y_2^2 + 9y_3^2.$

故 f (x_1, x_2, x_3)=1 通过正交变换化为 $4y_2^2+9y_3^2=1$

可知 $f(x_1, x_2, x_3)=1$ 表示椭圆柱面.

3. 用初等变换法化二次型为标准形

定义 A 与 B 合同

设 A,B 为 n 阶方阵，若存在 n 阶可逆矩阵 C，使得：$C^TAC=B$，则称矩阵 A 与 B 合同。记做 $A \simeq B$。

设 A 为 n 阶实对称矩阵，则一定存在正交矩阵 Q，使 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\Lambda$。

任意实对称矩阵 A 必合同于对角矩阵Λ。

即,存在可逆矩阵 C,使得：$C^TAC= \Lambda$

又, C 可逆,则 C 必可表为初等矩阵的乘积,设：

$$C = P_1P_2\cdots P_m$$

于是: $EC=EP_1P_2\ldots P_m$

$$(P_1P_2\ldots P_m)^TAP_1P_2\ldots P_m=\Lambda$$

即: $EP_1P_2\ldots P_m=C$

$$P_m^T\ldots P_2^TP_1^T\ AP_1P_2\ldots P_m=\Lambda$$

上式表明，对 A 做一系列初等行变换和初等列变换，把 A 化为对角阵Λ的同时，其中的初等列变换就把单位阵化为变换矩阵 C。

也即: $$\begin{pmatrix} A \\ \cdots \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow[EP_1P_2\ldots P_m]{P_m^T\ldots P_2^TP_1^T AP_1P_2\ldots P_m} \begin{pmatrix} \Lambda \\ \cdots \\ C \end{pmatrix}$$

注意：仅能对所构造的分块矩阵的前*n*行施行初等行变换

由此我们就可以得到化二次型的系数矩阵 A 为对角阵的可逆矩阵 C，即 $C^TAC= \Lambda$。

这种利用初等变化求可逆矩阵 C 及对角矩阵Λ，使 $C^TAC= \Lambda$的方法称为初等变换法。

例 用初等变换法化二次型

$$f=x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，并求出所用的线性变换矩阵。

解　二次型的矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 5 & -4\\ -1 & -4 & 5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}A\\ \cdots\\ E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 5 & -4\\ -1 & -4 & 5\\ \hdashline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{c_2-2c_1\\ c_3+c_1}]{\substack{r_2-2r_1\\ r_3+r_1}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 4\\ \hdashline 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3+2c_2]{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \hdashline 1 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

得：

$$C=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad C^TAC=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

令 $x=Cy$，则二次型 f 化为标准形：

$$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2$$

三、正定二次型

一个实二次型，既可以通过正交变换法化为标准形，也可以通过配方法和初等变换法化为标准形，显然，由于所用的可逆线性变换不同，其标准形一般来说是不惟一的，但标准形中所含有的项数是确定的，项数等于二次型的秩。

不仅如此，在实可逆线性变换下，标准形中的正平方项个数与负平方项的个数，也是保持不变的。

（1）．惯性定理

定理　n 元实二次型 $f=x^TAx$ 无论用怎样的可逆实线性变换化成标准型，其标准型中正、负平方项的项数是唯一确定的，它们的和为二次型的秩。

定义　实二次型 $f=x^TAx$ 的标准形中正平方项的项数 p 称为二次型 f 的正惯性指数；负平方项的项数 q 称为二次型 f 的负惯性指数，它们的差 p-q 称为二次型 f 的符号差。

例　设有实二次型 $f=x^TAx$，它的秩为 r，有两个实的可逆变换

$$x=Cy\qquad 及\qquad x=Pz$$

使　　$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ry_r^2 \qquad (k_i\neq 0)$,

及　　$f=\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2+\cdots+\lambda_rz_r^2 \qquad (\lambda_i\neq 0)$,

则$k_1,\cdots,k_r$中正数的个数与$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$中正数的个数相等。

（2）．实二次型的规范形

由定理 2 知，任意实二次型都可以化为标准型。设实二次型 f 经过适当的可逆线性变换化为标准型：

$$f=d_1y_1^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2$$

其中 $d_i>0(i=1,2,\cdots,r)$, r 是 f 的秩。

再对标准形作一次如下线性变换：

$$\begin{cases} y_1=\dfrac{1}{\sqrt{d_1}}z_1 \\ \vdots \\ y_r=\dfrac{1}{\sqrt{d_r}}z_r \\ y_{r+1}=z_{r+1} \\ \vdots \\ y_n=z_n \end{cases}$$

标准形就化为：

$$f=z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$$

称这一简单形式为实二次型的规范形。

定理　　任何实二次型 f 总可以经过适当的线性变换化为规范形，且规范形是唯一的。

定理　　任何实对称矩阵必合同于形如

$$\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

的对角矩阵。

（3）．正(负)定二次型的概念

定义　　设有实二次型 $f(x)=x^TAx$, 若$\forall x\neq 0$,都有$f(x)>0$,

则称f为正定二次型,并称对称矩阵A是正定的;

若$\forall x\neq 0$,都有$f(x)<0$, 则称f为负定二次型,并称对称矩阵A是负定的.

例如　$f(x,y,z)=x^2+4y^2+16z^2$　　正定二次型

$f(x_1,x_2)=-x_1^2-3x_2^2$　　负定二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_3^2$　　不定二次型

（4）. 正(负)定二次型的判别

定理　实二次型$f=x^TAx$为正定的充分必要条件是：它的标准形的n个系数全为正，即f的正惯性指数为n。

推论 1,2 实对称矩阵A为正定矩阵的充分必要条件是：A合同于E，即存在可逆矩阵P，使得$A=P^TP$。

定理　n元实二次型$f=x^TAx$正定的充要条件是A的特征值全部都大于零。

定义　顺序主子式

设$A=(a_{ij})$为n阶方阵，依次取A的前k行与前k列所构成的子式$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$称为$A$的顺序主子式。

定理　n元实二次型$f=x^TAx$为正定的即实对称矩阵A为正定矩阵的充分必要条件是：A的各阶主子式均为正，即

$$a_{11}>0,\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\cdots,\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0\text{；}$$

正定矩阵的性质

1. 设A为正定实对称阵,则$\mathrm{A}^{\mathrm{T}},A^{-1},A^*$均为正定矩阵;

2. 若A,B均为n阶正定矩阵,则$A+B$也是正定矩阵.

证：因$A^T=A,B^T=B$，所以$(A+B)^T=A^T+B^T=A+B$，即$A+B$也是实对称矩阵。

又，对任意非零列向量x有$x^TAx>0$，　$x^TBx>0$

于是: $x^T(A+B)x = x^TAx + x^TBx > 0$

即 $x^T(A+B)x$ 是正定二次型，故 $A+B$ 是正定矩阵。

定理　对于 n 元实二次型 $f = x^TAx$，下列各命题相互等价：

（1）．f 是负定二次型；

（2）．f 的负惯性指数为 n；

（3）．A 的特征值全为负；

（4）．$A \simeq -E$；

（5）．A 的奇数阶顺序主子式为负，偶数阶顺序主子式为正。

负定二次型的判定.

例　判别二次型

$$f(x_1,x_2,x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

是否正定。

解　$f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$,

它的各阶主子式

$$5 > 0, \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

故上述二次型是正定的。

例　判别二次型

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3$$

是否正定。

解　用特征值判别法.

二次型的矩阵为　$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,

令 $|A - \lambda E| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 6.$

即知 A 是正定矩阵，故此二次型为正定二次型。

例　判别二次型

$$f=-5x^2-6y^2-4z^2+4xy+4xz$$

的正定性。

解　f的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}$,

$$a_{11}=-5<0,\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 2 & -6\end{vmatrix}=26>0,$$

$$|A|=-80<0,$$

根据定理 9 知，f 为负定的。