连通度

陈琦
qichen@xidian.edu.cn

西安电子科技大学 · 通信工程学院

2024 年 5 月 16 日

连通度

设 D 是强连通图, 非空集 $S \subset V(D)$.

- 若 $D-S$ 是非强连通的, 则称 S 为 D 的分离集 (separating set).
- D 中不含支撑子图 K_v^*, 则 D 必有分离集.
- 定义

$$\kappa(D) = \begin{cases} 0, & D\text{是非强连通的} \\ v-1 & D\text{含支撑子图}k_v^* \\ \min\{|S| : S \text{ 是}D\text{ 的分离集}\} & \text{其他} \end{cases}$$

  为 D 的连通度.
- 若 $\kappa(D) \geq k$, 则称 D 为 k 连通的.
  - 完全有向图 K_v^* 是 $v-1$ 连通的.
  - 有向圈是 1 连通的.
- 点数为 $\kappa = \kappa(D)$ 的分离集称为 κ 分离集.

边连通度

设 D 是强连通有向图, S 是 $V(D)$ 的真子集.

- 若 S 非空, 则称 $[S, \bar{S}]$ 为割 (cut), $(S, \bar{S})$ 为 D 的有向割 (directed cut).
- 定义

$$\lambda(D) = \begin{cases} 0, & D \text{ 的阶是 } 1 \\ & \text{或 } D \text{ 是非强连通的} \\ \min\{|B| : B\text{是}D\text{的有向割}\} & \text{其他} \end{cases}$$

  为 D 的边连通度 (edge-connectivity).
- 若 $\lambda(D) \geq k$, 则称 D 为 k 边连通图.
- 边数为 $\lambda = \lambda(D)$ 的有向割被称为 λ 割

$$\lambda(D) = \min\{\lambda_D(x, y) : \forall x, y \in V(D)\}.$$

类似地, 可以定义无向图 G 的连通度 $\kappa(G)$ 和边连通度 $\lambda(G)$.

一些关于连通度和边连通度的例子

- 对 n 阶完全图 K_n，无论它是有向的还是无向的，均有 $\kappa(K) = \lambda(K) = n-1$.
- 对 $n(\geq 3)$ 阶圈 C_n,
- 对任何阶 $v \geq 2$ 的树 T

设 G 是无向图，D 是 G 的对称有向图. 容易看出:

S 是 G 的分离集 $\Leftrightarrow$ S 是 D 的分离集
$[S, \bar{S}]$ 是 G 的割 $\Leftrightarrow$ $(S, \bar{S})$ 是 D 的有向割.

因此，若 D 是 G 的对称有向图，则

$$\kappa(G) = \kappa(D), \lambda(G) = \lambda(D).$$

Whitney 不等式

定理

$\kappa(D) \le \lambda(D) \le \delta(D)$.

证明.

- 不妨假设 D 是非平凡强连通无环有向图, 并设 $x \in V(D)$, 使 $d_D^+(x) = \delta(D)$. 由于 $E_D^+(x)$ 是 D 的有向割, 所以 $\lambda(D) \le d_D^+(x) = \delta(D)$.
- 以下对 $\lambda \ge 1$ 用归纳法来证明 $\kappa(D) \le \lambda(D)$ 对任何非平凡强连通图 D 成立.
- 当 $\lambda = 1$ 时, 结论显然成立.
- 假定 $\kappa(H) \le \lambda(H)$ 对任何 $\lambda(H) < k$ 的图 H 都成立, 并设 $\lambda(D) = k \ge 2$. 于是, 存在有向割 B, 使 $|B| = \lambda(D) = k$.
- 令 $a \in B, H = D - a$, 则 $\lambda(H) = k - 1 \ge 1$. 由归纳假设知 $\kappa(H) \le \lambda(H) = k - 1$.

Whitney 不等式

cont.

- 若 H 含支撑子图 K_v^*, 则 $K_v^* \subset D$. 因此
$$\kappa(D) = v-1 = \kappa(H) \le \lambda(H) = k-1 < k = (D).$$

- 若 H 不含 K_v^*, 则 H 中存在分离集 S, 使 $|S| = \kappa(H)$. 若 $D-S$ 不是强连通的, 则
$$\kappa(D) \le |S| = \kappa(H) \le \lambda(H) = k-1 < k = \lambda(D).$$

- 若 $D-S$ 是强连通的, 并且 $v(D-S) = 2$, 则
$$\kappa(D) \le v-1 = |S| + 1 = \kappa(H) + 1 = \lambda(H) + 1 = \kappa = \lambda(D).$$

- 下设 $D-S$ 是强连通的, 并且 $v(D-S) > 2$. 设 $a = (x, y)$, 则 $S \cup \{x\}$ 或 $S \cup \{y\}$ 是 D 的分离集. 于是
$$\kappa(D) \le |S| + 1 = \kappa(H) + 1 \le \lambda(H) + 1 = k = \lambda(D).$$

由归纳法原理, 定理得证.

k 连通判定准则

定理

设 $k(\geq 1)$ 是整数, D 是 $v(\geq k+1)$ 阶有向图, 则

1. $\kappa(D) \geq k \Leftrightarrow \zeta_D(x,y) \geq k, \forall x,y \in V(D)$;
2. $\lambda(D) \geq k \Leftrightarrow \eta_D(x,y) \geq k, \forall x,y \in V(D)$.

证明.

- 当 $k=1$ 时, 由强连通有向图和 ζ_D 的定义立即知结论成立. 下设 $k \geq 2$.
- $(\Rightarrow)$ 设 x 和 y 是 k 连通有向图 D 中两个不同顶点. 若 $E_D(x,y) = \emptyset$, 则由定理 4.2.2 知 $k \leq \kappa(D) \leq \kappa_D(x,y) = \zeta_D(x,y)$.
- 下设 $E_D(x,y) \neq \emptyset$, 并令 $\mu = |E_D(x,y)|$. 若 $\mu \geq k$, 则

$$\zeta_D(x,y) \geq |E_D(x,y)| = \mu \geq k.$$

- 下设 $\mu < k$, 并设 $D' = D - E_D(x,y)$. 在这种情形下仍能证明 $\zeta_D(x,y) \geq k$.

k 连通判定准则

cont.

- (反证) 若 $\zeta_D(x,y) < k$, 则 $1 < \zeta_{D'}(x,y) < k-\mu$. 因而由 Menger 定理知在 D' 中存在 (x,y) 分离集 $S \subseteq V \setminus \{x,y\}$, 使 $|S| = \zeta_{D'}(x,y) \leq k-\mu-1$.
- 于是
$$|V|-|S| \geq k+1-(k-\mu-1) = \mu+2,$$
即存在 $z \in (V \setminus \{x,y\}) \setminus S$. 若 $E_{D'}(x,z) \neq \emptyset$, 则 $\zeta_{D'-S}(x,z) \geq 1$.
- 若 $E_{D'}(x,z) = \emptyset$, 则由 Menger 定理知 $\zeta_D(x,z) \geq k$.
- 因而 $\zeta_{D'}(x,z) \geq k-\mu$. 由于 $|S| \leq k-\mu-1$, 所以仍有 $\zeta_{D'-S}(x,z) \geq 1$.
- 同样可以证明 $\zeta_{D'-S}(z,y) \geq 1$. 因此有 $\zeta_{D'-S}(x,y) \geq 1$, 矛盾于 S 是 D' 中 (x,y) 分离集的假设. 故当 $E_D(x,y) \neq \emptyset$ 时, 仍有 $\zeta_D(x,y) \geq k$.

k 连通判定准则

cont.

- (⇒) 由于 $k \geq 1$, 由假设知 D 是强连通的. 假设 D 含支撑子图 K_v^*, 则 $\kappa(D) = v - 1 \geq k$.
- 假设 D 不含 K_v^* , 并设 S 是 D 的 κ 分离集. 于是 $D - S$ 不是强连通的, 因而存在 $x, y \in V(D)$, 使 $D - S$ 中不存在 (x, y) 有向路, 即 S 是 D 中 (x, y) 分离集.
- 于是 $|S| \geq \kappa D(x, y)$. 由假定知 $\zeta_D(x, y) \geq k$, 所以由 Menger 定理有
$$\kappa(D) = |S| \geq \kappa_D(x, y) = \zeta_D(x, y) \geq k.$$

  利用边形式的 Menger 定理 (定理 4.2.1), 同样能证明 2.

□