人员安排问题

陈琦
qichen@xidian.edu.cn

西安电子科技大学 · 通信工程学院

2022 年 5 月

人员安排问题

某公司准备安排 n 个职员 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 从事 n 项工作 $y_1, y_2, \cdots, y_n$. 已知每个职员能胜任其中一项或几项工作.

- 试问: 能否把所有职员都安排一项他所胜任的工作, 而且每项工作都被安排?

这个问题被称为人员安排问题 (personnel assignment problem).

人员安排问题

某公司准备安排 n 个职员 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 从事 n 项工作 $y_1, y_2, \cdots, y_n$. 已知每个职员能胜任其中一项或几项工作.

- 试问: 能否把所有职员都安排一项他所胜任的工作, 而且每项工作都被安排?

这个问题被称为人员安排问题 (personnel assignment problem).

人员安排问题的数学建模

构造等 2 部简单图 $G = (X \cup Y, E)$, 其中 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$, $x_i y_j \in E(G)$ 当且仅当职员 x_i 胜任工作 y_j. 于是问题转化为判定

- 等 2 部图 G 中是否有完备匹配问题.

交错路

设 M 和 M' 是 $E(G)$ 的两个不交的非空真子集.

- (M, M') 交错路 (alternating path) 是指其边在 M 和 M' 中交错出现的路.
- 若 $\bar{M} = E(G) \setminus M$, 则简称 $(M, \bar{M})$ 交错路为 M 交错路.
- 设 M 是 G 的匹配, P 是 M 交错路. 若 P 的两端点不同且都是 M 非饱和的, 则称 P 为M 增广路 (augmenting path).

交错路

引理

设 M 和 M^* 是 G 的两个不同的非空匹配, $H = G[M \triangle M^*]$, 则 H 的每个连通分支必是下列三种类型之一:

(a) 孤立点 ;

(b) (M, M^*) 交错偶圈;

(c) (M, M^*) 交错路.

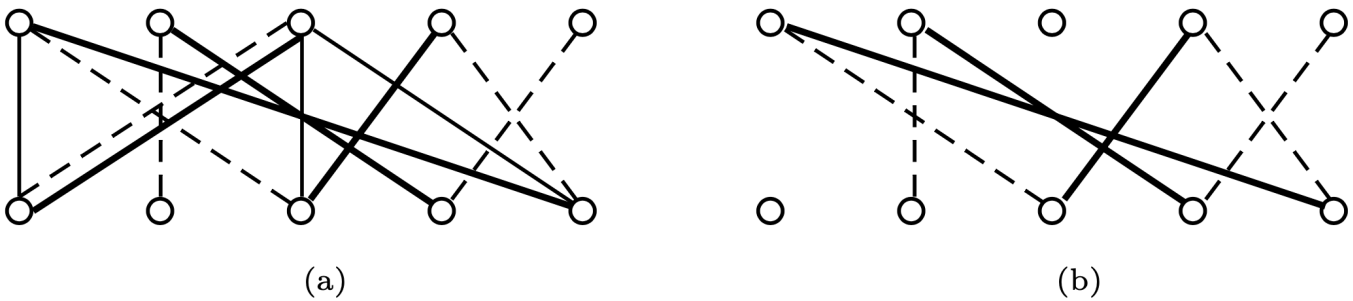


图 5.13 (a) G 的匹配 M (粗边) 和 M^* (虚边); (b) $H = G[M \Delta M^*]$

交错路

证明.

由于 H 中每个顶点至多与 M 和 M^* 中一条边关联, 所以 $0 \le \Delta(H) \le 2$. 而且对 H 中顶点 x, $d_H(x) = 2 \Leftrightarrow x$ 既与 M 中一条边关联, 又与 M^* 中一条边关联. 设 P 是 H 中任意连通分支.

- 若 P 是孤立点, 则 (a) 成立. 下设 $1 \le \Delta(P) \le 2$.
- 若 P 中顶点全是 2 度点, 则由上述说明知 P 中每个顶点既与 M 中一条边关联, 又要与 M^* 中一边关联, 所以 P 是一个 (M, M^*) 交错偶圈, 故 (b) 成立.
- 若 P 中含 1 度点, 设为 x, 则由推论 1.3.2 知 P 中必含另一个 1 度点, 设为 y. 由于 $\Delta(P) \le 2$, 所以 P 是一条以 x 和 y 为端点的路, P 中内部点 (若存在的话) 都是 2 度点. 因而 P 是 (M, M^*) 交错路, (c) 成立.

□

最大匹配的一个充要条件

定理

设 M 是 G 的匹配, 则 M 是最大的 $\Leftrightarrow$ G 中不含 M 增广路.

证明.

- $(\Rightarrow)$ (反证) 设 M 是 G 的最大匹配, 并设 $P = x_0e_1x_1e_2\cdots e_mx_m$ 是 G 中 M 增广路, 则 m 为奇数, 并且 $e_1, e_3, \cdots, e_m \notin M$, 而 $e_2, e_4, \cdots, e_{m-1} \in M$.
- 令

$$\begin{aligned} M' &= M \triangle E(P) \\ &= (M \setminus \{e_2, e_4, \cdots, e_{m-1}\}) \cup \{e_1, e_3, \cdots, e_m\}, \end{aligned}$$

  则 M 是 G 的匹配, 并且 $|M| = |M| + 1$, 矛盾于 M 的最大性.
- $(\Leftarrow)$(反证) 设 M 不是 G 的最大匹配, M^* 是 G 的最大匹配, 则 $|M^*| > |M|$.

最大匹配的一个充要条件

cont.

- 令 $H = G[M \triangle M^*]$. 由引理知 H 的每个连通分支或是孤立点, 或是 (M, M^*) 交错路, 或是 (M, M^*) 交错偶圈.
- 由于 $|M^*| > |M|$, 所以 $|E(H) \cap M^*| > |E(H) \cap M|$.
- 因而 H 必有连通分支 P, 它是一条开始于 M^* 中的边并且终止于 M^* 中边的 (M^*, M) 交错路.
- 于是 P 是 M 增广路, 矛盾于假定.

$\square$

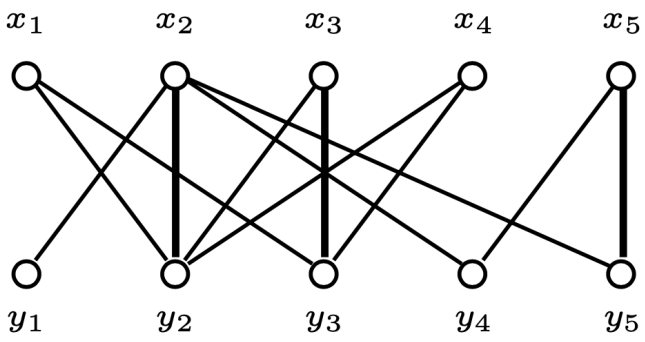
匈牙利算法

1. 任取 G 的匹配 M.
2. 若 M 饱和 X, 则停止. 若 M 不能饱和 X, 则取 X 的 M 非饱和点 x. 令 $S = \{x\}, T = \emptyset$.
3. 若 $N(S) = T$, 则停止, 此时 G 中无完备匹配. 若 $N(S) \neq T$, 则取 $y \in N(S) \setminus T$.
4. 若 y 是 M 饱和的, 则存在 $z \in X \setminus S$, 使 $yz \in M$. 用 $S \cup \{z\}$ 替代 S, $T \cup \{y\}$ 替代 T, 并转入第 3 步. 若 y 是 M 非饱和的, 则 G 中存在以 x 为起点且以 y 为终点的 M 增广路 P. 用 $\hat{M} = M \triangle E(P)$ 替代 M 并转入第 2 步.

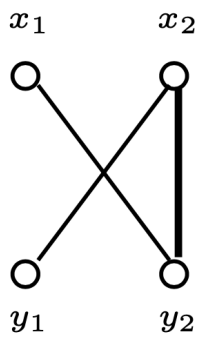
匈牙利算法的应用

例

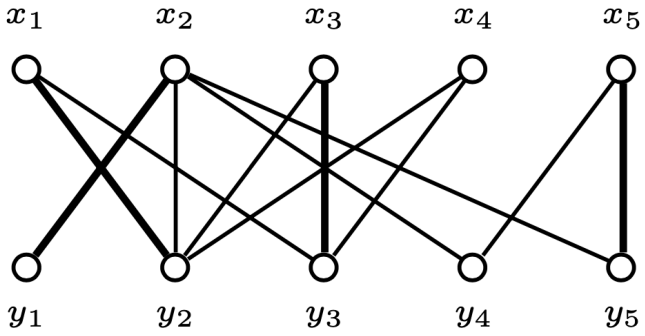
下图 (a) 所示的等 2 部图没有完备匹配.



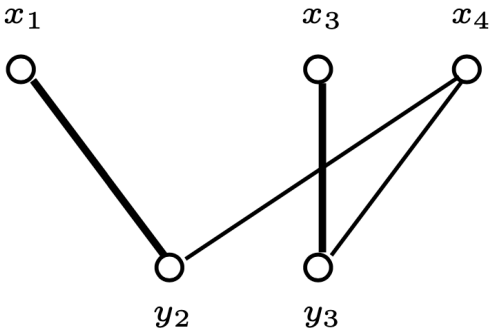
(a) 匹配 M_0 (粗边)



(b) M_0 增广路



(c) 匹配 M_1 (粗边)



(d) $T_2 = N_G(S_2)$

匈牙利算法的应用

证明.

- 设 G 是图 (a) 所示的等 2 部图 $(X\ Y, E)$, 其中 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$.
- 由匈牙利算法, 取初始匹配 $M_0 = \{x_2y_2, x_3y_3, x_5y_5\}$ (见图 (a)). x_1 是 X 中 M_0 非饱和点. 令 $S_0 = \{x_1\}$, $T_0 = \emptyset$.
- 因为 $N(S_0) = \{y_2, y_3\} \subset T_0$, 所以取 $y_2 \in N(S_0) \setminus T_0$. y_2 是 M_0 饱和点, $x_2 \in X$, 使 $x_2y_2 \in M_0$.
- 令 $S_1 = \{x_1, x_2\}$, $T_1 = \{y_2\}$, 则 $N(S_1) = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\} \supset T_1$. 取 $y_1 \in N(S_1) \setminus T_1$. y_1 是 M_0 非饱和点, 所以 $P_0 = x_1y_2x_2y_1$ 是 M_0 增广路 (见图 (b)).
- 令 (见图 (c))

$$M_1 = M_0 \triangle E(P_0) = \{x_1y_2, x_2y_1, x_3y_3, x_5y_5\}.$$

匈牙利算法的应用

证明.

- 用 M_1 替代 M_0 再执行第 1 步. $x_4 \in X$ 是 M_1 非饱和点. 令 $S_0 = \{x_4\}$, $T_0 = \emptyset$, 则

$$N(S_0) = \{y_2, y_3\} \supset T_0.$$

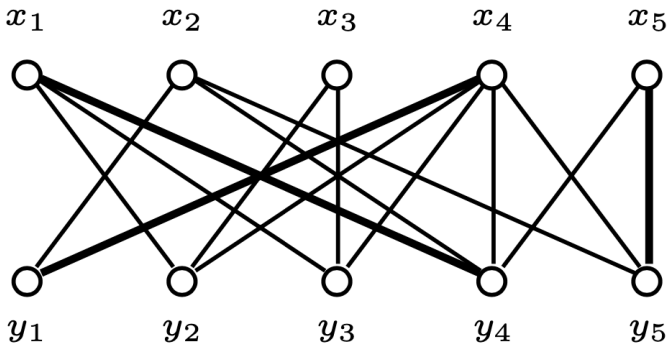
- 取 $y_2 \in N(S_0) \subset T_0$, y_2 是 M_1 饱和点, 并且 $x_1y_2 \in M_1$. 令 $S_1 = \{x_1, x_4\}$, $T_1 = \{y_2\}$.
- 由于 $N(S_1) = y_2, y_3 \supset T_1$, 取 $y_3 \in N(S_1) \setminus T_1$, y_3 是 M_1 饱和的, 而且 $x_3y_3 \in M_1$.
- 令 $S_2 = \{x_1, x_3, x_4\}$, $T_2 = \{y_2, y_3\} = N(S_2)$ 匈牙利算法停止. 因为有 $|N(S_2)| < |S_2|$, 故 G 没有完备匹配.

□

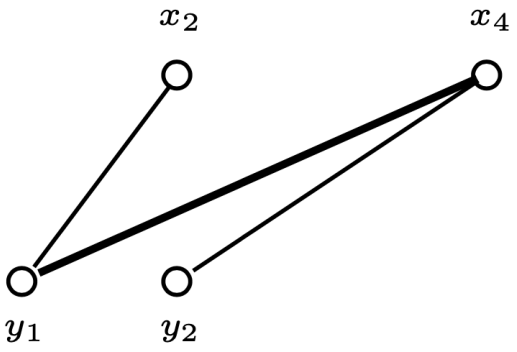
匈牙利算法的应用

例

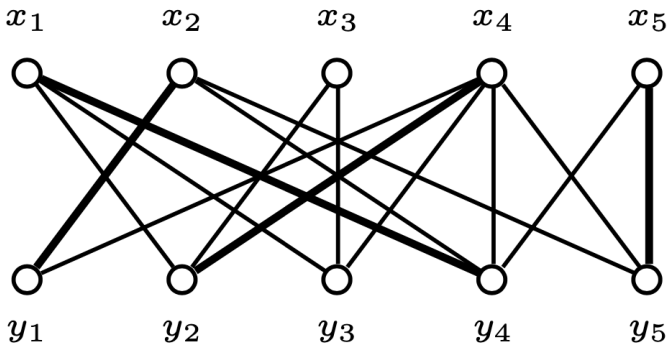
下图 (a) 所示的等 2 部图有完备匹配.



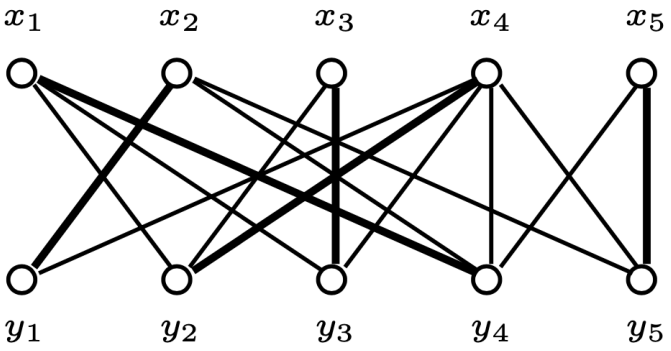
(a) 匹配 M_0 (粗边)



(b) M_0 增广路



(c) 匹配 M_1 (粗边)



(d) 完备匹配 M_2 (粗边)