第二章 随机过程基本知识

主讲人：李　伟
西安电子科技　数学与统计学院
公共邮箱：suijiguocheng2014@126.com
Passwords: suijiguocheng

引言

➢ 随机过程应用广泛

随机过程在自然科学、社会科学以及工程技术的各领域均有应用.

——在我校的一些专业：雷达、通信、无线电技术、自动控制、生物工程、经济管理等领域有着极为广泛的应用.

教材

1.《随机过程-计算与应用》冯海林 薄立军 西安电子科技大学出版社 2012

参考教材

1.《随机过程》张卓奎 陈慧婵 西安电子科技大学出版社 2003

2.《随机过程与应用》田铮 秦超英 科学出版社 2007

3.《随机过程》毛用才 胡奇英 西安电子科技大学出版社 1998

4.《随机过程理论》 周荫清 电子工业出版社 第二版 2006

5.《 An introduction to stochastic processes 》

Edward P.C. kao Thomson 2003

随机过程的起源

1931年，柯尔莫果洛夫(Kolmogorov)《概率论的解析方法》

1934年，辛钦(Khintchine)《平稳过程的相关理论》

奠定了马尔可夫过程与平稳过程理论

1953年，杜布(Doob)《随机过程论》

《随机过程》的奠基人

随机过程的研究背景

- 生活和工作中的随机过程：

  银行排队：队列长度、等候时间

  internet：流量、响应时间、延迟

  股票交易：行情、盈亏

- 教材中的举例：

  电话呼叫的次数随时间的变化

  液面上微粒的扩散

  振荡器输出的随机相位正弦波过程

特点：不确定性；不能用一个确定性的函数来描述，不能用确定性函数的 分析方法

引言

课程的教学内容

- 随机过程的基本知识
- 布朗运动（维纳过程）
- 跳跃随机过程（泊松过程）
- 平稳过程
- 离散时间马尔可夫链

引言

- 作业与考试

作业：每章均有一定量的作业，每章结束后交本章作业

考试：闭卷考试

第二章——随机过程基本知识

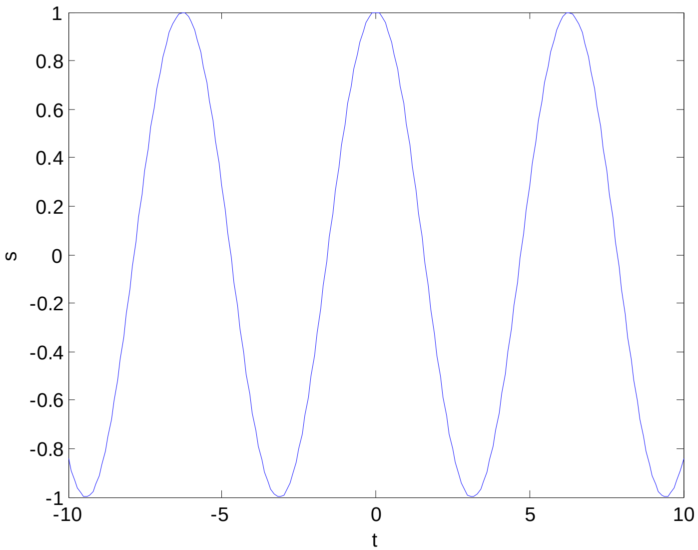
- 教学内容

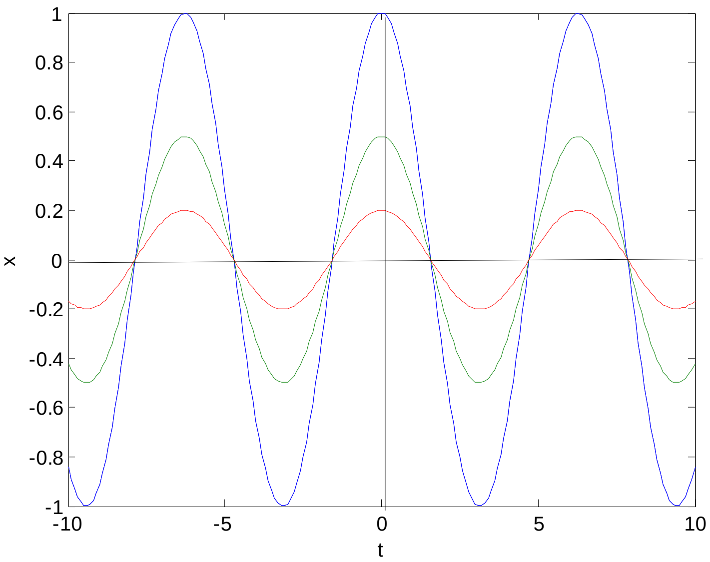
- 随机过程的定义
- 随机过程的分类与举例
- 有限维分布函数族
- 数字特征

第一节：1） 随机过程的定义及分类

2）有限维分布函数族

随机过程引例





正弦信号：s(t)=cos(wt), w为常数；

随机信号：x(t)=Acos(wt), t∈R, A 是均匀分布于[0,1]之间的随机变量

- 正弦信号 s(t) =cos(wt)，w 为常数;
- X(t) = Acos(wt), (- ∞<t<∞) , A 是均匀分布于[0，1]之间的随机变量。

$$X(0) = A$$

$$X(t,\xi_1) = \cos(t) \qquad X(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}A$$

$$X(t,\xi_2) = \frac{1}{2}\cos(t) \qquad X(3\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}A$$

$$X(t,\xi_3) = \frac{1}{3}\cos(t) \qquad X(\pi) = -A$$

$$X(\pi/2) = 0$$

- 随机过程在任意一个给定时刻的取值是一个随机变量。
- 随机过程在任意一组给定时刻的取值是一组随机变量。

随机过程定义

设(Ω, F, P)为一概率空间, T和S为参数集, T, S ∈ R,

若对每一 t ∈T, 均有定义在(Ω, F, P)上的一个取值为S的随机变量X(ω,t),(ω∈Ω)与之对应, 则称随机变量族X(ω, t)为(Ω, F, P)上的一个随机过程 (S.P.),

记{X(ω,t), ω∈Ω, t∈T}, 简记{X(t),t∈T},或X(t) 或$X_t(\omega)$。

S——随机过程{X(t),t∈T} 的状态空间.
T——随机过程{X(t),t∈T} 的时间指标集合
X(t)——样本轨迹（样本函数），固定 $\omega \in \Omega$

随机过程引例

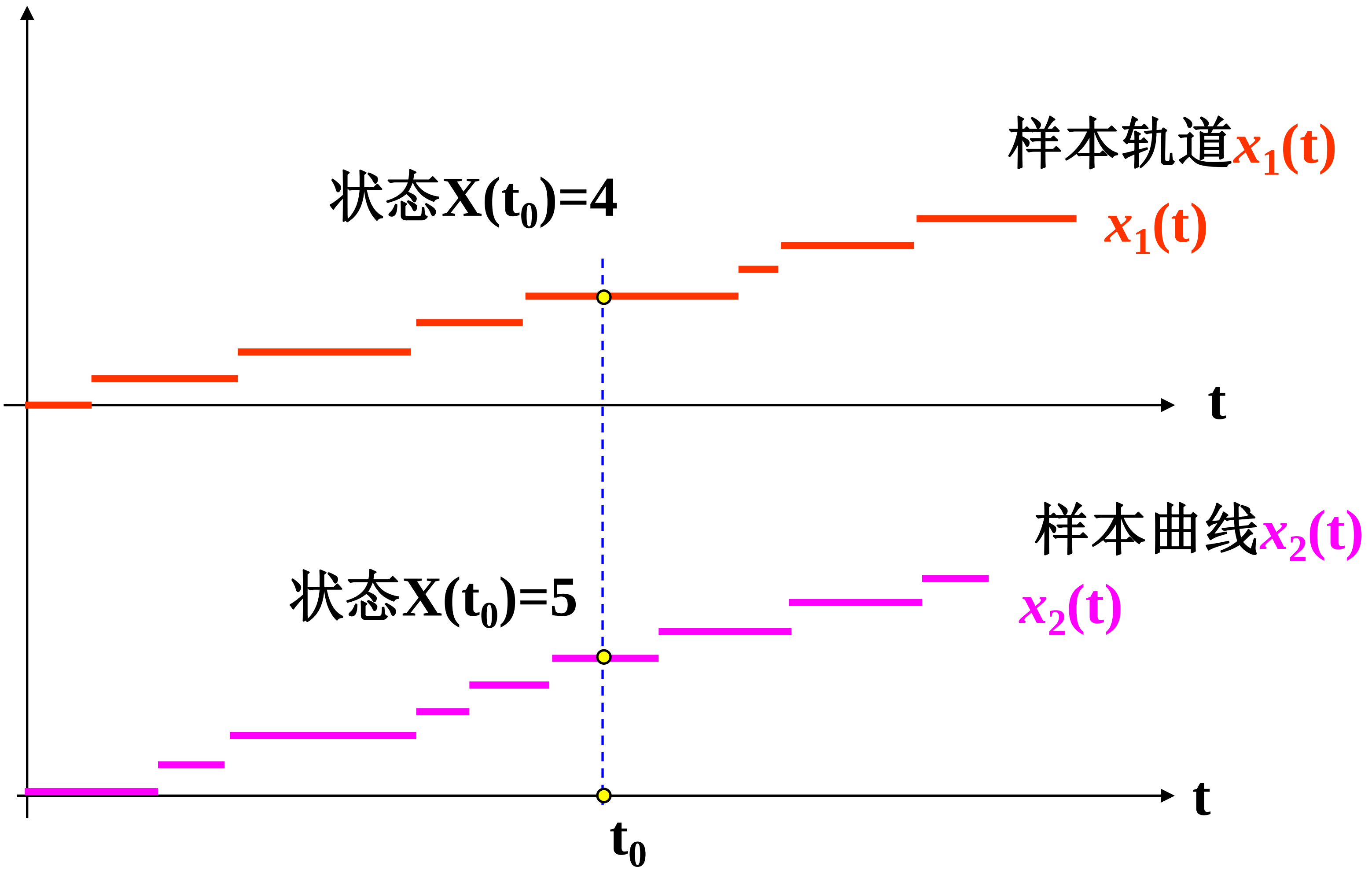
例1. 考察 $[0，t_0]$时间内某网站收到的访问次数 $X(t_0)$，则 $X(t_0)$是一个随机变量.

问题：如果要考察长时间内该网站的访问情况，该如何做？

则需要让t 变化起来，即t趋于无穷大，则 $X(t)$是一族随机变量.

此时 $X(t)$ 是与时间有关系的随机变量，称 $\{X(t), t\in [0,\infty)\}$是随机过程.

X(t) 例1的样本曲线与状态（网站的访问次数）



状态空间$S=\{0,1,2,\ldots.\}$， $T=[0,+\infty)$

随机过程引例

例 2．具有随机初位相的简谐波

$$X(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$

其中A　ω为常数，φ 服从[0, 2π]上的均匀分布.

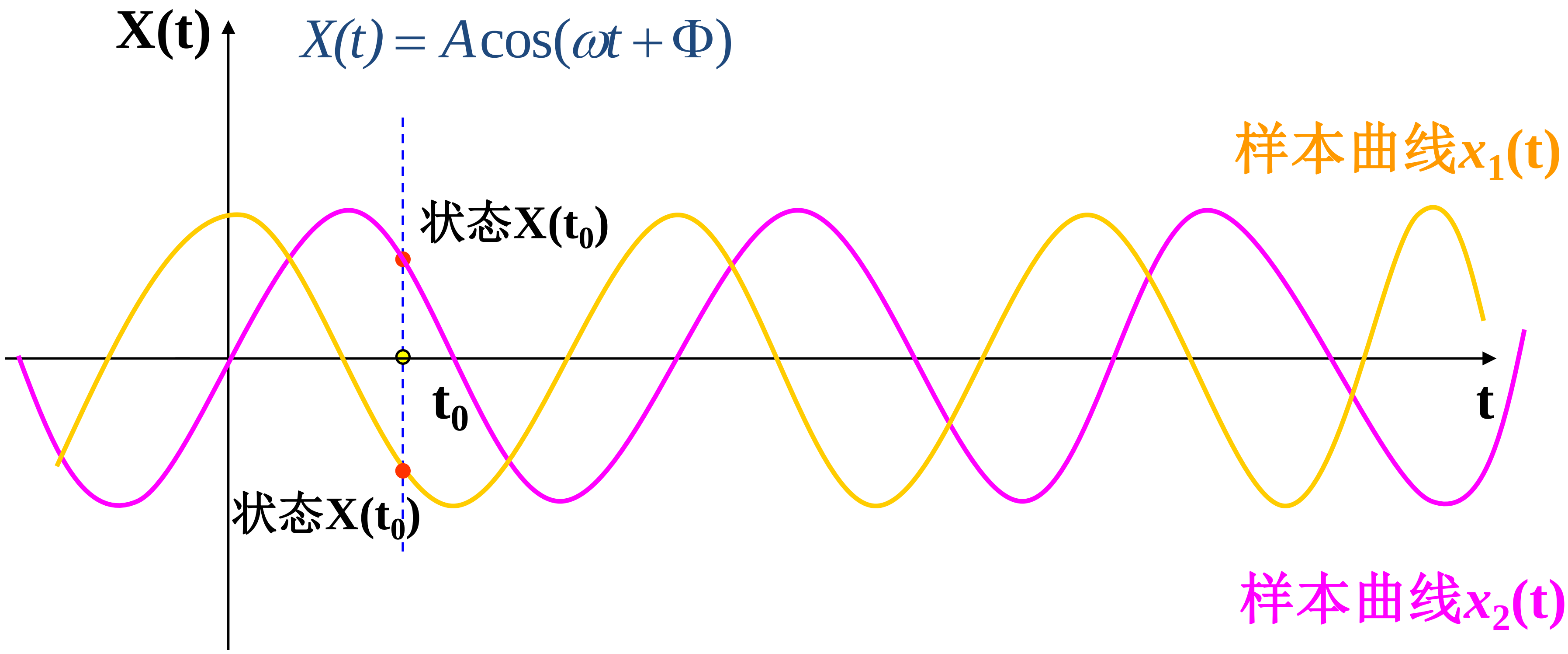
由于初位相的随机性，在某时刻t＝t_0，X (t_0)是一个随机变量.

问题：若要了解该谐波的波形与规律，该如何观察？在哪里观察？

若要观察任一时刻t的波形，则需要用一族随机变量X (t)描述.

则称｛X (t)，t∈[0，+∞)｝为随机过程.

例2 的样本曲线与状态（具有随机初相位的简谐波）



状态空间S=[-A,A]，参数集T=[-∞,+ ∞]

例 3 .生物群体的增长问题.

以 X_t表示在时刻t某种生物群体的个数, 则对每一个固定的t, X_t是一个随机变量.

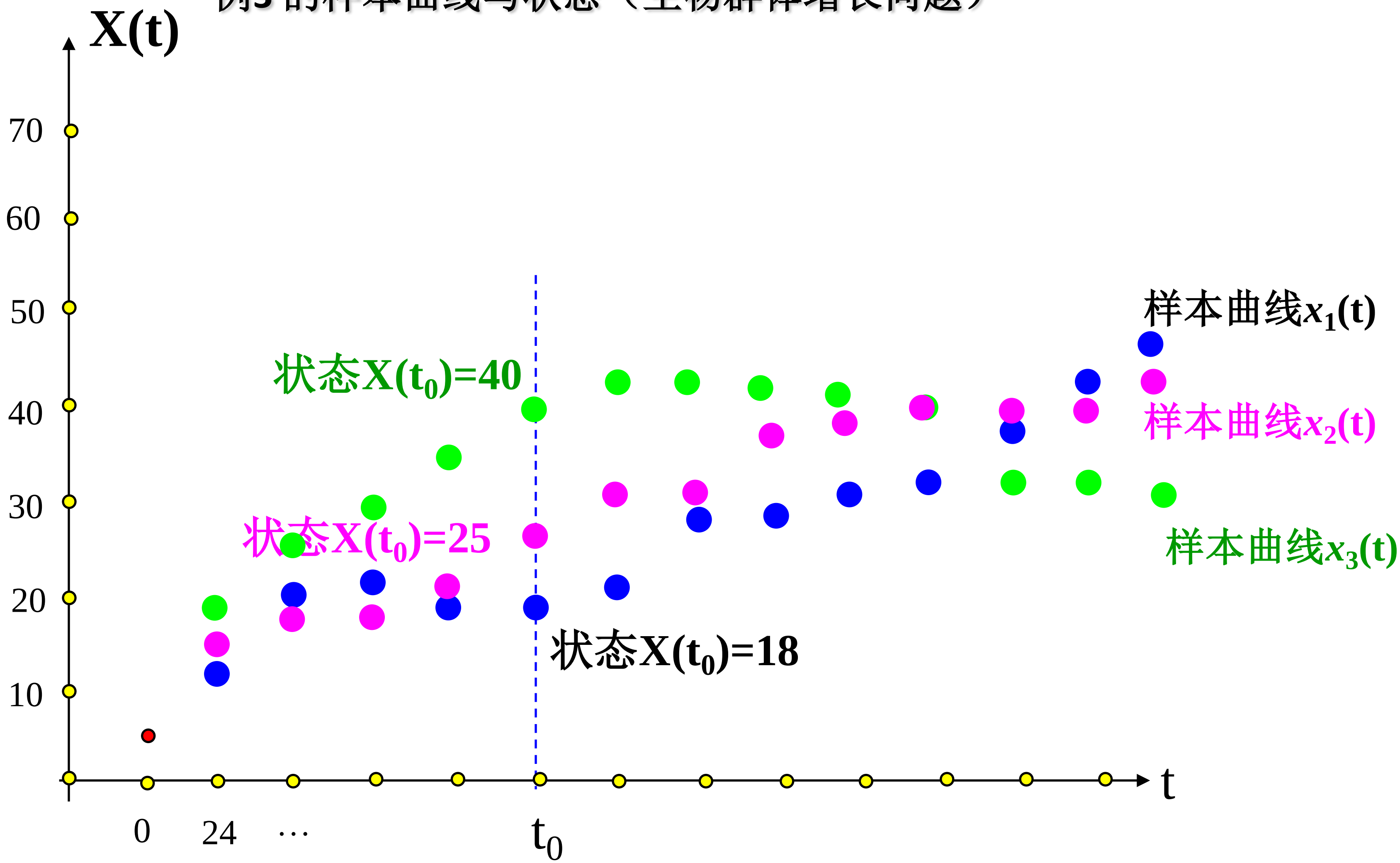
问题：要了解其生长规律，需怎么做？

如果从t＝0 开始每隔24小时对群体的个数观察一次，则对每一个t，X_t是一族随机变量.

则称$\{X_t, t=0, 24, 48, \ldots\}$是随机过程.

也记为X_n，$n=0$， 1， ....

例3 的样本曲线与状态（生物群体增长问题）



S={0,1,2,....},   T=[0,24,......)

随机过程引例

例4. 在天气预报中, 以X_t表示某地区第t次统计所得到的最高气温,则X_t是一个随机变量.

为了预报该地区未来的气温,要让t趋于无穷大,则可得到一族随机变量: X_t , $t=0,1,2,\dots,$

称$\{X_t, t=0,1,2,\dots\}$是随机过程.

以上4个例子的共同特点是:
对某参数集中的任意一个参数t, 就有一个随机变量X(t)与之对应.

随机过程定义

t称为参数, 一般表示时间或空间.

时间指标集合通常有以下形式:

(1) $T=\{0,1,2,\ldots\}$或 $T=\{\ldots-2,-1,0,1,2,\ldots\}$

(2) $T=[a,b]$,其中a 可以为$-\infty$, b可以为$+\infty$.

(3) $T=N$

当时间指标集合为形式(1)时，随机过程$X(t)$也称为随机序列

问题：怎样理解随机过程？它与函数及随机变量有何不同？

- 随机过程将普通函数的概念从实数与实数的对应关系推广到实数与随机变量的对应关系；
- 随机过程将随机变量概念从ω与实数对应推广到ω与实函数的对应；
- 随机过程是一族随机变量，又是一族样本函数；

随机过程定义的进一步解释：

1. $X(\omega\ \ t)$ 的两个特点：随机性与函数性. 因此，$X(\omega, t)$, 实质上为定义在$T\times\Omega$上的二元单值函数.

2. 对每一个固定的t, X_t 为一随机变量.随机变$X_t(t\in T)$ 所有可能取值的集合,称为随机过程$X(\omega,t)$ 的状态空间,记为S. S中的元素称为状态.

3. 对每一个$\omega_0\in\Omega$,$X(\omega_0,t)$是定义在T上的普通函数. 记为 $x(\omega_0,t)$, 称为随机过程的一个样本函数. 或样本轨道.
样本函数的图形称为样本曲线.

基本定义

设$\mathbf{X}=\{\mathbf{X_t}(\boldsymbol{\omega}):\mathbf{t}\in\mathbf{T}\}$ 定义在概率空间(Ω，F，P)上取实值的随机过程，若对任意的$\mathbf{t}\in\mathbf{T}$，

1）： $\mathbf{p}(\mathbf{lim}_{\mathbf{s}\to\mathbf{t}}|\mathbf{X_s}-\mathbf{X_t}|=\mathbf{0})=\mathbf{1}$成立，称$\mathbf{X_t}(\boldsymbol{\omega})$样本轨道连续；

2） 若对任意的$\boldsymbol{\varepsilon}>0$，$\mathbf{lim}_{\mathbf{s}\to\mathbf{t}}\,\mathbf{p}(|\mathbf{X_s}-\mathbf{X_t}|\geq\boldsymbol{\varepsilon})=\mathbf{0}$，称$\mathbf{X_t}(\boldsymbol{\omega})$依概率连续；

3）若$\mathbf{lim}_{\mathbf{s}\to\mathbf{t}}\,\mathbf{E}\left(|\mathbf{X_s}-\mathbf{X_t}|^2\right)=\mathbf{0}$，称$\mathbf{X_t}(\boldsymbol{\omega})$均方连续，记为$\mathbf{L}^2$-连续；

4）若$\mathbf{t}\in\mathbf{N}$，$\mathbf{lim}_{\mathbf{n}\to\infty}\,\mathbf{E}\left(|\mathbf{X_n}-\boldsymbol{\xi}|^2\right)=\mathbf{0}$，则称$\{\mathbf{X_n},\mathbf{n}=\mathbf{1},\mathbf{2},\cdots\}$均方收敛到$\boldsymbol{\xi}$；

例 1： 设$\zeta(\omega)$和$\eta(\omega)$是定义在同一概率空间上的两个随机变量，定义随机过程$X = \{X_t(\omega): t \geq 0\}$为：

$$X_t(\omega) = \zeta(\omega) + t\,\eta(\omega)$$

则可以验证

$$\lim_{s\to t}|X_s(\omega) - X_t(\omega)| = \lim_{s\to t}|(s-t)\eta(\omega)| = 0$$

故随机过程$X_t(\omega)$样本轨道连续

例 2.设随机过程$X(t) = V\cos\omega t$ ，$t\in(-\infty,+\infty)$,其中 ω 为常数,V 服从[0,1]上的均匀分布.

(1)确定$\{X(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$的两个样本函数.

(2)求 $t=0,t=3\pi/4\omega$ 时,随机变量的概率密度函数.

(3)求 $t=\pi/2\omega$ 时 $X(t)$ 的分布函数.

解：1）取 V=1/2, 1/3 分别得到两个样本函数

$X_1(t) = \frac{1}{2}\cos\omega t$, $\quad X_2(t) = \frac{1}{3}\cos\omega t$

(2) $t=0$时，$X(t)=V\cos\omega 0=V$, 而V为$[0,1]$上均匀分布，则

$$f_{X(0)}(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$t=\dfrac{3\pi}{4\omega}$时，$X(t)=V\cos\omega\dfrac{3\pi}{4\omega}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}V$

由于函数$x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}V$的反函数为$V=h(x)=-\sqrt{2}x$,

其导数为$h'(x)=-\sqrt{2}$,则利用公式

$$f_{X(\frac{3\pi}{4\omega})}(x)=\begin{cases} f_V(h(x))\left|h'(x)\right| & 0\le h(x)\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \sqrt{2} & 0\le -\sqrt{2}x\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\le x\le 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(3)

$$t=\frac{\pi}{2\omega}\text{时，}\ X(t)=V\cos\omega\frac{\pi}{2\omega}=0,$$

此时$X(\frac{\pi}{2\omega})$是单点分布,则

$$F_{X(\frac{\pi}{2\omega})}(x)=P\{X(\frac{\pi}{2\omega})\le x\}$$

$$=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

随机过程的分类

根据时间指标集合T与状态空间S离散与否, 随机过程可分为

1. 离散时间+离散状态的随机过程 (生物群体增长问题)

2. 离散时间+连续状态的随机过程 (天气预报)

3. 连续时间+离散状态的随机过程 (网站访问人数)

4. 连续时间+连续状态的随机过程 (随机相位波)

伯努利过程——离散时间+离散状态
严高斯过程——离散时间+连续状态
泊松过程 ——连续时间+离散状态
正态过程 ——连续时间+连续状态

二 随机过程的有限维分布函数族

设$\{X(t), t\in T\}$是定义在概率空间上的随机过程

1.一维分布函数

对任意固定的$t\in T$, $X(t)$为一维随机变量.
称其分布函数

$$F(t\,;x)=P(X(t)\le x),\quad x\in R$$

为随机过程$\{X(t), t\in T\}$的一维分布函数.

2. 二维分布函数

对任意固定的$t_1, t_2 \in T$, $X(t_1)$,$X(t_2)$为两个随机变量. 称其联合分布函数

$$F(t_1,t_2; x_1, x_2)=P(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2),$$

$$x_1, x_2 \in R$$

为随机过程$\{X(t), t \in T\}$的二维分布函数.

3. n维分布函数

对任意固定的$t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$, $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$为n个随机变量. 称其联合分布函数

$$F(t_1, t_2, \ldots, t_n; x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= P(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2 \ldots X(t_n) \le x_n)$$

$$x_1\ x_2, \ldots, x_n \in R$$

为随机过程$\{X(t), t \in T\}$的n维分布函数.

4.有限维分布函数族

称随机过程$\{X(t), t\in T\}$的一维分布函数, 二维分布函数, ⋯, n维分布函数, ⋯, 的全体 为随机过程的有限维分布函数族.

$$F=\left\{F_{t_1,t_2,\cdots t_n}\left(x_1, x_2, \cdots x_n\right): \forall t_1, t_2, \cdots t_n \in T, x_1, x_2, \cdots x_n \in R, n \in N\right\}$$

注: 有限维分布函数族能够描述随机过程的统计特性. 另一个工具是有限维特征函数族。

有限维分布函数族的性质

对称性

设$i_1,i_2,\cdots,i_n$是$1,2,\cdots,n$的任意一个排列，则

$$F(t_{i_1},t_{i_2},\cdots,t_{i_n};x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n})$$

$$=F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

相容性

设 $m<n$，则

$$F(t_1,t_2,\cdots,t_m;x_1,x_2,\cdots,x_m)$$

$$=F(t_1,t_2,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_m,+\infty,\cdots+\infty)$$

定义: (s.p.相互独立) 设$\{X(t), t \in T\}$和$\{Y(t), t \in T\}$是定义在同一概率空间(Ω, F, P)上取实值的两个随机过程，若对任意的自然数$m, n \geq 1$，m+n 个不同的时间指标t_1，t_2，$\cdots t_m$，s_1，s_2，$\cdots s_n \in T$，以及 m+n 个实数x_1，x_2，$\cdots x_m$，y_1，y_2，$\cdots y_n \in R$，若

$$p\left(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \cdots X_{t_m} \leq x_m, Y_{s_1} \leq y_1, Y_{s_2} \leq y_2, \cdots Y_{s_n} \leq y_n\right)$$

$$= F^{X}_{t_1, t_2, \cdots t_m}\left(x_1, x_2, \cdots x_m\right) F^{Y}_{s_1, s_2, \cdots s_n}\left(y_1, y_2, \cdots y_n\right)$$

则称 S. P. X 与 Y 相互独立。

柯尔莫果洛夫（**Kolmogorov**）存在定理

对于给定的参数集 **T** 和具有对称性与相容性的分布函数族

$$\mathbf{F}=\left\{\mathbf{F}_{\mathbf{t_1},\mathbf{t_2},\cdots\mathbf{t_n}}\left(\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2},\ \cdots\mathbf{x_n}\right):\forall\mathbf{t_1},\mathbf{t_2},\cdots\mathbf{t_n}\in\mathbf{T},\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2},\ \cdots\mathbf{x_n}\in\mathbf{R},\mathbf{n}\in\mathbf{N}\right\}$$

一定存在某个随机过程$\{\mathbf{X}(\mathbf{t}),\mathbf{t}\in\mathbf{T}\}$，使得 **F** 恰好是该随机过程的有限分布函数族

例3： 设随机过程 $X(t)=A+Bt$, $t\geq 0$, 其中A, B 是相互独立的随机变量, 且都服从标准正态分布N(0,1). 求该随机过程的一维和二维分布.

解 对任意的$t\geq 0$, $X(t)=A+Bt$, 由题意知$X(t)$是正态分布.

又 $E[X(t)]=0$, $D[X(t)]=1+t^2$

所以$X(t)$的一维分布为$X(t) \sim N(0,1+t^2)$

又对任意的$t_1\geq 0$, $t_2\geq 0$,

$X(t_1)=A+Bt_1 \sim N(0,1+t_1^2)$ $X(t_2)=A+Bt_2 \sim N(0,1+t_2^2)$

即 $$\begin{pmatrix} X(t_1) & X(t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix}$$

由A,B独立知，(A,B)服从二维正态分布

补充定理：正态随机变量的线性变换仍是正态随机变量

所以($X(t_1)$, $X(t_2)$) 也服从二维正态分布

又$Cov(\mathrm{X}(t_1),\mathrm{X}(t_2)) = \mathrm{E}[\mathrm{X}(t_1)\mathrm{X}(t_2)] - \mathrm{E}[\mathrm{X}(t_1)]\mathrm{E}[\mathrm{X}(t_2)]$

$$= \mathrm{E}[(\mathrm{A}+\mathrm{B}t_1)(\mathrm{A}+\mathrm{B}t_2)]$$

$$= 1 + t_1 t_2$$

所以协方差矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} 1+t_1^2 & 1+t_1t_2 \\ 1+t_1t_2 & 1+t_2^2 \end{pmatrix}$$

而($X(t_1)$, $X(t_2)$) 的均值向量为 μ =(0, 0)

所以该S.P.的二维分布为

$$(X(t_1)\quad X(t_2)) \sim N(\mu, M), t_1 \geq 0, t_2 \geq 0$$

例3. 设S.P.$X(t)=A\cos t, t\geq 0$ 其中**A**具有以下概率分布

$$P(A=i)=\frac{1}{3}, i=1,2,3.$$

试求：(1)该S.P.的一维分布函数 $F(\frac{\pi}{4},x), F(\frac{\pi}{2},x)$

(2)该S.P.的二维分布函数 $F(0,\frac{\pi}{3};x_1,x_2)$

解 $(1)\because X(\frac{\pi}{4})=A\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}A,$

分布律为 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$\therefore$ 分布函数为

$$F(\frac{\pi}{4};x)=\begin{cases}0, & x<\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{3}, & \frac{\sqrt{2}}{2}\le x<\sqrt{2}\\ \frac{2}{3}, & \sqrt{2}\le x<\frac{3}{2}\sqrt{2}\\ 1, & x\ge\frac{3}{2}\sqrt{2}\end{cases}$$

（2）$F(0,\frac{\pi}{3};x_1,x_2)=P(X(0)\le x_1,X(\frac{\pi}{3})\le x_2)$

$$=P(A\le x_1,\frac{A}{2}\le x_2)$$

$$=P(A\le x_1,A\le 2x_2)$$

$$=\begin{cases} P(A\le x_1) & x_1\le 2x_2 \\ P(A\le 2x_2) & x_1>2x_2 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, & x_1<1 \\ \frac{1}{3}, & 1\le x_1<2 \\ \frac{2}{3}, & 2\le x_1<3 \\ 1, & x_1\ge 3 \end{cases} \quad (x_1\le 2x_2) \text{ 或 } \begin{matrix} 2x_2<1 \\ 1\le 2x_2<2 \\ 2\le 2x_2<3 \\ 2x_2\ge 3 \end{matrix} \quad (x_1>2x_2)$$

例4. 利用重复掷硬币的试验定义一个随机过程

$$X(t)=\begin{cases}\cos\pi t, & \text{出现正面}\\ 2t, & \text{出现反面}\end{cases}\qquad 0\le t<+\infty$$

出现正面与反面的概率相等.

(1) 求X(t)的一维分布函数F(1/2; x), F(1; x).

(2) 求**X(t)** 的二维分布函数**F(1/2,1;** x_1,x_2**).**

例5. 利用掷一次硬币的试验定义一个随机过程

随机过程可推广到

- 多维随机过程

定义 设$\{X_t,t\in T\}$和$\{Y_t,t\in T\}$是定义 在同一概率空间 (Ω,F,P)上的两个实随机过程.

则称$\{X_t,Y_t, t\in T\}$是二维随机过程.

- 复随机过程

定义 设$\{X_t,t\in T\}$和$\{Y_t,t\in T\}$是定义在同一概率空间 (Ω,F,P)上的两个实随机过程.令

$$Z_t= X_t+jY_t \qquad t\in T$$

则称$\{Z_t, t\in T\}$是复随机过程.