《随机过程-计算与应用》部分答案

Dean

适合双面打印

更新中···

2012.12

第二章　随机过程基本知识

1. 设 $Y=\{Y_t:t\geq 0\}$ 是一个复合泊松过程, 即它可写为

$$Y_t=\sum_{k=1}^{N_t}\xi_k,\quad Y_0=0$$

其中 $N=\{N_t:t\geq 0\}$ 是参数为 λ 的泊松过程且与独立同分布的随机变量序列 $\xi_1,\ldots,\xi_n,\ldots$ 相互独立. 假设 $\mu=\mathbb{E}\xi_1,\sigma^2=D(\xi_1)$ 都有限, 计算复合泊松过程 Y 的相关函数 $R_Y(s,t)$ 和协方差函数 $C_Y(s,t)$.

解 首先求均值函数 $m_Y(t)$ 和方差函数 $D_Y(t)$. 注意到

$$\begin{aligned}
m_Y(t)&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N_t}\xi_k\middle|N_t=n\right]\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(\xi_k)\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}=\lambda\mu t,\\
\mathbb{E}(Y_t^2)&=\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{N_t}\xi_k\right)^2\middle|N_t\right]\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)^2\middle|N_t=n\right]\mathbb{P}\{N_t=n\}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_i\xi_j\right]\mathbb{P}\{N_t=n\}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i,j=1}^{n}\mathbb{E}(\xi_i\xi_j)\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\xi_i^2)+\sum_{i\neq j}^{n}\mathbb{E}(\xi_i\xi_j)\right)\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[n(\mu^2+\sigma^2)+(n^2-n)\mu^2\right]\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\\
&=\sigma^2\lambda t+\mu^2\left[(\lambda t)^2+\lambda t\right].
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
m_Y(t)&=\lambda\mu t,\\
D_Y(t)&=\mathbb{E}\left(Y_t^2\right)-m_Y(t)^2=\lambda(\sigma^2+\mu^2)t.
\end{aligned}$$

再求相关函数和协方差函数. 可以证明 Y 为平稳独立增量过程, 于是

$$\begin{aligned}
R_Y(s,t)&=\mathbb{E}[Y_s(Y_t-Y_s+Y_s)]\overset{s\leq t}{=}\mathbb{E}(Y_s^2)+\mathbb{E}Y_s\mathbb{E}(Y_t-Y_s)\\
&=D_Y(s)+m_Y(s)^2+m_Y(s)m_Y(t-s)=\lambda(\sigma^2+\mu^2)s+\lambda^2s^2\mu^2+\lambda s\mu\lambda(t-s)\mu\\
&=\lambda(\sigma^2+\mu^2)s+\lambda^2\mu^2st.
\end{aligned}$$

故一般地

$$R_Y(s,t)=\lambda(\sigma^2+\mu^2)(s\wedge t)+\lambda^2\mu^2st.$$

进一步

$$C_Y(s,t)=R_Y(s,t)-m_Y(s)m_Y(t)=\lambda(\sigma^2+\mu^2)(s\wedge t).\qquad\square$$

2. 设 $W=\{W_t:t\geq 0\}$ 是标准布朗运动. 任取常数 $\mu\in\mathbb{R},\sigma>0$, 定义

$$Y_t=\mu t+\sigma W_t,\quad t\geq 0.$$

称 $Y=\{Y_t:t\geq 0\}$ 为 (μ,σ^2)-布朗运动. 证明它是高斯过程, 并写出向量 $(Y_{t_1},\ldots,Y_{t_n})$ 的均值和协方差阵, 其中 $0<t_1<\cdots<t_n<\infty$.

解 首先说明标准布朗运动 W 为高斯过程. $\forall\, 0\leq s_0<s_1<\cdots<s_n<\infty$, 因

$$(W_{s_1},\ldots,W_{s_n})=(W_{s_1}-W_0,W_{s_2}-W_{s_1},\ldots,W_{s_n}-W_{s_{n-1}})\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\0&1&1&\cdots&1&1\\0&0&1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1\\0&0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix},$$

由布朗运动定义及正态向量的仿射变换性质 (P.14) 得 W 为高斯过程. 其次证明 Y 为高斯过程. 因

$$(Y_{s_1},\ldots,Y_{s_n})=\sigma(W_{s_1},\ldots,W_{s_n})+(\mu s_1,\ldots,\mu s_n),$$

故再次用正态向量的仿射变换性质知 Y 为高斯过程. 显然

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_{t_1},\ldots,Y_{t_n})&=(\mathbb{E}Y_{t_1},\ldots,\mathbb{E}Y_{t_n})=(t_1\mu,\ldots,t_n\mu),\\ \mathrm{Cov}(Y_{t_i},Y_{t_j})&=\sigma^2\mathbb{E}(W_{t_i}W_{t_j})=\sigma^2(t_i\wedge t_j),\end{aligned}$$

故协方差阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$, 其中 $c_{ij}=\sigma^2(t_i\wedge t_j)$, 或写成

$$\boldsymbol{C}=\sigma^2\begin{pmatrix}t_1&t_1&t_1&\cdots&t_1&t_1\\t_1&t_2&t_2&\cdots&t_2&t_2\\t_1&t_2&t_3&\cdots&t_3&t_3\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\t_1&t_2&t_3&\cdots&t_{n-1}&t_{n-1}\\t_1&t_2&t_3&\cdots&t_{n-1}&t_n\end{pmatrix}.\qquad\square$$

5. 设 ξ 和 η 是两个相互独立的随机变量, 其中 ξ 的概率密度函数

$$f_\xi(x)=2x^3\mathrm{e}^{-x^4/2}1_{(0,\infty)}(x),$$

$\eta\sim U[0,2\pi]$. 证明随机过程

$$X_t:=\xi^2\cos(2\pi t+\eta),\quad t\geq 0$$

是一个正态过程, 并计算其均值函数和协方差函数.

解 因

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathbb{P}\{\xi^2 \le x\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\sqrt{x}} 2t^3 \mathrm{e}^{-t^4/2}\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^{-x^2/2}, \quad x > 0,$$

故 ξ^2 服从参数为 $\sigma^2 = 1$ 的 Rayleigh 分布 (P.31). 令 $X_1 = \xi^2\cos\eta, X_2 = \xi^2\sin\eta$, 则

$$X_t = (X_1, X_2)(\cos(2\pi t), -\sin(2\pi t))^T.$$

由 例 2.2.5 知 (X_1, X_2) 服从二维正态分布, 从而 X_t 服从正态分布. 进一步对任何不同时间指标 $t_1, \ldots, t_n \in [0, \infty)$

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) = (X_1, X_2)\begin{pmatrix} \cos(2\pi t_1) & \cos(2\pi t_2) & \cdots & \cos(2\pi t_n) \\ -\sin(2\pi t_1) & -\sin(2\pi t_2) & \cdots & -\sin(2\pi t_n) \end{pmatrix},$$

从而 $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ 服从 n 维正态分布, 这就证明了 X 为正态过程.

另外易求

$$\mathbb{E}\cos(2\pi t + \eta) = \int_0^{2\pi} \cos(2\pi t + u)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}u = 0,$$

$$\mathbb{E}[\cos(2\pi s + \eta)\cos(2\pi t + \eta)] = \int_0^{2\pi} \cos(2\pi s + u)\cos(2\pi t + u)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cos[2\pi(t-s)],$$

$$\mathbb{E}(\xi^4) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f_\xi(x)\mathrm{d}x = 2.$$

因此 $\forall\, s, t \in [0, \infty)$, 由独立性立得

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \mathbb{E}[\xi^2\cos(2\pi t + \eta)] = \mathbb{E}(\xi^2)\mathbb{E}\cos(2\pi t + \eta) = 0, \\ R_X(s,t) &= \mathbb{E}(\xi^4)\mathbb{E}[\cos(2\pi s + \eta)\cos(2\pi t + \eta)] = 2\cdot\frac{1}{2}\cos[2\pi(t-s)] = \cos[2\pi(t-s)], \\ C_X(s,t) &= R_X(s,t) - m_X(s)m_X(t) = \cos[2\pi(t-s)]. \qquad \square \end{aligned}$$

6. 计算标准布朗运动 W 的二维分布函数及其概率密度函数.

解 $\forall\, 0 \le s < t$, 显然 (X_s, X_t) 服从二维正态分布, 其均值向量为 $\boldsymbol{\mu} = (0,0)$, 协方差阵为

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} s & s \\ s & t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}^{-1} = \frac{1}{st - s^2}\begin{pmatrix} t & -s \\ -s & s \end{pmatrix}.$$

故概率密度函数 (P.14) 为

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2)) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\boldsymbol{C}|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^T\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{st - s^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(st - s^2)}(x_1, x_2)\begin{pmatrix} t & -s \\ -s & s \end{pmatrix}(x_1, x_2)^T\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{st - s^2}}\exp\left\{-\frac{x_1^2 t + x_2^2 s - 2x_1x_2 s}{2(st - s^2)}\right\}, \end{aligned}$$

从而分布函数为

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2. \qquad \square$$

9. 设 $N=\{N_t:t\geq 0\}$ 是一个参数为 $\lambda>0$ 的泊松过程. 对固定常数 $l>0$ 定义新过程

$$Z_t^{(l)}=N_{t+l}-N_t, \quad t\geq 0.$$

计算 $Z^{(l)}=\{Z_t^{(l)}:t\geq 0\}$ 的均值函数 $m_{Z^{(l)}}$ 和相关函数 $R_{Z^{(l)}}(s,t)$ 及互相关函数 $R_{N,Z^{(l)}}(s,t)$.

解 首先求泊松过程的相关函数. 不妨设 $s<t$, 由其独立增量性及泊松分布的结论有

$$R_N(s,t)=\mathbb{E}[(N_t-N_s+N_s)N_s]=\mathbb{E}N_s\mathbb{E}(N_t-N_s)+\mathbb{E}(N_s^2)=\lambda s\lambda(t-s)+\lambda s+(\lambda s)^2=\lambda s+\lambda^2 st.$$

故一般地

$$R_N(s,t)=\lambda(s\wedge t)+\lambda^2 st.$$

再求 $Z^{(l)}$ 的均值函数与相关函数. 显然

$$\begin{aligned}
m_Z(t)&=\mathbb{E}(N_{t+l}-N_t)=\lambda(t+l)-\lambda t=\lambda l;\\
R_{N,Z^{(l)}}(s,t)&=\mathbb{E}[N_s(N_{t+l}-N_t)]=R_N(s,t+l)-R_N(s,t)\\
&=\lambda^2 s(t+l)+\lambda[s\wedge(t+l)]-[\lambda^2 st+\lambda(s\wedge t)]=\lambda^2 sl+\lambda[s\wedge(t+l)-s\wedge t];\\
R_{Z^{(l)}}(s,t)&=\mathbb{E}[N_{s+l}N_{t+l}-N_tN_{s+l}-N_sN_{t+l}+N_sN_t]\\
&=R_N(s+l,t+l)-R_N(t,s+l)-R_N(s,t+l)+R_N(s,t)\\
&=\lambda^2 l^2+\lambda[(s+l)\wedge(t+l)-t\wedge(s+l)-s\wedge(t+l)+s\wedge t]. \qquad \square
\end{aligned}$$

第三章　布朗运动

1. 验证布朗运动 W 的对称性, 自相似性和时间逆转性.

证 任取 $0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n < \infty$ 及 $t \ge 0$.

(1) 对称性　即证 $-W$ 也是标准布朗运动.

i) **(零初值)** 显然 $-W_0 = -0 = 0$.

ii) **(平稳独立增量)** $-W$ 的增量序列为

$$-(W_{t_1} - W_{t_0}), -(W_{t_2} - W_{t_1}), \ldots, -(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}).$$

因 $W_{t_k} - W_{t_{k-1}} \sim N(0, t_k - t_{k-1})$, 故立得 $-(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \sim N(0, t_k - t_{k-1})$, 即 $-W$ 满足增量平稳性. 又 $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ 相互独立, 故 $-(W_{t_1} - W_{t_0}), -(W_{t_2} - W_{t_1}), \ldots, -(W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$ 也显然相互独立, 从而说明 $-W$ 也满足增量的独立性.

iii) **(一维正态)** 显然 $-W_t \sim N(0, t)$.

综上可知, $-W$ 为标准布朗运动.

(2) 自相似性　即证 $\forall\, t, a > 0$, 有 $W_{at} \overset{\mathrm{d}}{=} \sqrt{a} W_t$.

因 $W_{at} \sim N(0, at)$, 而由正态分布的性质知 $\sqrt{a} W_t \sim N(0, at)$, 故 $W_{at} \overset{\mathrm{d}}{=} \sqrt{a} W_t$.

(3) 时间逆转性　即证对固定的 $T > 0$, 过程 $B = \{B_t = W_T - W_{T-t} : 0 \le t \le T\}$ 是标准布朗运动.

i) **(零初值)** 显然 $B_0 = W_T - W_T = 0$.

ii) **(平稳独立增量)** $B_{t_k} - B_{t_{k-1}} = W_{T-t_{k-1}} - W_{T-t_k}, k = 1, \ldots, n, t_n \le T$, 故 B 的增量序列为

$$W_{T-t_0} - W_{T-t_1}, W_{T-t_1} - W_{T-t_2}, \ldots, W_{T-t_{n-1}} - W_{T-t_n}.$$

显然 $0 \le T - t_n < T - t_{n-1} < \cdots < T - t_1 < T - t_0 \le T$, 故类似 (1) 中 ii) 的讨论很容易得到 B 的独立增量性.

iii) **(一维正态)** 由 W 的定义 $W_T - W_{T-t} \sim N(0, t)$, 即 $B_t \sim N(0, t)$.

综上可知, B 为标准布朗运动.

2. 计算布朗运动 W 的 m 阶矩 $\mathbb{E}(W_t^m)$, 其中 $t > 0$, 而 m 为正整数.

解 设 W 的初值 $W_0 = x$, 因 $W_t \sim N(x,t)$, 由 P.13 立得

$$\mu_k := \mathbb{E}[(W_t - x)^k] = \begin{cases} (k-1)!!t^{k/2}, & k \text{ 为偶数;} \\ 0, & k \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(W_t^m) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{m} C_m^k x^{m-k}(W_t - x)^k\right] = \sum_{k=0}^{m} C_m^{m-k} x^{m-k} \mu_k. \qquad \square$$

3. 设 W 是一个标准布朗运动, $\forall\, s < t$, 求

$$\mathbb{E}[W_t^3 - W_s^3 - 3(tW_t - sW_s)]$$

和

$$\mathbb{E}[W_t^4 - W_s^4 - 6(t-s)W_s^2 - 3(t-s)^2].$$

解 由期望的线性性质和上题结论立得两式都为 0. $\square$

6. 设 W 是一个标准布朗运动, 对固定的 $t_0 > 0$, 定义

$$W_t^0 = W_{t+t_0} - W_{t_0}, \quad t \geq 0.$$

证明 $W^0 = \{W_t^0 : t \geq 0\}$ 也为标准布朗运动.

解 分三步

(1) **(零初值)** 因 $W_0^0 = W_{t_0} - W_{t_0} = 0$, 故 W^0 初值为 0.

(2) **(平稳独立增量)** $\forall\, 0 \leq s_0 < s_1 < \cdots < s_n < \infty$, 由 W 增量的平稳性有

$$W_{s_i}^0 - W_{s_{i-1}}^0 = W_{s_i+t_0} - W_{s_{i-1}+t_0} \sim N(0, s_i - s_{i-1}), \quad i = 1, \ldots, n,$$

故 W^0 是平稳增量过程. 由 W 是独立增量过程知增量序列

$$W_{s_1+t_0} - W_{s_0+t_0}, W_{s_2+t_0} - W_{s_1+t_0}, \ldots, W_{s_{n-1}+t_0} - W_{s_{n-2}+t_0}, W_{s_n+t_0} - W_{s_{n-1}+t_0}$$

是相互独立的, 从而

$$W_{s_1}^0 - W_{s_0}^0, W_{s_2}^0 - W_{s_1}^0, \ldots, W_{s_{n-1}}^0 - W_{s_{n-2}}^0, W_{s_n}^0 - W_{s_{n-1}}^0$$

是相互独立的, 即 W^0 满足独立增量性.

(3) **(一维正态)** 因 $W_t^0 = W_{t+t_0} - W_{t_0} \sim N(0,t)$, 即过程 W^0 的一维分布是正态的.

综上知, W^0 为标准布朗运动. □

8. 设 W 是一个标准布朗运动. 证明: $\forall\, t,x>0$ 有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\frac{xt}{t+x^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}} \le \mathbb{P}\{W_t>x\} \le \sqrt{\frac{t}{2\pi}}\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

解 显然

$$\mathbb{P}\{W_t>x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_x^\infty \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2t}}\mathrm{d}y.$$

由分部积分公式

$$\int_x^\infty \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2t}}\mathrm{d}y = \frac{t}{x}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}} - \int_x^\infty \frac{t}{y^2}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2t}}\mathrm{d}y \le \frac{t}{x}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}},$$

及显而易见的不等式

$$\int_x^\infty \frac{t}{y^2}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2t}}\mathrm{d}y \le \frac{t}{x^2}\int_x^\infty \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2t}}\mathrm{d}y,$$

题中不等式立得证. □

第四章　跳跃随机过程

1. 设 N 是参数为 λ 的泊松过程. 设 $0 \le s < t$, 求

$$\mathbb{E}[N_t^3 - N_s^3 - 3\lambda(t-s)N_s^2 - 3\lambda(t-s)(1+\lambda(t-s))N_s].$$

解 若 $X \sim P(\lambda)$, 则 $\mathbb{E}X = D(X) = \lambda, \mathbb{E}(X^2) = \lambda^2 + \lambda$, 且

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^3) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^3 \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{(k-)!}\mathrm{e}^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}[(k-1)(k-2)+3(k-1)+1]\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda.\end{aligned}$$

将上述结论直接应用到代求式中即可轻松求得题中的期望. 下面考虑另一种思路. 由 $\mathbb{E}N_t = \lambda t$, N 的平稳独立增量性以及期望的线性性有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[N_t^3 - N_s^3 - 3\lambda(t-s)N_s^2 - 3\lambda(t-s)(1+\lambda(t-s))N_s] \\ =& \mathbb{E}[N_t^3 - N_s^3 - 3N_s^2\mathbb{E}(N_t - N_s) - 3\mathbb{E}(N_t - N_s)(1+\mathbb{E}(N_t - N_s))N_s] \\ =& \mathbb{E}[N_t^3 - N_s^3 - 3N_s^2(N_t - N_s) - 3(N_t - N_s)(1+(N_t - N_s))N_s] \\ =& \mathbb{E}[(N_t - N_s)^3] = \lambda^3(t-s)^3 + 3\lambda^2(t-s)^2 + \lambda(t-s). \qquad \square\end{aligned}$$

2. 设 ξ_i 服从参数为 λ_i 的指数分布 $(i = 1,2)$. 若 ξ_1, ξ_2 相互独立, 求

(1) $\mathbb{P}\{\xi_1 < \xi_2\}$.

(2) $\max(\xi_1, \xi_2)$ 的分布函数.

解 (1)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\xi_1 < \xi_2\} &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{x < \xi_2, \xi_1 \in \mathrm{d}x\} = \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{x < \xi_2\}\lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\infty} \lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\mathrm{d}x \int_x^{\infty} \lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 y}\mathrm{d}y = \int_0^{\infty} \lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x - \lambda_2 x}\mathrm{d}x = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.\end{aligned}$$

或者用联合概率密度, 显然 (ξ_1, ξ_2) 的联合概率密度为各自边缘 (边际) 概率密度之积, 于是

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\xi_1 < \xi_2\} &= \iint\limits_{0<x<y} \lambda_1\lambda_2 \mathrm{e}^{-(\lambda_1 x + \lambda_2 y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\infty} \mathrm{d}x \int_x^{\infty} \lambda_1\lambda_2 \mathrm{e}^{-(\lambda_1 x + \lambda_2 y)}\mathrm{d}y = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.\end{aligned}$$

(2) $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\xi_1 \wedge \xi_2 \le x\} &= 1 - \mathbb{P}\{\xi_1 > x, \xi_2 > x\} \\ &= 1 - \mathbb{P}\{\xi_1 > x\}\mathbb{P}\{\xi_2 > x\} \\ &= \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\mathrm{e}^{-\lambda_2 x} = 1 - \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}, & x > 0; \\ 1 - 1 \times 1 = 0, & x \le 0. \end{cases}\end{aligned} \qquad \square$$

3. 假设顾客到达银行的过程是参数为 λ 的泊松过程. 在第一小时内有两个顾客到达银行, 求

(a) 这两顾客都在前 20 分钟到达的概率.

(b) 至少有一个顾客在前 20 分钟到达的概率.

解 设乘客依次到达银行的时间为 $T_1, T_2, \ldots$.

(a) 依题意要求

$$\mathbb{P}\{T_1 < 20/60, T_2 < 20/60 | N_1 = 2\}.$$

下面用不同办法求解.

解法一: 显然 $\{T_2 \le t\} = \{N_t \ge 2\}$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\{T_1 < 20/60, T_2 < 20/60 | N_1 = 2\} \\ =& \frac{\mathbb{P}\{T_2 \le 1/3, N_1 = 2\}}{\mathbb{P}\{N_1 = 2\}} = \frac{\mathbb{P}\{N_{1/3} \ge 2, N_1 = 2\}}{\mathbb{P}\{N_1 = 2\}} \\ =& \frac{\mathbb{P}\{N_{1/3} = 2, N_1 = 2\}}{\mathbb{P}\{N_1 = 2\}} = \frac{\mathbb{P}\{N_{1/3} = 2, N_1 - N_{1/3} = 0\}}{\mathbb{P}\{N_1 = 2\}} = \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

解法二: 由泊松过程的性质知, 给定 $N_1 = 2$ 之下, (T_1, T_2) 的条件联合概率密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2!}{1^2} = 2, & 0 < x < y \le 1; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{T_1 < 1/3, T_2 < 1/3 | N_{1/3} = 2\} &= \iint\limits_{x<1/3, y<1/3} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\substack{0<x<y \\ x<1/3, y<1/3}} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{1/3} \mathrm{d}x \int_x^{1/3} 2\mathrm{d}y = \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

解法三: 所求概率即为

$$\mathbb{P}\{N(20)=2|N(60)=2\}=\frac{\mathbb{P}\{N(20)=2,N(60)-N(20)=0\}}{\mathbb{P}\{N(60)=2\}}=\frac{1}{9}.$$

(b) 依题意所求概率为

$$1-\mathbb{P}\{T_1>1/3,T_2>1/3|N_1=2\}=1-\mathbb{P}\{T_1>1/3|N_1=2\}=\mathbb{P}\{T_1\le 1/3|N_1=2\}.$$

解法一: 显然 $\{T_1\le 1/3\}=\{N_{1/3}\ge 1\}$, 从而

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{T_1\le 1/3|N_1=2\}==&\frac{\mathbb{P}\{N_{1/3}\ge 1,N_1=2\}}{\mathbb{P}\{N_1=2\}}\\ =&\frac{\mathbb{P}\{N_{1/3}=1,N_1=2\}+\mathbb{P}\{N_{1/3}=2,N_1=2\}}{\mathbb{P}\{N_1=2\}}=\frac{5}{9}.\end{aligned}$$

解法二: 由泊松过程的性质知, 给定 $N_1=2$ 之下, (T_1,T_2) 的条件联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2!}{1^2}=2, & 0<x<y\le 1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{T_1\le 1/3|N_1=2\}=&\mathbb{P}\{T_1\le 1/3,T_1<T_2|N_1=2\}\\ =&\iint\limits_{x<1/3,x<y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{1/3}\mathrm{d}x\int_x^1 2\mathrm{d}y=\frac{5}{9}.\end{aligned}$$

解法三: 显然 $\{T_1>20\}=\{N(20)=0\}$, 于是

$$\begin{aligned}1-\mathbb{P}\{T_1>20|N(60)=2\}=&1-\mathbb{P}\{N(20)=0|N(60)=2\}\\ =&1-\frac{\mathbb{P}\{N(20)=0,N(60)-N(20)=2\}}{\mathbb{P}\{N(60)=2\}}=\frac{5}{9}.\quad\square\end{aligned}$$

4. 设 N 是一个参数为 λ 的泊松过程, 任取实数 $0=t_0\le t_1<t_2<\cdots<t_n$ 及自然数 $m_1,m_2,\ldots,m_n$, 证明

$$\mathbb{P}\{N_{t_1}=m_1,\ldots,N_{t_n}=m_n\}=\begin{cases}\frac{\alpha_1^{m_1}\mathrm{e}^{-\alpha_1}}{m_1!}\cdots\frac{\alpha_n^{m_n}\mathrm{e}^{-\alpha_n}}{m_n!}, & 0\le m_1\le\cdots\le m_n;\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

其中 $\alpha_k=\lambda(t_k-t_{k-1}),k=1,\ldots,n.$

解 显然

$$\begin{aligned}&\{N_{t_1}=m_1,N_{t_2}=m_2,\ldots,N_{t_{n-1}}=m_{n-1},N_{t_n}=m_n\}\\=&\{N_{t_1}=m_1,N_{t_2}-N_{t_1}=m_2-m_1,\ldots,N_{t_{n-1}}-N_{t_{n-2}}=m_{n-1}-m_{n-2},N_{t_n}-N_{t_{n-1}}=m_n-m_{n-1}\}.\end{aligned}$$

于是由泊松过程的平稳独立增量性立得结论. □

5. 设 W 是一个标准布朗运动, N 是一个参数为 λ 的泊松过程, $\{\xi_1,\ldots,\xi_n,\ldots\}$ 是一列独立同分布的随机变量, 假设这三个过程还是相互独立的. 定义过程

$$X_t=\exp\left\{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W_t\right\}\prod_{k=1}^{N_t}\xi_k,\quad t\geq 0,$$

其中 $\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0,\xi_1$ 服从参数为 (a,b^2) 的对数正态分布. 求

(1) 随机过程 $X=\{X_t:t\geq 0\}$ 的一维分布函数.

(2) 过程 X 的均值函数 $m_X(t)$ 和相关函数 $R_X(s,t)$.

(3) 设 $r,K,T>0$, 求

$$\mathrm{e}^{-rT}\mathbb{E}[\max(0,X_T-K)].$$

解 若 $\eta\sim N(\mu,\sigma^2)$, 由对数正态分布的性质 (P.15) $\mathbb{E}\exp\{\eta\}=\exp\{\mu+\sigma^2/2\}$. 显然 $\ln\xi_1\sim N(a,b^2)$, 于是 $\forall\, n$, 由独立性和正态分布的性质有

$$(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma W_t+\sum_{k=1}^{n}\ln\xi_k\sim N(\mu_n,\sigma_n^2),$$

其中 $\mu_n:=na+(\mu-\sigma^2/2)t,\sigma_n^2:=\sigma^2t+nb^2$, 从而

$$\exp\{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma W_t+\sum_{k=1}^{n}\ln\xi_k\}\text{ 服从参数为 }(\mu_n,\sigma_n^2)\text{ 的对数正态分布},$$

其概率密度函数为 (P.15)

$$f_n(t;y)=\frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\exp\left\{-\frac{(\ln y-\mu_n)^2}{2\sigma_n^2}\right\}1_{(0,\infty)}(y).$$

(1) $\forall\, t \geq 0, x \in \mathbb{R}$, 显然

$$
\begin{aligned}
x \leq 0, \quad & F(t;x) = \mathbb{P}\{X_t \leq x\} = 0; \\
x > 0, \quad & F(t;x) = \mathbb{P}\{\exp\{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} \ln \xi_k\} \leq x\} \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{\exp\{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{n} \ln \xi_k\} \leq x | N_t = n\} \mathbb{P}\{N_t = n\} \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda t} \int_0^x f_n(t;y)\mathrm{d}y = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda t} f_n(t;y)\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

或

$$
\begin{aligned}
x > 0, \quad & F(t;x) = \mathbb{P}\{\exp\{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} \ln \xi_k\} \leq x\} \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{\exp\{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{n} \ln \xi_k\} \leq x | N_t = n\} \mathbb{P}\{N_t = n\} \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left\{ \frac{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} \ln \xi_k - \mu_n}{\sigma_n} \leq \frac{\ln x - \mu_n}{\sigma_n} \right\} \mathbb{P}\{N_t = n\} \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi((\ln x - \mu_n)/\sigma_n) \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda t},
\end{aligned}
$$

其中 Φ 为标准正态分布的分布函数.

(2) 注意到

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\prod_{k=0}^{N_t} \xi_k\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{N_t} \ln \xi_k} | N_t = n\right) \mathbb{P}\{N_t = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{n} \ln \xi_k} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda t} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{na + \frac{nb^2}{2}} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathrm{e}^{\lambda t(\mathrm{e}^{a+b^2/2} - 1)}; \\
\mathbb{E}\left[\left(\prod_{k=0}^{N_t} \xi_k\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{2\sum_{k=1}^{N_t} \ln \xi_k}\right) = \mathrm{e}^{\lambda t(\mathrm{e}^{2a+2b^2} - 1)}; \\
\mathbb{E}\left(\prod_{k=0}^{N_s} \xi_k \prod_{k=0}^{N_t} \xi_k\right) &\overset{s<t}{=} \mathbb{E}\left[\left(\prod_{k=1}^{N_s} \xi_k\right)^2 \prod_{k=N_s+1}^{N_t} \xi_k\right] = \mathbb{E}\left[\left(\prod_{k=1}^{N_s} \xi_k\right)^2\right] \mathbb{E}\left(\prod_{k=N_s+1}^{N_t} \xi_k\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{2\sum_{k=1}^{N_t} \ln \xi_k}\right) \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{2\sum_{k=1}^{N_t - N_s} \ln \xi_k}\right) = \mathrm{e}^{\lambda s\left(\mathrm{e}^{2a+2b^2} - 1\right)} \mathrm{e}^{\lambda(t-s)\left(\mathrm{e}^{a+b^2/2} - 1\right)} \\
&= \mathrm{e}^{\lambda s\left(\mathrm{e}^{2a+2b^2} - 1\right) + \lambda(t-s)\left(\mathrm{e}^{a+b^2/2} - 1\right)} \overset{\text{一般地}}{=} \mathrm{e}^{\lambda(s\wedge t)\left(\mathrm{e}^{2a+2b^2} - 1\right) + \lambda|t-s|\left(\mathrm{e}^{a+b^2/2} - 1\right)}.
\end{aligned}
$$

而 $\forall\, s,t\in[0,\infty), W_s+W_t\sim N(0,2(s\wedge t)+s+t)$, 故由独立性知

$$m_X(t)=\mathbb{E}\exp\{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma W_t\}\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{N_t}\xi_k\right)=\exp\left\{\mu t+\lambda t\left(\mathrm{e}^{a+b^2/2}-1\right)\right\};$$

$$\begin{aligned}R_X(s,t)&=\mathbb{E}\left(\exp\{(\mu-\sigma^2/2)(s+t)+\sigma(W_s+W_t)\}\prod_{k=1}^{N_t}\xi_k\prod_{k=1}^{N_s}\xi_k\right)\\&=\mathbb{E}\exp\{(\mu-\sigma^2/2)(s+t)+\sigma(W_s+W_t)\}\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{N_t}\xi_k\prod_{k=1}^{N_s}\xi_k\right)\\&=\mathrm{e}^{(\mu-\sigma^2/2)(s+t)+(s+t+2(s\wedge t))\sigma^2/2}\mathrm{e}^{\lambda(s\wedge t)\left(\mathrm{e}^{2a+2b^2}-1\right)+\lambda|t-s|\left(\mathrm{e}^{a+b^2/2}-1\right)}\\&=\exp\left\{\mu(s+t)+\sigma^2(s\wedge t)+\lambda(s\wedge t)\left(\mathrm{e}^{2a+2b^2}-1\right)+\lambda|t-s|\left(\mathrm{e}^{a+b^2/2}-1\right)\right\}.\end{aligned}$$

(3) 修改下记号, 令 $\mu_n=na+(\mu-\sigma^2/2)T,\sigma_n^2=\sigma^2T+nb^2$ 由 (1)

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-rT}\mathbb{E}\max\{0,X_T-K\}=\mathrm{e}^{-rT}\mathbb{E}[(X_T-K)1_{[K,\infty)}(X_T)]\\&=\mathrm{e}^{-(r+\lambda)T}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda T)^n}{n!}\int_K^{\infty}(x-K)f_n(T;x)\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}^{-(r+\lambda)T}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda T)^n}{n!}\left[\int_K^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x-\mu_n)^2}{2\sigma_n^2}}\mathrm{d}x-\int_K^{\infty}\frac{K}{x\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x-\mu_n)^2}{2\sigma_n^2}}\mathrm{d}x\right],\end{aligned}$$

从而问题得解. 若想更进一步, 可如下计算

$$\begin{aligned}\int_K^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x-\mu_n)^2}{2\sigma_n^2}}\mathrm{d}x&=\int_{\frac{\ln K-\mu_n}{\sigma_n}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-y^2/2+\mu_n+\sigma_n y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{\mu_n+\sigma_n^2/2}\int_{\frac{\ln K-\mu_n}{\sigma_n}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(y-\sigma_n)^2/2}\mathrm{d}y\\&=\mathrm{e}^{\mu_n+\sigma_n^2/2}\int_{\frac{\ln K-(\mu_n+\sigma_n)}{\sigma_n}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}^{\mu_n+\sigma_n^2/2}\left[1-\Phi\left(\frac{\ln K-(\mu_n+\sigma_n)}{\sigma_n}\right)\right].\end{aligned}$$

类似地,

$$\int_K^{\infty}\frac{K}{y\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln y-\mu_n)^2}{2\sigma_n^2}}\mathrm{d}y=K\left[1-\Phi\left(\frac{\ln K-\mu_n}{\sigma_n}\right)\right].$$

因此

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-rT}\mathbb{E}\max\{0,X_T-K\}\\&=\mathrm{e}^{-(r+\lambda)T}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda T)^n}{n!}\left\{\mathrm{e}^{\mu_n+\sigma_n^2/2}\left[1-\Phi\left(\frac{\ln K-(\mu_n+\sigma_n)}{\sigma_n}\right)\right]-K\left[1-\Phi\left(\frac{\ln K-\mu_n}{\sigma_n}\right)\right]\right\}.\square\end{aligned}$$

9. 设 N 是一个参数为 λ 的泊松过程. 求

(1) N 的二维分布函数 $F_2(1,2;x_1,x_2)$.

(2) N 的三维分布函数 $F_3(1,2,3;x_1,x_2,x_3)$.

解 令 $\lfloor x\rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数.

(1) 由随机过程有限维分布函数的定义

$$
\begin{aligned}
x_1<0 \text{ 或 } x_2<0 \text{ 时},\quad F_2(1,2;x_1,x_2) &= \mathbb{P}\{N_1\le x_1, N_2\le x_2\}=0;\\
x_1,x_2\ge 0 \text{ 时},\quad F_2(1,2;x_1,x_2) &= \mathbb{P}\{N_1\le x_1, N_2\le x_2\}=\mathbb{P}\{N_1\le x_1, N_2-N_1+N_1\le x_2\}\\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty}\mathbb{P}\{m\le x_1, m+n\le x_2\}\mathbb{P}\{N_1=m, N_2-N_1=n\}\\
&= \sum_{\substack{m\le x_1\\ m+n\le x_2}}\frac{\lambda^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\sum_{m=0}^{\lfloor x_1\rfloor}\sum_{n=0}^{\lfloor x_2\rfloor-m}\frac{\lambda^{m+n}}{m!n!}\mathrm{e}^{-2\lambda}.
\end{aligned}
$$

于是

$$
F_2(1,2,3;x_1,x_2)=\begin{cases}\sum_{m=0}^{\lfloor x_1\rfloor}\sum_{n=0}^{\lfloor x_2\rfloor-m}\frac{\lambda^{m+n}}{m!n!}\mathrm{e}^{-2\lambda}, & x_1,x_2\ge 0;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}
$$

(2) 类似地 $x_1,x_2,x_3\ge 0$ 时

$$
\begin{aligned}
&F_3(1,2,3;x_1,x_2,x_3)\\
&=\mathbb{P}\{N_1\le x_1, N_2-N_1+N_1\le x_2, N_3-N_2+N_2-N_1+N_1\le x_3\}\\
&=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\mathbb{P}\{m\le x_1, m+n\le x_2, m+n+p\le x_3\}\mathbb{P}\{N_1=m, N_2-N_1=n, N_3-N_2=p\}\\
&=\sum_{\substack{m\le x_1\\ m+n\le x_2\\ m+n+p\le x_3}}\frac{\lambda^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^p}{p!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\sum_{m=0}^{\lfloor x_1\rfloor}\sum_{n=0}^{\lfloor x_2\rfloor-m}\sum_{p=0}^{\lfloor x_3\rfloor-m-n}\frac{\lambda^{m+n+p}}{m!n!p!}\mathrm{e}^{-3\lambda}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
F_3(1,2,3;x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}\sum_{m=0}^{\lfloor x_1\rfloor}\sum_{n=0}^{\lfloor x_2\rfloor-m}\sum_{p=0}^{\lfloor x_3\rfloor-m-n}\frac{\lambda^{m+n+p}}{m!n!p!}\mathrm{e}^{-3\lambda}, & x_1,x_2,x_3\ge 0;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}
$$

□

第五章　平稳过程

1. 设 $X=\{X_n:n=1,2,\ldots\}$ 是一离散时间随机过程, $X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$ 独立同分布且都服从 $N(0,\sigma^2)(\sigma^2>0)$ 分布, 则称 X 为严格高斯白噪声. 试证 X 为严格平稳过程.

证 任取自然数 $k_1<k_2<\cdots<k_n$ 和整数 τ 使得 $1\le k_1+\tau<k_2+\tau<\cdots<k_n+\tau$, 由独立性及正态分布的性质知 $(X_{k_1},X_{k_2},\ldots,X_{k_n})$ 和 $(X_{k_1+\tau},X_{k_2+\tau},\ldots,X_{k_n+\tau})$ 都是 n 维正态随机向量. 而对任意自然数 m,n

$$\mathbb{E}X_n=0,\quad \mathrm{Cov}(X_m,X_n)=\begin{cases}\sigma^2, & m=n;\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$$

故 $(X_{k_1},X_{k_2},\ldots,X_{k_n})$ 和 $(X_{k_1+\tau},X_{k_2+\tau},\ldots,X_{k_n+\tau})$ 具有相同的期望向量和协方差阵, 从而它们服从相同的正态分布, 即

$$(X_{k_1},X_{k_2},\ldots,X_{k_n})\overset{\mathrm{d}}{=}(X_{k_1+\tau},X_{k_2+\tau},\ldots,X_{k_n+\tau}),$$

因此 X 为严格平稳过程. □

14. 设 $X_t=s(t+\Theta)$, 其中 $s(t)$ 是周期为 T_0 的函数且在一个周期内平方可积, Θ 是 $[0,T_0]$ 上的均匀分布随机变量, 称 $X=\{X_t:t\in(-\infty,\infty)\}$ 为周期的随机初相过程. 试讨论 X 是否为各态历经过程.

解 因

$$\begin{aligned}m_X(t)&=\mathbb{E}X_t=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}s(t+\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}s(\theta)\mathrm{d}\theta,\\ R_X(t,t+\tau)&=\mathbb{E}(X_tX_{t+\tau})=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}s(t+\theta)s(t+\tau+\theta)\mathrm{d}\theta\\ &=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}s(\theta)s(\tau+\theta)\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

故 X 为平稳过程. 令 $\lfloor x\rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数. 由时间平均的定义及 s 的周期性有

$$\begin{aligned}\langle X_t\rangle&=\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}s(t+\Theta)\mathrm{d}t\\ &=\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\left[\int_{-T}^{-T+T_0}s(t+\Theta)\mathrm{d}t+\int_{-T+T_0}^{-T+2T_0}s(t+\Theta)\mathrm{d}t+\cdots\right.\\ &\qquad\left.+\int_{-T+(\lfloor 2T/T_0\rfloor-1)T_0}^{-T+\lfloor 2T/T_0\rfloor T_0}s(t+\Theta)\mathrm{d}t+\int_{-T+\lfloor 2T/T_0\rfloor T_0}^{T}s(t+\Theta)\mathrm{d}t\right]\\ &=\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\left[\int_0^{T_0}s(t+\Theta)\mathrm{d}t+\int_0^{T_0}s(t+\Theta)\mathrm{d}t+\cdots+\int_0^{T_0}s(t+\Theta)\mathrm{d}t\right]\\ &=\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{\lfloor 2T/T_0\rfloor}{2T}\int_0^{T_0}s(t+\Theta)\mathrm{d}t=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}s(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

即时间平均是非随机的且仅与 T_0 有关. 同理

$$\begin{aligned}\langle X_t X_{t+\tau}\rangle &= \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s(t+\Theta)s(t+\tau+\Theta)\mathrm{d}t \\ &= \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{\lfloor 2T/T_0\rfloor}{2T}\int_0^{T_0} s(t+\Theta)s(t+\tau+\Theta)\mathrm{d}t = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} s(t)s(t+\tau)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

即时间相关函数也是非随机的且仅与 T_0,τ 有关. 因此显然有

$$\mathbb{P}\{m_X(t)=\langle X_t\rangle\}=1,\quad \mathbb{P}\{R_X(t,t+\tau)=\langle X_t X_{t+\tau}\rangle\}=1,$$

即 X 的均值和相关函数都具有各态历经性, 亦即 X 具有各态历经性. □

第六章　离散时间马尔可夫链

4. 设一质点在圆周上作随机游动, 圆周上共有 N 格, 质点每一时刻以概率 p 顺时针游动一格或以概率 $q=1-p$ 逆时针游动一格. 令 X_n 表示质点在 n 时刻所在的位置. 试说明 $X=\{X_n:n=0,1,2,\ldots\}$ 是齐次马尔可夫链, 写出其状态空间并计算一步转移概率矩阵.

解 不妨假设圆周上 N 个格点按顺时针依此标号为 $1,2,\ldots,N$, 显然过程 X 的状态空间可表示为 $S=\{1,2,\ldots,N\}$. 由题设, 若质点在时刻 n 时的位置为 $k\in S$, 则 $n+1$ 时刻的位置 j 只能为 $k+1\in S$ (若 $k=N$, 规定 $k+1:=1$) 或 $k-1\in S$ (若 $k=1$, 规定 $k-1:=N$), 而与该质点在时刻 n 的状态位置是没有关系的, 同时这种转移情况与时间 n 没关系而仅与 n 时刻所处的位置 k 有关系, 即 $\forall\, n=0,1,2,\ldots,\forall\, j_0,\ldots,j_{n-1}\in S,\forall\, k\in S$

$$\mathbb{P}\{X_{n+1}=j|X_n=k,X_{n-1}=j_{n-1},\ldots,X_1=j_1,X_0=j_0\}=\begin{cases}p, & j=k+1;\\ q, & j=k-1.\end{cases}$$

从而

$$\mathbb{P}\{X_{n+1}=j|X_n=k,X_{n-1}=j_{n-1},\ldots,X_1=j_1,X_0=j_0\}=\mathbb{P}\{X_{n+1}=j|X_n=k\}=\mathbb{P}\{X_1=j|X_0=k\},$$

即 X 满足马尔可夫性及时间齐次性, 从而为齐次马氏链. X 的一步转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix}0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & q\\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p\\ p & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & 0\end{pmatrix}. \qquad \square$$

注: 上题中的概率矩阵主对角线元素全为零, 紧邻主对角线的两条“辅对角线”上元素分别全为 p 和 q, 而矩阵的最右上角元素为 q, 最左下角元素为 p, 其余元素全为零.