圈与回

陈琦
qichen@xidian.edu.cn

西安电子科技大学 · 通信工程学院

2024 年 3 月 5 日

圈与回

定义

- 闭路 (迹) 被称为圈 (回).
- 长为奇 (偶) 数的圈 (回) 被称为奇 (odd) (偶 (even)) 圈 (回).
- 图中长度最大 (小) 的圈被称为最长 (短) 圈 (longest (shortest) cycle).
- G (或 D) 的围长 (girth)是指 G(或 D) 中最短圈 (或有向圈) 的长, 记为 $g(G)$(或 $g(D)$);
- G(或 D) 的周长 (circumference)是指 G(或 D) 中最长圈 (或有向圈)的长.

最小度与圈

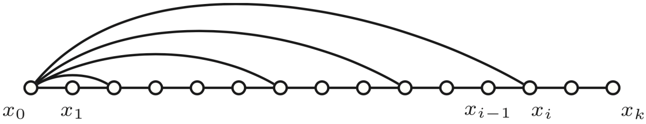
命题

设 G 是无向图. 若 $\delta = \delta(G) \geq 2$, 则 G 含圈; 若 G 是简单图, 则 G 含长至少为 $\delta + 1$ 的圈.

证明.

- 若 G 中含环或者平行边, 则结论成立.
- 下设 G 为简单无向图, 并设 $P = (x_0, x_1, \cdots, x_k)$ 为 G 中最长路,$x_k \neq x_0$, 则 $N_G(x_0) \subseteq \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$.
- 由于 $|N_G(x_0)| = d_G(x_0) \geq \delta(G) = \delta \geq 2$, 所以存在 $x_i \in N_G(x_0)(\delta \leq i \leq k)$.
- 于是, $(x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_0)$ 为 G 中长至少为 $\delta + 1$ 的圈.

$\square$



(a)

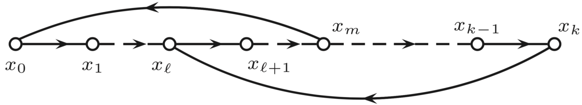
最小度与圈

命题

设 D 是简单有向图, $k = \max\{\delta^+, \delta^-\} > 0$, 则 D 有长至少为 $k+1$ 的有向圈.

证明.

- 设 $P = (x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k)$ 是 D 中最长有向路.
- 因为 D 是简单图, 所以 $N_D^+(x_k) \subseteq V(P)$, $N_D^-(x_0) \subseteq V(P)$.
- 令 $l = \min\{i : x_i \in N_D^+(x_k)\}$, 则 $C' = (x_l, x_{l+1}, \cdots, x_k, x_l)$ 是有向圈, 其长 $(k-l) + 1 \geq d_D^+(x_k) + 1 \geq \delta^+ + 1$.
- 令 $m = \max\{j : x_j \in N_D^-(x_0)\}$, 则 $C'' = (x_0, x_1, \cdots, x_m, x_0)$ 是有向圈, 其长 $m + 1 \geq d_D^-(x_0) + 1 \geq \delta^- + 1$.
- 令 C 是 C' 和 C'' 中最长者, 则 C 的长至少为 $\max\{\delta^+, \delta^-\} + 1 = k + 1$.



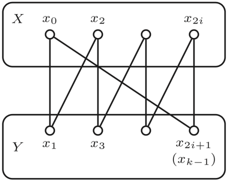
2 部图判定定理

定理

强连通有向图 D 是 2 部图 $\Leftrightarrow$ D 不含奇有向回.

证明.

- $(\Rightarrow)$ 设 D 是 2 部划分为 $\{X, Y\}$ 的 2 部有向图, $C = x_0 a_1 x_1 \cdots x_{k-1} a_k x_0$ 是 D 中长为 k 的有向回.
- 不失一般性, 设 $x_0 \in X$. 因为 D 是 2 部图, 所以 $x_1 \in Y$, $x_2 \in X$, $x_3 \in Y, \cdots$.
- 一般地, $x_{2i} \in X$, $x_{2i+1} \in Y$. 由于 $x_0 \in X$, 所以 $x_{k-1} \in Y$.
- 于是存在 i, 使 $k-1 = 2i+1$, 即 $k = 2i+2$. 因此, C 是有向偶回.



2 部图判定定理

cont.

- $(\Leftarrow)$ 由于 D 不含奇有向回，所以 D 中无环．不妨设 $v \geq 2$.
- 任取 $u \in V(D)$. 令

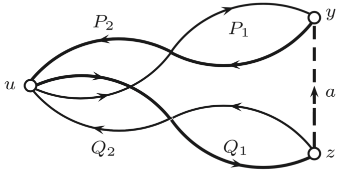
$$X = \{x \in V(D) : d_D(u, x) \equiv 0 (mod 2)\},$$
$$Y = \{y \in V(D) : d_D(u, y) \equiv 1 (mod 2)\}$$

  显然，$u \in X$ 且 $Y \neq \emptyset$, $\{X, Y\}$ 是 $V(D)$ 的划分.
- 下证 $E(D[Y]) = \emptyset$. 若 $|Y| = 1$, 则不证自明.
- 设 $|Y| \geq 2$, $y, z \in Y, y \neq z$.
- 令 P_1 和 Q_1 分别是最短 (u, y) 路和 (u, z) 路，P_2 和 Q_2 分别是最短 (y, u) 路和 (z, u) 路.
- 由 Y 的定义知 P_1 和 Q_1 的长都是奇数.

2 部图判定定理

cont.

- 由于 D 不含奇有向回, 且 $P_1 \oplus P_2$ 和 $Q_1 \oplus Q_2$ 都含 D 中有向回, 所以 P_2 和 Q_2 的长也都是奇数.
- 因此, 若存在 $a \in E(D)$, 使 $a = (z, y)$, 则 $P_2 \oplus Q_1 \oplus a$ 是 D 中奇有向回, 矛盾于假定.
- 同样证明不存在 $b \in E(D)$, 使 $b = (y, z)$. 所以 Y 中任何两顶点都不相邻.
- 同样可证 X 中任何两顶点也不相邻, 因此 D 是 2 部图.



2 部图判定定理

推论

强连通有向图 D 是 2 部图 $\Leftrightarrow$ D 不含奇有向圈.

推论

无向图 G 是 2 部图 $\Leftrightarrow$ G 不含奇圈.

推论

有向图 D 是 2 部图 $\Leftrightarrow$ D 不含奇圈.

谢　　谢！