Menger 定理

陈琦
qichen@xidian.edu.cn

西安电子科技大学 · 通信工程学院

2024 年 5 月

边连通度

设 x 和 y 是图 D 中不同的顶点, $\mathscr{P}_{xy}(D)$ 是 D 中 (x,y) 路集, $P_i, P_j \in \mathscr{P}_{xy}(D)$.

- $V(P_i) \cap V(P_j) = \{x,y\}$, 则称 P_i 和 P_j 是内点不交的 (internally vertex-disjoint);
- 若 $E(P_i) \cap E(P_j) = \emptyset$, 则称 P_i 和 P_j 是 边不交的 (edge disjoint).
- 若对任意的 $P_i, P_j \in \mathscr{P}_{xy}(D)$, P_i 和 P_j 都是内点不交 (或者边不交) 的, 则称 $\mathscr{P}_{xy}(D)$ 是 D 中内点不交 (或者边不交) 的 (x,y) 路集.
- 用 $\zeta_D(x,y)$ 和 $\eta_D(x,y)$ 分别表示 D 中内点不交和边不交的 (x,y) 路的最大条数.

边连通度

- D 中最小 (x, y) 割中的边数定义为 D 的 (x, y)-边连通度 ((x,y)-edge-connectivity), 记为 $\lambda_D(x, y)$. 对于无向图 G, 同样定义 $\lambda_G(x, y)$.

由定义立即有

$$\eta_D(x, y) \leq \lambda_D(x, y).$$

边形式的 Menger 定理

定理

设 x 和 y 是 D 中不同的顶点, 则

$$\eta_D(x,y) = \lambda_D(x,y)$$

证明.

定义 $\boldsymbol{c} \in \mathscr{E}(D)$ 如下: $\boldsymbol{c}(a) \equiv 1, \forall a \in E(D)$. 考虑整容量网络 $N = (D_{xy}, \boldsymbol{c})$. 由定理 4.1.2 知 N 中存在整数最大 (x,y) 流 $\boldsymbol{f}$ 和最小 (x,y) 割 $B = (S, \bar{S})$, 使得

$$\mathrm{val}\boldsymbol{f} = \mathrm{cap}B.$$

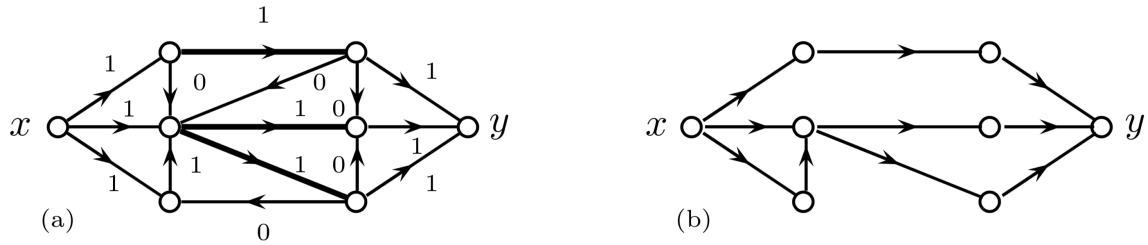
所以只需证明

$$\eta_D(x,y) \geq \mathrm{val}\boldsymbol{f}, \quad \mathrm{cap}B \geq \lambda_D(x,y).$$

边形式的 Menger 定理

cont.

令 H 是由 D 中边集 $\{a \in E(D) : \boldsymbol{f}(a) \neq 0\}$ 导出的子图.



由于对任何 $a \in E(D)$, 均有 $\boldsymbol{c}(a) = 1$, 所以对任何 $a \in E(H)$, 均有 $\boldsymbol{f}(a) = 1$. 因此可得

$$\begin{cases} d_H^+(x) - d_H^-(x) = \mathrm{val}\boldsymbol{f} = d_H^-(y) - d_H^+(y), \\ d_H^+(u) = d_H^-(u), \forall u \in V(H) \setminus \{x, y\}. \end{cases}$$

所以 H 是 $\mathrm{val}\boldsymbol{f}$ 条边不交的 (x, y) 路之并, 即 $\eta_D(x, y) \geq \mathrm{val}\boldsymbol{f}$. 由于 $B = (S, \bar{S})$ 是 (x, y) 割, N 是单位容量网络且有 $\mathrm{cap}B = \mathrm{val}\boldsymbol{f}$, 所以 $\mathrm{cap}B = |B| \geq \lambda_D(x, y)$, 因而定理得证. □

两个推论

推论

设 D 是有向图, $x, y \in V(D)$, k 是正整数, 则 $\eta_D(x, y) \geq k \Leftrightarrow$ 对任何包含 x 但不包含 y 的子集 $S \subset V(D)$, 均有 $d_D(S) = \min\{d_D^+(S), d_D^-(S)\} \geq k$.

推论

设 x 和 y 是无向图 G 中任意两顶点, 则 $\eta_G(x, y) = \lambda_G(x, y)$.

点连通度

设 D 是有向图, $x, y \in V(D)$.

- 若存在 $S \subseteq V(D) \setminus \{x, y\}$, 使 $D-S$ 中不存在 (x, y) 路, 则称 S 为 (x, y) 分离集 (separating set).
- 若对任何 (x, y) 分离集 S', 均有 $|S| \leq |S'|$, 则称 S 为最小 (x, y) 分离集.
- D 的 (x, y)-点连通度 ((x, y)-vertex-connectivity), 记为 $\kappa_D(x, y)$, 是指 D 中最小 (x, y) 分离集中的点数.

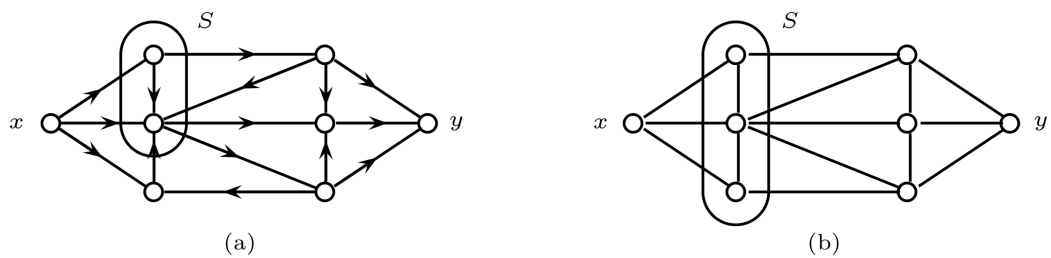


图 4.5 (a) 有向图 D 和 (x, y) 分离集 S; (b) 无向图 G 和 xy 分离集 S

点连通度

设 D 是有向图, $x, y \in V(D)$.

- 若存在 $S \subseteq V(D) \setminus \{x, y\}$, 使 $D-S$ 中不存在 (x, y) 路, 则称 S 为 (x, y) 分离集 (separating set).
- 若对任何 (x, y) 分离集 S', 均有 $|S| \leq |S'|$, 则称 S 为最小 (x, y) 分离集.
- D 的 (x, y)-点连通度 ((x, y)-vertex-connectivity), 记为 $\kappa_D(x, y)$, 是指 D 中最小 (x, y) 分离集中的点数.

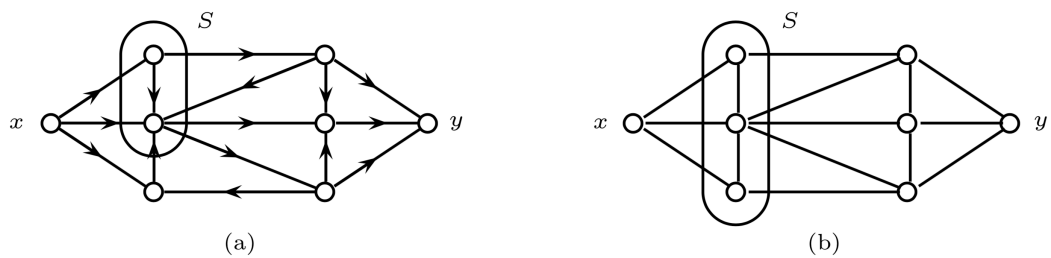


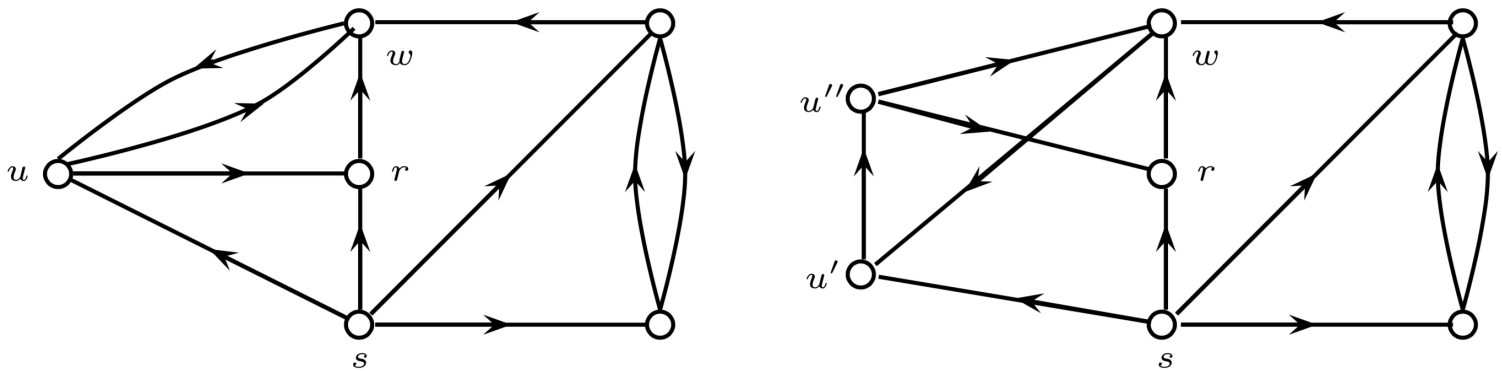
图 4.5 (a) 有向图 D 和 (x, y) 分离集 S; (b) 无向图 G 和 xy 分离集 S

用 $\zeta_D(x, y)$ 表示 D 中内点不交的 (x, y) 有向路的最大条数. 由定义立即有

$$\zeta_D(x, y) \leq \kappa_D(x, y).$$

顶点分裂运算

设 $u \in V(D)$, 分裂 u 为 u' 和 u'' 是指这样一个运算: 在 D 中用两个新顶点 u' 和 u'' 代替 u, 添加新边 (u', u''), 并把 D 中以 u 为起点的边用以 u'' 为起点的新边来代替, 而把 D 中以 u 为终点的边用以 u' 为终点的新边来代替.



点形式的 Menger 定理

定理

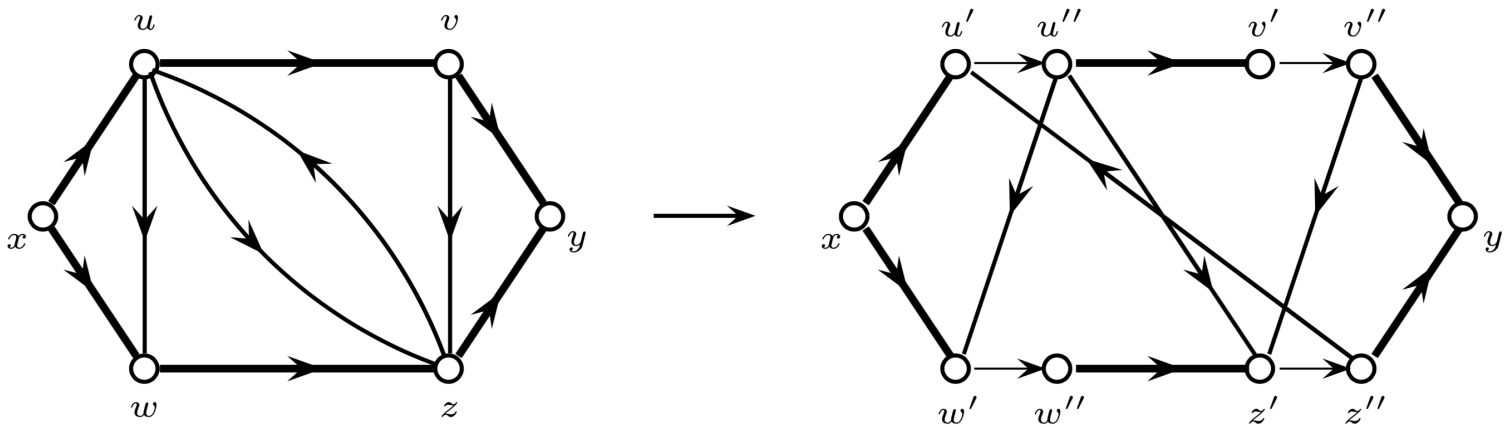
设 x 和 y 是 D 中不同的顶点, 且 $E_D(x,y)=\emptyset$, 则

$$\zeta_D(x,y)=\kappa_D(x,y)$$

证明.

令 D 中分裂每个 $u\in V(D)\setminus\{x,y\}$ 之后所得到的图为 H 由定理 4.2.1 有 $\lambda_H(x,y)=\eta_H(x,y)$. 只需证明

$$\zeta_D(x,y)\geq\eta_H(x,y),\quad \lambda_H(x,y)\geq\kappa_D(x,y).$$



点形式的 Menger 定理

cont.

- 由于 H 中每条 (x, y) 路都对应着收缩所有形如 (u', u'') 的边之后得到的 D 中一条 (x, y) 路,
- 而且 H 中两条有向路边不交, D 中与之对应的有向路内部点也不交
- 所以 $\zeta_D(x, y) \geq \eta_H(x, y)$.
- 设 B 是 H 中最小 (x, y) 割, 于是 $|B| = \lambda_H(x, y)$, 并且 $V(H)$ 存在划分 V', V'', 使 $E_H(V', V'') = B$ 且 $x \in V', y \in V''$
- 令 B 中边的起点集为 S, 则 $|S| \leq |B|$, 而且 $H-S$ 中不存在 (x, y) 路. 令 S' 为 D 中与 S 对应的顶点集, 则 $|S'| \leq |S|$, 而且在 $D-S'$ 中不存在 (x, y) 路.
- 因此

$$\kappa_D(x, y) \leq |S'| \leq |S| \leq |B| = \lambda_H(x, y).$$

定理得证。 □