第八讲 矩阵函数的求法

一、利用 Jordan 标准形求矩阵函数。

对于矩阵的多项式，我们曾导出 $f(A)=Pf(J)P^{-1}$， f：多项式

$$f(J)=\begin{bmatrix} f(J_1) & & & & \\ & f(J_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & f(J_s) \end{bmatrix}$$

$$f(J_i)=\begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!}f^{(m_i-1)}(\lambda_i) \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & \ddots & & \end{bmatrix}$$

实际上，以上结果不仅对矩阵的多项式成立，对矩阵的幂级数也成

立。由此引出矩阵函数的另一种定义及计算方法。

1. 定义：设n阶矩阵A的 Jordan 标准形为J

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & & \\ & J_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_s \end{bmatrix}, \quad J(\lambda_i)=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

且有非奇异矩阵P使得：$P^{-1}AP=J$

对于函数$f(z)$，若下列函数

$$f(\lambda_i), f'(\lambda_i), \cdots, f^{(m_i-1)}(\lambda_i) \qquad (\lambda=1,2,\cdots,s)$$

均有意义，则称矩阵函数$f(A)$有意义，且

$$f(A) = Pf(J)P^{-1} = P\begin{bmatrix} f(J_1) & & & & \\ & f(J_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & f(J_s) \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$f(J_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!}f^{(m_i-1)}(\lambda_i) \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & \ddots & & \end{bmatrix}_{m_i \times m_i}$$

2. 矩阵函数的求法（步骤）：

1° 求出 A 的 Jordan 标准形及变换矩阵 P， $P^{-1}AP = J$

2° 对于 J 的各 Jordan 块 J_i 求出 $f(J_i)$，即计算出

$$f(\lambda_i), f'(\lambda_i), \ldots\ldots, f^{(m_i-1)}(\lambda_i)$$

并按照顺序构成 $f(J_i)$，

$$f(J_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!} f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!} f^{(m_i-1)}(\lambda_i) \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & \ddots & & \end{bmatrix}_{m_i \times m_i}$$

3° 合成 $f(J) = \begin{bmatrix} f(J_1) & & & & \\ & f(J_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & f(J_s) \end{bmatrix}$

4° 矩阵乘积给出 $f(A) = Pf(J)P^{-1}$

需要说明的是，计算结果与 Jordan 标准形中 Jordan 块的顺序无关。

例 1 （教材 P70 例 1.27）． $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ & 1 & 2 & 3\\ & & 1 & 2\\ & & & 1\end{bmatrix}$，求 $\sqrt{A}$

[解] 1^o 求出 J 及 P

$$J=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ & 1 & 1 & 0\\ & & 1 & 1\\ & & & 1\end{bmatrix},P=\begin{bmatrix}8 & 4 & 0 & 0\\ & 4 & -1 & 1\\ & & 2 & -2\\ & & & 1\end{bmatrix},P^{-1}=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}2 & -2 & -1 & 0\\ & 4 & 2 & 0\\ & & 8 & 16\\ & & & 16\end{bmatrix}$$

2^o 求出 $f(\lambda_i), f'(\lambda_i), \ldots\ldots, f^{(m_i-1)}(\lambda_i)$ 并构成 $f(J_i)$：

$$\lambda_1 = 1, m_1 = 4, f(z) = \sqrt{z}$$

$$f(1) = 1,$$

$$f'(1) = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} |_{z=1} = \frac{1}{2}, \; f''(1) = -\frac{1}{4} z^{-\frac{3}{2}} |_{z=1} = -\frac{1}{4}, \; f'''(1) = \frac{3}{8} z^{-\frac{5}{2}} |_{z=1} = \frac{3}{8}$$

$$f(J_1) = \begin{bmatrix} 16 & 8 & -2 & 1 \\ & 16 & 8 & -2 \\ & & 16 & 8 \\ & & & 16 \end{bmatrix} \frac{1}{16}$$

3^o 合成 $f(J)=f(J_1)$

4^o 求 $f(A)=Pf(J)P^{-1}$， $f(A)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

说明：

（1） $f(z)=\sqrt{z}$，在 $z=0$ 不存在泰勒展开(而存在洛朗展开),如按原先的幂级数定义，则根本无从谈 $f(A)$ 的计算，可见新的定义延拓了原来的定义；

（2）$[f(A)]^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{bmatrix} = A,$

可见这样的$\sqrt{A}$确与A^2构成反函数；

（3）矩阵函数的种类不仅是我们介绍的这种，如辛矩阵。以

$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$为例，以我们这里的定义，$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} \pm i & 0 \\ 0 & \pm i \end{bmatrix}$，但

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

亦满足$B^2 = A$，即 B 也可以看作某种$\sqrt{A}$

二、待定系数法求解矩阵函数.

利用 Jordan 标准形求解矩阵函数的方法比较复杂，它需要求J和P。下面我们介绍根据零化多项式求解矩阵函数的一种方法。

定律：n阶方阵A的最小多项式等于它的特征矩阵的第n个（也就是最后一个）不变因子$d_n(\lambda)$。（可参见张远达《线性代数原理》P215）

设n阶方阵A的不变因子反向依次为$d_n(\lambda), d_{n-1}(\lambda), \cdots, d_1(\lambda)$，由它们给出的初等因子分别为

$$(\lambda-\lambda_1)^{m_1}, (\lambda-\lambda_2)^{m_2}, \cdots, (\lambda-\lambda_r)^{m_r} \quad ;$$

$(\lambda-\lambda_{r+1})^{m_{r+1}},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$； …， $\sum_{i=1}^{s} m_i = n$

由于$d_1(\lambda)\,|\,d_2(\lambda), d_2(\lambda)\,|\,d_3(\lambda),\cdots,d_{n-1}(\lambda)\,|\,d_n(\lambda)$，故

1^o $\lambda_{r+1}\sim\lambda_s$必定出现在$\lambda_1\sim\lambda_r$中；

2^o 若$\lambda_i(i>r)=\lambda_j(j\le r)$则$m_i\le m_j$

根据上述定理，A的最小多项式

$$\varphi_0(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{m_r}$$

即

$$(\lambda_1 I-A)^{m_1}(\lambda_2 I-A)^{m_2}\cdots(\lambda_r I-A)^{m_r}=O$$

令$m=\sum_{i=1}^{r} m_i$，则可见A^m可以由$A^0=I, A, A^2,\cdots,A^{m-1}$线性表示，从

而 $A^{m+i}(i>0)$ 亦可由 $A^0=I, A, A^2, \cdots, A^{m-1}$ 线性表示。所以，矩阵函数 $f(A)$ 若存在，也必定可由 $A^0 \sim A^{m-1}$ 线性表示。

因此，我们定义一个系数待定的(m-1)次多项式 $g(\lambda)=\sum_{i=0}^{m-1} c_i \lambda^i$，根据以上论述，适当选择系数 $c_0 \sim c_{m-1}$，就可以使 $f(A)=g(A)$

又，假设 J 、P 分别为 A 的 Jordan 标准形及相应变换矩阵：$A=PJP^{-1}$

则 $f(A)=Pf(J)P^{-1}$，

$$g(A)=Pg(J)P^{-1} \to f(J)=g(J) \to f(J_i)=g(J_i)$$

$$\Rightarrow \quad f(\lambda_i)=g(\lambda_i), f'(\lambda_i)=g'(\lambda_i), \cdots, f^{(m_i-1)}(\lambda_i)=g^{(m_i-1)}(\lambda_i)$$

$$(i=1,2,\cdots,r)$$

由于$g(A)$为待定系数的多项式，上面就成为关于$c_0 \sim c_{m-1}$的线性方程组。且方程的个数为$m=\sum_{i=1}^{r} m_i$等于未知数个数，正好可以确定$c_0 \sim c_{m-1}$

由此给出根据最小多项式求矩阵函数的一般方法。

1^o 求出最小多项式

$$\varphi_0(\lambda)=d_n(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{m_r}, \sum_{i=1}^{r} m_i = m;$$

（或者特征多项式$\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{n_r}, \sum_{i=1}^{r} n_i = n$）

2^o 形式上写出待定多项式

$$g(\lambda)=\sum_{i=0}^{m-1}c_i\lambda^i=c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2+\cdots+c_{m-1}\lambda^{m-1}$$

（或者 $g(\lambda)=\sum_{i=0}^{n-1}c_i\lambda^i=c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2+\cdots+c_{n-1}\lambda^{n-1}$）

3^o 求解关于 $c_0 \sim c_{m-1}$ 的线性方程组

$$g^{(k)}(\lambda_i)=f^{(k)}(\lambda_i) \quad (k=0,2,\cdots,m_i\text{-}1;i=1,2,\cdots,r)$$

（或者 $k=0,2,\cdots,n_i\text{-}1;i=1,2,\cdots,r$）

4^o 求出 $g(A)$，即可得 $f(A)=g(A)$.

从推导的过程看，似乎不仅最小多项式可用于矩阵函数的计算，一般

零化多项式也可以，其中以特征多项式最为方便。（但$k=1,2,\cdots,n_i$的根据仍需充分作证）

例 2、采用新方法计算$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$的函数 $\sqrt{A}$。（$f(\lambda)=\sqrt{\lambda}$）

[解] $1^o\ \varphi(\lambda)=\varphi_0(\lambda)=(\lambda-1)^4.\quad m_1=4=m=n,\lambda_1=1$；

$2^o\ g(\lambda)=c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2+c_3\lambda^3$

3^o方程组为

$$g(1)=f(1)=1=c_0+c_1+c_2+c_3 \qquad g'(1)=f'(1)=\frac{1}{2}=c_1+2c_2+3c_3$$

$$g''(1) = f''(1) = -\frac{1}{4} = 2c_2 + 6c_3 \qquad g'''(1) = f'''(1) = \frac{3}{8} = 6c_3$$

$$\rightarrow \qquad c_3 = \frac{1}{16}, c_2 = -\frac{5}{16}, c_1 = \frac{15}{16}, c_0 = \frac{5}{16}$$

$$4^o \; g(A) = \frac{1}{16}(5I + 15A - 5A^2 + A^3)$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 & 20 \\ & 1 & 4 & 10 \\ & & 1 & 4 \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 21 & 56 \\ & 1 & 6 & 21 \\ & & 1 & 6 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$

$$f(A)=\frac{1}{16}\left\{\begin{bmatrix}5&0&0&0\\&5&0&0\\&&5&0\\&&&5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}15&30&45&60\\&15&30&45\\&&15&30\\&&&15\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5&20&50&100\\&5&20&50\\&&5&20\\&&&5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&6&21&56\\&1&6&21\\&&1&6\\&&&1\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\&1&1&1\\&&1&1\\&&&1\end{bmatrix}$$

与 Jordan 标准形方法完全一致。

作业： P163 6