独立集

陈琦
qichen@xidian.edu.cn

西安电子科技大学 · 通信工程学院

2023 年 5 月

独立集

定义

设 D 是无环图，S 是 $V(D)$ 的非空子集.

- 若 S 中任何两顶点在 D 中均不相邻，则称 S 为 D 的独立集 (independent set).
- 设 S 是 D 的独立集，若对 D 中任何独立集 S'，均有 $|S'| \leq |S|$，则称 S 为最大的 (maximum);
- 若对任何 $x \in V \setminus S$, $S \cup \{x\}$ 不是独立集，则称 S 为极大的 (maximal).

G 的独立数 (independent number) 是 G 中最大独立集中的点数，记为 $\alpha(G)$.

独立集

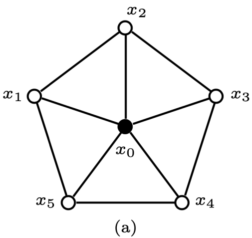

图 5.9　(a) 极大独立集 $S' = \{x_0\}$; (b) 最大独立集 $S = \{x_1, x_3\}$

独立集

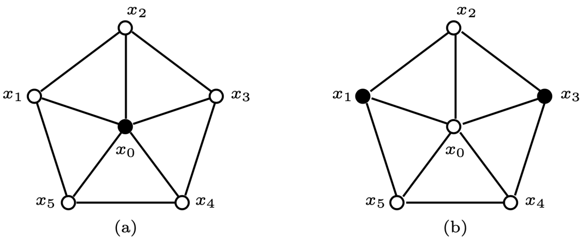

图 5.9　(a) 极大独立集 $S' = \{x_0\}$; (b) 最大独立集 $S = \{x_1, x_3\}$

$$\alpha(G) = 1 \Leftrightarrow G \cong K_v, \quad \alpha(G) = v \Leftrightarrow G \cong K_v^c$$

$$\alpha(K_{m,n}) = \max\{m, n\},$$

$$\alpha(C_{2n}) = n, \alpha(C_{2n+1}) = n.$$

独立集与点覆盖

定理 (T. Gallai, 1959)

设 $S \subseteq V(G)$, 则 S 是 G 的独立集 $\Leftrightarrow$ $V(G) \setminus S$ 是 G 的点覆盖.

证明.

由定义, S 是 G 的独立集 $\Leftrightarrow$ G 中每条边的两端点都不同时属于 S $\Leftrightarrow$ G 的每条边至少有一端点在 $V \setminus S$ 中 $\Leftrightarrow$ $V \setminus S$ 是 G 的点覆盖. $\square$

独立集与点覆盖

定理 (T. Gallai, 1959)

设 $S \subseteq V(G)$, 则 S 是 G 的独立集 $\Leftrightarrow$ $V(G) \setminus S$ 是 G 的点覆盖.

证明.

由定义, S 是 G 的独立集 $\Leftrightarrow$ G 中每条边的两端点都不同时属于 S $\Leftrightarrow$ G 的每条边至少有一端点在 $V \setminus S$ 中 $\Leftrightarrow$ $V \setminus S$ 是 G 的点覆盖. $\square$

推论

S 是 G 的极大独立集 $\Leftrightarrow$ $V(G) \setminus S$ 是 G 的极小点覆盖.

推论

$\alpha + \beta = v$.

边覆盖

定义

设 B 是 $E(G)$ 的非空子集.

- 若 G 的每个顶点都与 B 中某条边关联, 则称 B 为 G 的边覆盖 (edge covering).
- G 的边如果对 G 中任何边覆盖 B', 均有 $|B| \leq |B'|$, 则覆盖 B 被称为最小的 (minimum).
- G 的覆盖数数是最小边覆盖的边数, 记作 $\beta'(G)$.

边覆盖与点覆盖

定理

设 G 是任意图. 若 $\delta(G) > 0$, 则 $\alpha' + \beta' = v$.

证明.

设 M 是 G 的最大匹配, U 是 M 非饱和点集, 则 $G[U]$ 是无边图. 由于 $\delta(G) > 0$, 所以 G 中存在 $|U|$ 条边的边集 E', 它的每条边都与 U 中的点关联 (见图 5.10). 显然, $M \cup E'$ 是 G 的边覆盖, 因而 $\beta' \le |M \cup E'| = \alpha' + (v - 2\alpha') = v - \alpha'$, 即得 $\alpha' + \beta' \le v$.

设 B 是 G 的最小边覆盖. 令 $H = G[B]$, 则 $V(H) = V(G)$. 设 M 是 H 的最大匹配, u 为 H 中 M 非饱和点集, 则 $H[U]$ 是无边图, 从而

$$|B| - |M| = |B \setminus M| \ge |U| = v - 2|M|,$$

即 $|B| + |M| \ge v$. 又因为 H 是 G 的支撑子图, 所以 M 也是 G 的匹配. 故 $' + ' \ge |M| + |B| \ge v$. $\square$

独立集与边覆盖

定理

设 G 是 2 部图. 若 $\delta(G) > 0$, 则 $\alpha(G) = \beta'(G)$.

证明.

设 G 是 2 部图, 并且 $\delta(G) > 0$. 由推论 5.2.1.2 和定理 5.2.2 有 $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$. 再由定理 5.1.3 推知 $\alpha' = \beta$. 于是 $\alpha = \beta'$. □