匹配

陈琦
qichen@xidian.edu.cn

西安电子科技大学 · 通信工程学院

2024 年 5 月

匹配

定义

- 设 D 是无环非空图, M 是 $E(D)$ 的非空子集. 若 M 中任何两条边在 D 中均不相邻, 则称 M 为 D 的匹配 (matching).
- 设 $x \in V(D)$. 若 x 与 M 中的边关联, 则称 x 为 M 饱和点 (saturated vertex); 反之称为 M 非饱和点 (unsaturated vertex).
- 设 $X \subseteq V(D)$. 若 X 中每点都是 M 饱和点, 则称 M 饱和 X.
- 若 M 饱和 $V(D)$, 则称 M 为 D 的完备匹配 (perfect matching).
- 若对 D 的任何匹配 M', 均有 $|M| \leq |M|$, 则称 M 为 D 的最大匹配 (maximum matching).

匹配

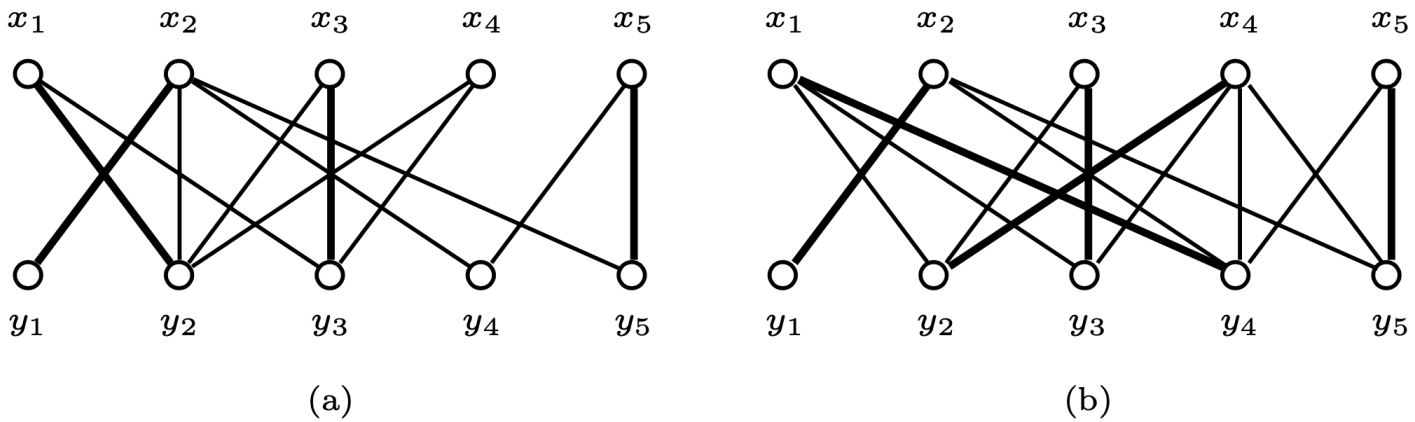


图 5.1　(a) 最大匹配; (b) 完备匹配

Hall 定理

定理

设 G 是 2 部划分为 $\{X, Y\}$ 的 2 部图, 则 G 有饱和 X 的匹配 $\Leftrightarrow$ $|S| \leq |N_G(S)|, \quad \forall S \subseteq X.$

证明.

$(\Rightarrow)$ 设 M 是 G 中饱和 X 的匹配, 并设 $S \subseteq X$. 由于 M 将 S 中每个顶点与 $N_G(S)$ 中顶点配对, 所以应有 $|N_G(S)| \geq |S|$.
$(\Leftarrow)$ 令 M 是 G 中最大匹配. 只需证明 $|M| \geq |X|$. 令 H 是由 G 的每条边给定从 X 到 Y 的方向后所得到的定向图.
构造有向图 D

$$V(D) = V(H) \cup \{x, y\},$$
$$E(D) = E(H) \cup \{(x, x') : x' \in X\} \cup \{(y', y) : y' \in Y\}.$$

因此, D 的内部点不交的 (x, y) 路的最大条数为 $|M|$.

Hall 定理

cont.

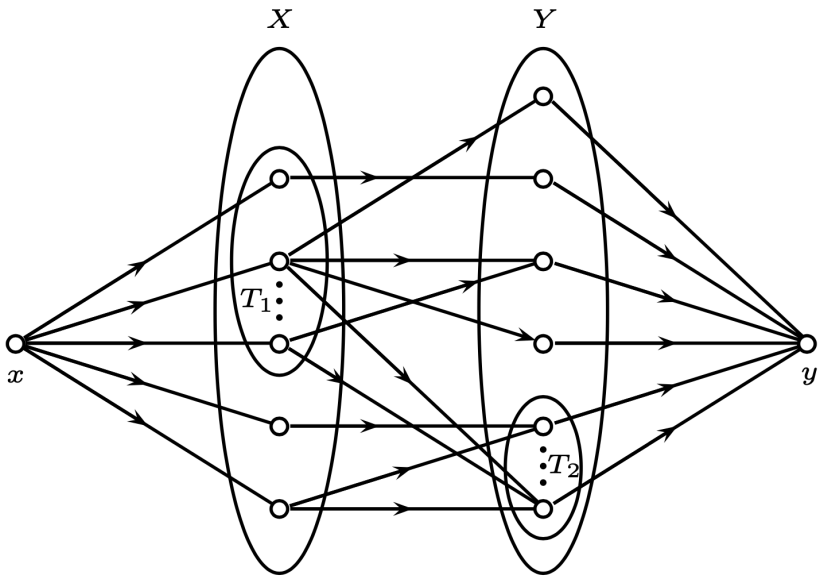
令 T 是 D 中最小 (x, y) 分离集. 由定理 4.2.2 有

$$|M| = \zeta_D(x, y) = \kappa_D(x, y) = |T|.$$

令 $T_1 = T \cap X, T_2 = T \cap Y$, 则 $N_D^+(X \setminus T_1) \subseteq T_2$. 所以

$$\begin{aligned} |M| =& |T| = |T_1| + |T_2| \geq |T_1| + |N_D^+(X \setminus T_1)| \\ =& |T_1| + |N_G(X \setminus T_1)| \geq |T_1| + |X \setminus T_1| = |X|. \end{aligned}$$

定理得证.



一些推论

推论 (婚姻定理, G. Frobenius, 1917)

等 2 部图 $G = (X \cup Y, E)$ 有完备匹配 $\Leftrightarrow$ 对任何 $S \subseteq X$ (或 Y), 均有 $|N_G(S)| \geq |S|$.

推论

$k(> 0)$ 正则 2 部图必有完备匹配.

推论

设 G 是 2 部划分为 $\{X, Y\}$ 的简单 2 部图, 而且 $|X| = |Y| = n$. 若 $\delta(G) \geq n/2$, 则 G 有完备匹配.

Tutte 定理

定理

G 有完备匹配 $\Leftrightarrow o(G-S) \leq |S|, \forall S \subset V(G)$. 其中 $o(G-S)$ 是 $G-S$ 的奇阶连通分支数目.

点覆盖

定义

设 G 是无环非空图, S 是 $V(G)$ 的非空子集.

- 若 $E(G)$ 中每条边都与 S 中某点关联, 则称 S 为 G 的 点覆盖 (vertex covering).
- 如果对 G 中任何异于 S 的点覆盖 S' 均有 $|S'| \geq |S|$, 则称 S 为最小点覆盖 (minimum vertex covering).
- 点覆盖 S 称为极小的 (minimal), 若对任何 $x \in S, S \setminus \{x\}$ 都不是点覆盖.

点覆盖

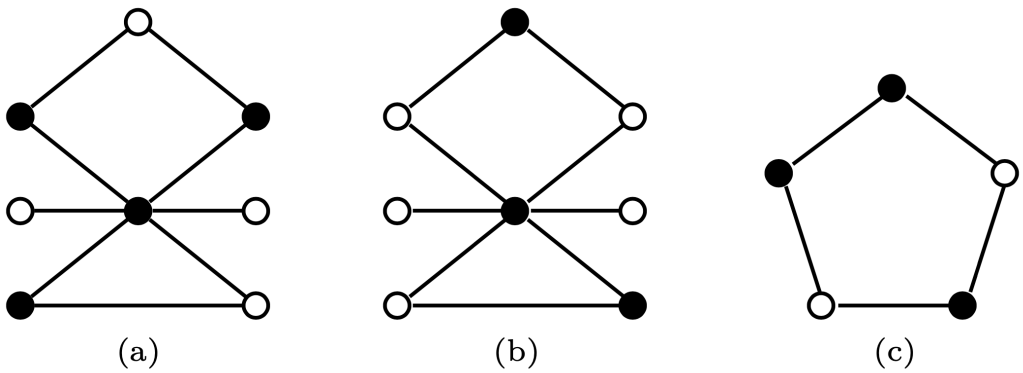
定义

设 G 是无环非空图, S 是 $V(G)$ 的非空子集.

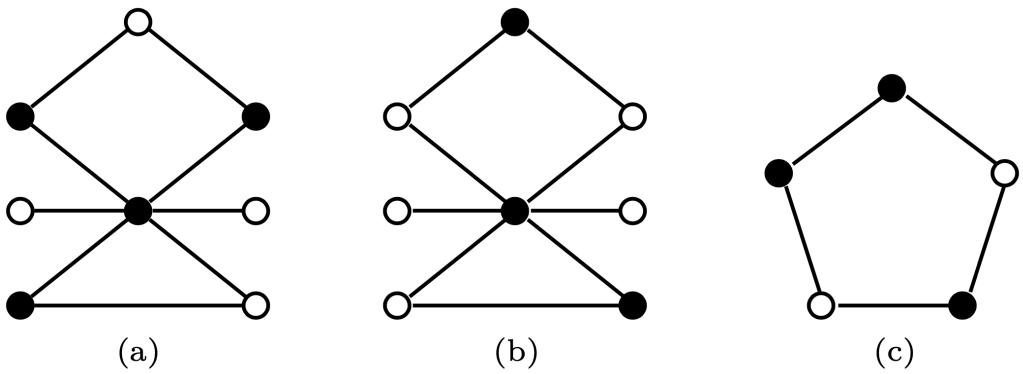
- 若 $E(G)$ 中每条边都与 S 中某点关联, 则称 S 为 G 的 点覆盖 (vertex covering).
- 如果对 G 中任何异于 S 的点覆盖 S' 均有 $|S'| \geq |S|$, 则称 S 为最小点覆盖 (minimum vertex covering).
- 点覆盖 S 称为极小的 (minimal), 若对任何 $x \in S, S \setminus \{x\}$ 都不是点覆盖.

G 的点覆盖数 (vertex covering number) 是 G 中最小点覆盖中的点数, 记为 $\beta(G)$.
G 的匹配数 (matching number) 是 G 中最大匹配中的边数, 记为 $\alpha'(G)$.

点覆盖



点覆盖



$$\beta(K_n) = n-1, \quad \alpha'(K_n) = \lfloor n/2 \rfloor,$$
$$\beta(C_n) = \lceil n/2 \rceil, \quad \alpha'(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor,$$
$$\beta(K_{m,n}) = \min\{m, n\} = \alpha'(K_{m,n}).$$

Konig 定理

定理

对任何 2 部图 G, 有 $\alpha'(G) = \beta(G)$.

证明.

只需证明 $\beta(G) \leq \alpha'(G)$. 设 G 是 2 部划分为 $\{X, Y\}$ 的 2 部图, Z 是 G 的最小点覆盖, 并令

$$S = Z \cap X, T = Z \cap Y, S' = X \setminus S, T' = Y \setminus T$$

由点覆盖的定义知 S' 与 T' 之间无边相连. 考虑 G 的 2 部子图 $H = G[S \cup T']$. 因为 Z 是 G 的最小点覆盖, 所以对 S 的任何子集 R, 均有 $|N_H(R)| \geq |R|$. 由 Hall 定理知 H 中存在饱和 S 的匹配, 记为 M_1. 同样, $G[S' \cup T]$ 中存在饱和 T 的匹配, 设为 M_2. 由于 $M_1 \cup M_2$ 是 G 的匹配, 而且 $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, 所以

$$\beta(G) = |Z| = |S| + |T| = |M_1| + |M_2| \leq \alpha'(G)$$

定理得证. □