习题 1

第一节 ◇

1. 设在全体实数 $\boldsymbol{R}$ 上，定义两个二元映射 $\rho(x,y)=(x-y)^2$ 和 $d(x,y)=\sqrt{|x-y|}$，证明 (1) $(\boldsymbol{R},\rho)$ 不是度量空间；(2) $(\boldsymbol{R},d)$ 是度量空间.

2. 设 (X,ρ) 为度量空间， $f:[0,+\infty]\to[0,+\infty]$ 为严格单调函数，且满足 $\forall x,y\in[0,+\infty], f(0)=0$, $f(x+y)\le f(x)+f(y)$，令 $d(x,y)=f(\rho(x,y))$，证明 (X,d) 为度量空间.

3. 设 (X,d) 为度量空间，证明 $\forall x,y,z,w\in X$ 有 $|d(x,z)-d(y,w)|\le d(x,y)+d(z,w)$.

4. 设全体实数列组成的集合为 $X=\{(x_1,x_2,x_3,....x_n,...)|x_i\in R, i=1,2,...\}$ ，对于 $x=(x_1,x_2,x_3,....x_n,...)$ 及 $y=(y_1,y_2,...y_n,...)\in X$，定义 $d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}$. 证明 (X,d) 为度量空间.

5. 设 $X(n)$ 为 0 和 1 组成的 n 维有序数组，例如 $X(3)=\{000,001,010,011,100,101,110,111\}$，对于任意的 $x,y\in X(n)$，定义 $d(x,y)$ 为 x 和 y 中取值不同的个数，例如在 $X(3)$ 中，$d(110,111)=1$，$d(010,010)=0$ $d(010,101)=3$. 证明 $(X(n),d)$ 为度量空间.

第二节 ◇◇

6. 设 (X,d) 为度量空间， $A\subset X$ 且 $A\ne\phi$. 证明 A 是开集当且仅当 A 为开球的并.

7. 设 (X,d) 和 (Y,ρ) 是两个度量空间. 那么映射 $f:X\to Y$ 是连续映射当且仅当 Y 的任意闭子集 F 的原象 $f^{-1}(F)$ 是 X 中的闭集.

8. 设 (X,d) 为度量空间， $A\subseteq X$ 且 $A\ne\phi$. 证明 (1) $\{x\,|\,x\in X, d(x,A)<\varepsilon\}$ 是 X 的开集. (2) $\{x\,|\,x\in X, d(x,A)\le\varepsilon\}$ 是 X 的闭集，其中 $\varepsilon>0$.

9. 设 $B[a,b]$ 为定义在 $[a,b]$ 上的所有有界函数，若 $x(t),y(t)\in B[a,b]$ ，定义 $d_\infty(x,y)=\sup_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|$，求证 d_∞ 为 $B[a,b]$ 的度量及 $C[a,b]$ 为 $B[a,b]$ 的闭集.

10. 设 (X,d) 为度量空间， $A\subset X$ 且 $A\ne\phi$，定义 $d(x,A)=\inf_{y\in A}\{d(x,y)\}$. 证明 $\forall x,y\in X$ 有 $|d(x,A)-d(y,A)|\le d(x,y)$.

11. 证明在 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中点列收敛等价于按坐标收敛：设点列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\boldsymbol{R}^n$ ，其中 $x_i=(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\cdots,x_n^{(i)})$ ，及 $x_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ ，那么 $\lim_{i\to\infty}x_i=x_0$ 等价于 $\forall j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 有

$\lim_{i\to\infty} x_j^{(i)} = x_j^{(0)}$.

第三节 ◇◇◇

12. 设$\{x_n\}$与$\{y_n\}$是度量空间(X,d)的两个 Cauchy 列．证明$a_n = d(x_n, y_n)$是收敛列．

13. 设 (X,d) 和 (Y,ρ) 是两个度量空间，在 $X\times Y$ 上定义度量 $\gamma((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \{[d(x_1,x_2)]^p + [d(y_1,y_2)]^p\}^{\frac{1}{p}}$，其中$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$， $p\ge 1$为正数．证明$X\times Y$是完备空间当且仅当(X,d)和(Y,ρ)均是完备空间．

14. 设(X,d)是完备的度量空间，$\{G_n\}$ $x_1\in G_1$是 X 中的一列稠密的开子集，证明$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ 也是 X 中的稠密子集．

15. 设(X,d)为度(X,d)量空间，令$\rho(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$，证明$(X,d)$为完备度量空间当且仅当$(X,\rho)$为完备度量空间．

16. 设$x,y,z\in \boldsymbol{Z}^+$，定义$d(x,y) = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right|$，证明$d$为$\boldsymbol{Z}^+$上的度量，$(\boldsymbol{Z}^+,d)$不是完备度量空间，其中$\boldsymbol{Z}^+$表示正整数集．

17. 设(X,d)为完备的度量空间，点列$\{x_n\}\subset X$，如果$\forall\varepsilon>0$，存在 X 的一个基本列$\{y_n\}$，使得$d(x_n,y_n)<\varepsilon$． 证明$\{x_n\}$收敛．

18. 设X,Y均为度量空间，$f: X\to Y$为连续映射，若A是X的稠密子集，则$f(A)$是$f(X)$的稠密子集．

19. 设(X,d)是一度量空间，那么X是完备的当且仅当对于X中的任何一套闭球：$B_1\supset B_2\supset\cdots\supset B_n\supset\cdots$，其中$B_n = \bar{O}(x_n,\delta_n)$，当半径$\delta_n\to 0(n\to\infty)$，必存在唯一的点$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

20. 设(X,d)是一完备的度量空间，则X中非空子集F作为子空间是完备的充要条件是F为X的闭集．

21. p次幂可和的数列空间l^p是完备的度量空间．(距离的定义：$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$)

22. 证明有界数列空间l^∞是完备的度量空间．(距离的定义： $d_p(x,y) = \sup_i |x_i - y_i|$)

第四节 ◇◇◇◇

23. 设$A\subset \boldsymbol{R}^n$，证明$A$是列紧集当且仅当$A$是有界集．

24. 设(x,d)为度量空间，$A\subset X$且$A\ne\phi$．若A为紧集，则存在$x_0,y_0\in A$使得$diam(A) = d(x_0,y_0)$． 其中$diam(A) = \sup_{x,y\in A}\{d(x,y)\}$.

25. 设(X,d)为为紧的度量空间，$\{A_n\}$为X的一列非空闭子集，且

$$A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots\supset A_n\supset A_{n+1}\supset\cdots$$

——西安电子科技大学数学与统计学院杨有龙教授 ylyang@mail.xidian.edu.cn

证明$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \phi$.

26. 设(X,d)为完备的度量空间，映射　设(X,d)，(Y,ρ)为两个度量空间，$f:X\to Y$为单射，证明f是连续映射的充要条件是f把X中的任一紧集映成Y中的紧集.

27. 设F_1,F_2都是度量空间(X,d)中的紧集，则必存在$x_0\in F_1, y_0\in F_2$，使得$d(x_0,y_0)=d(F_1,F_2)$，其中$d(F_1,F_2)=\inf\{d(x,y)\,|\,x\in F_1, y\in F_2\}$称为$F_1$与$F_2$的距离.

28.设F_1,F_2是度量空间(X,d)中的两个子集，其中F_1是紧集，F_2是闭集，若$d(F_1,F_2)=0$则必存在$x_0\in F_1\bigcap F_2$.

第五节 ◇◇◇◇◇

29. 设(X,d)为完备的度量空间，映射$A:X\to X$满足：$\forall x,y\in X$且$x\neq y$有

$$d(Ax,Ay)<d(x,y)$$

若知A有不动点，那么此不动点是唯一的.

30. 设M是$(\boldsymbol{R}^n,d)$中的有界闭子集，$\forall x,y\in M$且$x\neq y$，映射$A:M\to M$满足$d(Ax,Ay)<d(x,y)$，证明A在M中存在唯一的不动点.