随机过程：第四章

薄立军

理学院数学系概率与统计教研室

参考书：《随机过程-计算与应用》

内容

1 跳跃随机过程
- 泊松过程基本性质
- 泊松过程跳的 0-1 律
- 复合泊松过程

1. 跳跃随机过程
   - 泊松过程基本性质
   - 泊松过程跳的 0-1 律
   - 复合泊松过程

1. 跳跃随机过程
   - 泊松过程基本性质
   - 泊松过程跳的 0-1 律
   - 复合泊松过程

泊松过程基本性质

- 计数过程 (counting process):

(a). 设 $\{T_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ 是一列非负 r.v.s 且 $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} T_n = +\infty) = 1$ 和 $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_n < \cdots$

(b). 计数过程 $N^c = \{N_t^c : t \geq 0\}$ 定义为

$$N_t^c = \max\{n \in \mathbb{N}^* : T_n \leq t\}, \quad t \geq 0$$

(c). $0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_n < \cdots$ 称为 N^c 的到达时间

(d). $\tau_n = T_n - T_{n-1}$, 其中 $n = 1, 2, \ldots$ 称为 N^c 的到达时间间隔

泊松过程基本性质

- 计数过程的轨道性质:

  (a). $N_0^c = 0$, 状态空间 $S = \mathbb{N}^*$

  (b). 样本轨道 $t \to N_t^c$ 是单调不减、右连续

  (c). $N_{T_n}^c - N_{T_n-}^c = 1, \forall\ n = 1, 2, \ldots.$

  (d). N^c 的另一表示:

$$N_t^c = \sum_{n=0}^{\infty} n \mathbf{1}_{[T_n, T_{n+1})}(t), \quad t \geq 0.$$

泊松过程基本性质

- 计数过程 N^c 与泊松过程的关系:

Theorem

如果 N^c 的到达时间间隔 $\{\tau_n : \ n = 1, 2, \ldots\}$ 是 *i.i.d.* 于 $Exp(\lambda)$, 则计数过程 N^c 是一个参数为 $\lambda > 0$ 的泊松过程.

泊松过程基本性质

- 证:

(a). $N_0^c = 0$

(b). $\forall\ t > 0,\ N_t^c \sim Poisson[\lambda]$:

计数过程的到达时间 $T_n = \sum_{k=1}^n \tau_k \sim \Gamma(n, \lambda)$, 其 pdf 为

$$p_{T_n}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

设集合 $A_t = \{(x, y) \in (0, \infty)^2 :\ x \le t < x + y\}$, 则

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t^c = n) &= \mathbb{P}(T_n \le t < T_{n+1}) = \mathbb{P}(T_n \le t < T_n + \tau_{n+1}) \\
&= \int\int_{A_t} p_{T_n}(x) \lambda e^{-\lambda y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^t p_{T_n}(x) e^{-\lambda(t-x)} \mathrm{d}x \\
&= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

泊松过程基本性质

(c). $\forall\ 0 \le s < t$，增量 $N_t - N_s$ 是独立于 $\{N_u:\ u \le s\}$ 且其服从参数为 $\lambda(t-s)$ 的泊松分布.

定义 $\widetilde{N}_t^s = N_t^c - N_s^c$, 则 $\widetilde{N}^s = \{\widetilde{N}_t^s;\ t \ge s\}$ 是一个从 s 开始的计数过程. $\widetilde{N}^s$ 的到达时间间隔:

$$\widetilde{\tau}_1 = \tau_{k+1} - (s - T_k), \quad \widetilde{\tau}_n = \tau_{n+k}, \quad n \ge 2$$

由 $\tau_{k+1} \sim Exp[\lambda]$, 故由指数分布无记忆性:

$$\mathbb{P}(\widetilde{\tau}_1 > u | \widetilde{\tau}_1 > 0) = \mathbb{P}(\tau_{k+1} > u + (s - T_k) | \tau_{k+1} > (s - T_k)) = e^{-\lambda u}$$

泊松过程基本性质

因此在 $\{N_s^c = k\}$ 下, $\{\widetilde{\tau}_1, \widetilde{\tau}_2, \dots\}$ i.i.d. 于 $Exp[\lambda]$. 这说明: 在 $\{N_s^c = k\}$ 下, $\widetilde{N}^s = \{\widetilde{N}_t^s;\ t \geq s\}$ 是参数 $\lambda > 0$ 的 PP.

$$\mathbb{P}\left(\widetilde{N}_t^s = n | N_s^c = k\right) = \frac{\lambda^n (t-s)^n}{n!} e^{-\lambda(t-s)}$$

以及

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\widetilde{N}_t^s = n\right) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left(N_t^c = k+n, N_s^c = k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left(T_{k+n} \leq t < T_{k+n+1}, T_k \leq s < T_{k+1}\right) \\
&= \frac{\lambda^n (t-s)^n}{n!} e^{-\lambda(t-s)}
\end{aligned}$$

泊松过程基本性质

- 例题:

  某班学生要去 A 教室上数学课程. 现有两个入口 B 和 C 可以进入 A 教室. 设在时刻 $t > 0$, 从 B 口进入 A 教室的学生数为 N_t^B, 从 C 口进入 A 教室的学生数为 N_t^C.
  设 N^B 和 N^C 是服从参数 $\lambda_B = 0.5$ 和 $\lambda_C = 1.5$ 的独立的泊松过程.

泊松过程基本性质

(a). 在一个固定的 3 分钟内没有学生进入 A 教室的概率有多大?

$$\mathbb{P}(T_1 > 3) = e^{-6} \approx 2.5\%.$$

(b). 学生到达 A 教室的时间间隔的均值是多少?

$$\mathbb{E}[\tau_n] = \lambda^B + \lambda^C = 1/2$$

泊松过程基本性质

(c). 已知一个学生进入了 A 教室, 那他是从 C 口进入的概率?

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\tau_n^C < \tau_n^B\right) &= \int_{\{0<x<y\}} \lambda^B \lambda^C e^{-\lambda^C x - \lambda^B y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{\lambda^C}{\lambda^B + \lambda^C} = \frac{1.5}{2} = 75\% \\
\textit{or} \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}\left(\tau_n^B > t\right) \lambda^C e^{-\lambda^C t} \mathrm{d}t = \frac{\lambda^C}{\lambda^B + \lambda^C}
\end{aligned}
$$

1 跳跃随机过程
- 泊松过程基本性质
- 泊松过程跳的 0-1 律
- 复合泊松过程

泊松过程跳的 0-1 律

- 泊松过程 $N = \{N_t : \ t \geq 0\}$ 的到达时间间隔:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \min\{t > 0 : \ N_t = 1\} \\
T_2 &= \min\{t > T_1 : \ N_t = 2\} \\
\cdots & \quad \cdots \\
T_{n+1} &= \min\{t > T_n : \ N_t = n+1\}, \quad n \in \mathbb{N}^*
\end{aligned}
$$

- 到达时间间隔 $\tau_n = T_{n+1} - T_n$.

泊松过程跳的 0-1 律

Theorem

泊松过程 N 的到达时间间隔 $\{\tau_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是相互独立且同分布于参数为 λ 的指数分布.

泊松过程跳的 0-1 律

- 证: 仅证 τ_1, τ_2 i.i.d. 于 $Exp(\lambda)$

(a). $\tau_1 \sim Exp(\lambda)$:

$\forall\ t > 0$,

$$\mathbb{P}(\tau_1 > t) = \mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(N_t = 0) = e^{-\lambda t}.$$

(b). τ_1 和 τ_2 独立, 且 $\tau_2 \sim Exp(\lambda)$:

$\forall\ t_2 > t_1 > 0$ 和充分小 $\delta_1, \delta_2 > 0$,
使 $t_i - \delta_i > 0$ 和 $t_2 - \delta_2 > t_1 + \delta_1$, 考虑

泊松过程跳的 0-1 律

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(t_1-\delta_1 < T_1 \le t_1+\delta_1, t_2-\delta_2 < T_2 \le t_2+\delta_2) \\
= \quad & \mathbb{P}(N_{t_1-\delta_1}=0, N_{t_1+\delta_1}-N_{t_1-\delta_1}=1, N_{t_2-\delta_2}-N_{t_1+\delta_1}=0, \\
& \quad N_{t_2+\delta_2}-N_{t_2-\delta_2}=1) \\
= \quad & \mathbb{P}(N_{t_1-\delta_1}=0)\cdot\mathbb{P}(N_{t_1+\delta_1}-N_{t_1-\delta_1}=1) \\
& \times\mathbb{P}(N_{t_2-\delta_2}-N_{t_1+\delta_1}=0)\cdot\mathbb{P}(N_{t_2+\delta_2}-N_{t_2-\delta_2}=1) \\
= \quad & 4\lambda^2\delta_1\delta_2 e^{-\lambda(t_2+\delta_2)}.
\end{aligned}
$$

泊松过程跳的 0-1 律

因此 $2d$ r.v. (T_1, T_2) 的 pdf 为

$$p_{(T_1,T_2)}(t_1,t_2) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda t_2}, & t_2 > t_1 > 0, \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

注意: $\tau_1 = T_1$ 和 $\tau_2 = T_2 - T_1$，则 (τ_1, τ_2) 的联合 pdf 为

$$p_{(\tau_1,\tau_2)}(t_1,t_2) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(t_1+t_2)}, & t_1 > 0 \ and \ t_2 > 0, \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

故 τ_2 的 pdf 为 $p_{\tau_2}(t_2) = \int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda(s+t_2)} \mathrm{d}s = \lambda e^{-\lambda t_2}$, 因此

$$p_{(\tau_1,\tau_2)}(t_1,t_2) = p_{\tau_1}(t_1) p_{\tau_2}(t_2).$$

泊松过程跳的 0-1 律

- 泊松过程的到达时间的仿真:

$$
\begin{aligned}
u &= rand(1, K); \\
T &= zeros(1, K+1); \\
k &= zeros(1, K+1); \\
&\quad for\ j = 1 : K \\
&\quad k(j+1) = j; \\
&\quad T(j+1) = T(j) - log(u(j))/lambda; \\
&\quad end
\end{aligned}
$$

泊松过程跳的 0-1 律

- 泊松过程的 0-1 律

  $\forall\ t > 0$ 和充分小的 $h > 0$,

  (a). $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$

  (b). $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda h + o(h)$

泊松过程跳的 0-1 律

证:

(a). 由 PP 的平稳独立增量性:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{t+h}-N_t=0)&=\mathbb{P}(N_h=0)=e^{-\lambda h}\\&=1-\lambda h+\lambda^2h^2-\cdots\end{aligned}$$

(b).

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{t+h}-N_t=0)&=\mathbb{P}(N_h=1)=\lambda he^{-\lambda h}\\&=\lambda h[1-\lambda h+\lambda^2h^2-\cdots]\end{aligned}$$

泊松过程跳的 0-1 律

- 计数过程与 PP 跳 0-1 律:

Theorem

计数过程 N^c 具有平稳独立增量性且满足 PP 跳 0-1 律, 那 N^c 是一个泊松过程.

泊松过程跳的 0-1 律

- 证: 只需证 $q_k(t) := \mathbb{P}(N_t^c = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$, $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$

(a). 考虑函数 $q_0(t+h)$ 对充分小 $h > 0$:

$$\begin{aligned} q_0(t+h) &= \mathbb{P}(N_{t+h}^c = 0) \\ &= \mathbb{P}(N_{t+h}^c - N_t^c = 0, N_t^c = 0) \\ &= \mathbb{P}(N_{t+h}^c - N_t^c = 0)\mathbb{P}(N_t^c = 0) \\ &= (1 - \lambda h + o(h))q_0(t). \end{aligned}$$

于是 $\frac{q_0(t+h)-q_0(t)}{h} = -\lambda q_0(t) + \frac{o(h)}{h}$. 上式两边 $h \to 0$ 得

$$q_0'(t) = -\lambda q_0(t), \qquad q_0(0) = 1.$$

得

$$q_0(t) = e^{-\lambda t}$$

泊松过程跳的 0-1 律

(b). 考虑函数 $q_k(t+h)$, $\forall\ k = 1, 2, \ldots$:

$$
\begin{aligned}
q_k(t+h) &= \mathbb{P}(N^c_{t+h} = k) \\
&= \mathbb{P}(N^c_t = k, N^c_{t+h} - N^c_t = 0) \\
&\quad + \mathbb{P}(N^c_t = k-1, N^c_{t+h} - N^c_t = 1) \\
&\quad + \sum_{j=2}^{k} \mathbb{P}(N^c_t = k-j, N^c_{t+h} - N^c_t = j) \\
&= q_k(t)q_0(h) + q_{k-1}(t)q_1(h) + \sum_{j=2}^{k} q_{k-j}(t)q_j(h) \\
&= q_k(t)(1 - \lambda h + o(h)) + q_{k-1}(t)(\lambda h + o(h)) + o(h).
\end{aligned}
$$

泊松过程跳的 0-1 律

整理得

$$\frac{q_k(t+h)-q_k(t)}{h} = -\lambda q_k(t) + \lambda q_{k-1}(t) + \frac{o(h)}{h}.$$

上式两边 $h \to 0$ 得迭代得常微分方程:

$$q_k'(t) + \lambda q_k(t) = \lambda q_{k-1}(t), \qquad q_1(0) = 0,\ q_0(t) = e^{-\lambda t}$$

解得

$$q_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

泊松过程跳的 0-1 律

- 例题:

  对于参数为 $\lambda > 0$ 的泊松过程 N, 证: 在 $\{N_t = 1\}$ 下, N 的第一个到达时间 $T_1 \sim U[0, t]$.

- 证: $\forall\ t > s > 0$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_1 \le s | N_t = 1) &= \frac{\mathbb{P}(T_1 \le s, N_t = 1)}{\mathbb{P}(N_t = 1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(N_s = 1, N_t - N_s = 0)}{\mathbb{P}(N_t = 1)} \\
&= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}.
\end{aligned}
$$

泊松过程跳的 0-1 律

- 例题: 几何泊松过程

  设 N 是参数为 $\lambda > 0$ 的泊松过程. 设常数 $\sigma > -1$, 定义

$$\begin{aligned} N_t^{ge} &= \exp\left[N_t \log(\sigma+1) - \lambda\sigma t\right] \\ &= (\sigma+1)^{N_t} e^{-\lambda\sigma t}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

  则 $\forall\ 0 \leq s < t < \infty$,

$$\mathbb{E}\left[\frac{N_t^{ge}}{N_s^{ge}}\right] = 1.$$

泊松过程跳的 0-1 律

- 证: 用泊松过程的平稳独立增量性质,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{N_t^{\mathrm{ge}}}{N_s^{\mathrm{ge}}}\right] &= \mathbb{E}\left\{\exp\left[(N_t - N_s)\log(\sigma+1) - \lambda\sigma(t-s)\right]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\exp\left[N_{t-s}\log(\sigma+1)\right]\right\} e^{-\lambda\sigma(t-s)} \\
&= e^{-\lambda\sigma(t-s)} \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma+1)^n \frac{\lambda^n (t-s)^n}{n!} e^{-\lambda(t-s)} \\
&= e^{-\lambda(\sigma+1)(t-s)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda(\sigma+1)(t-s)]^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda(\sigma+1)(t-s)} \times e^{\lambda(\sigma+1)(t-s)} = 1
\end{aligned}
$$

泊松过程跳的 0-1 律

- 非齐次泊松过程:

设 N 是一个平稳独立增量过程. 设函数 $\lambda(t):[0,\infty)\to(0,\infty)$, 若

$$\mathbb{P}(N_t-N_s=k)=\frac{(m(t)-m(s))^k}{k!}e^{-(m(t)-m(s))},\quad t>s\geq 0,\ k\in\mathbb{N}^*.$$

其中 $m(t)=\int_0^t\lambda(u)\mathrm{d}u$, 则称 N 是一个强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次泊松过程.

泊松过程跳的 0-1 律

- 例题: 齐次与非齐次泊松过程

设非齐次泊松过程 N 的强度 $m(t)$ 满足 $\lim_{t\to\infty} m(t) = \infty$. 定义

$$\theta(t) = \min\{s \geq 0 : \ m(s) > t\}, \quad t \geq 0$$

证: $M = \{N_{\theta(t)} : \ t \geq 0\}$ 是参数为 1 的齐次泊松过程.

泊松过程跳的 0-1 律

- 证:

函数 $t \to \theta(t)$ 是单调不减右连续的且 $m(\theta(t)) = t$. 故 M 具有独立增量性. 下只需证明: 当 $t > s \geq 0$ 时,

$$\mathbb{P}\left(N_{\theta(t)} - N_{\theta(s)} = k\right) = \frac{(t-s)^k}{k!} e^{-(t-s)}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

事实上:

$$\mathbb{P}\left(N_{\theta(t)} - N_{\theta(s)} = k\right) = \frac{f_{\theta,\lambda}^k(s,t)}{k!} e^{-f_{\theta,\lambda}(s,t)},$$

其中 $f_{\theta,\lambda}^k(s,t) = m(\theta(t)) - m(\theta(s)) = t - s$.

1. 跳跃随机过程
   - 泊松过程基本性质
   - 泊松过程跳的 0-1 律
   - 复合泊松过程

复合泊松过程

- 随机游动 (random walk):

  设 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ 是 i.i.d. r.v.s, 称

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \qquad S_0 = x \in \mathbb{R}, \ and \ n \in \mathbb{N}^*$$

  是初始值为 x 的随机游动.

复合泊松过程

- 复合泊松过程 (compound Poisson process):

  现设 $x = 0$ 且泊松过程 N 与 r.v.s $(\xi_k : k \in \mathbb{N})$ 独立. 那称

$$X_t = S_{N_t}, \qquad t \geq 0$$

  为复合泊松过程.

复合泊松过程

- 例题:

  r.v.s $\xi_1(\omega)$ 的数学期望为 μ, 方差为 $\sigma^2 > 0$. 计算复合泊松过程 X 的均值函数、方差函数和相关函数.

复合泊松过程

(a). 均值函数 $m_X(t)$:

用条件数学期望的性质得

$$
\begin{aligned}
m_X(t) &= \mathbb{E}\left[S_{N_t}\right] = \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[S_{N_t}|N_t\right]\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[S_{N_t}|N_t = k\right] \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[S_k|N_t = k\right] \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \mathbb{E}[S_1]\mathbb{P} \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \mathbb{E}[S_1]\mathbb{E}[N_t] = \mu\lambda t.
\end{aligned}
$$

复合泊松过程

(b). 方差函数 $D_X(t)$:

$$
\begin{aligned}
\Phi_X(t) &= \mathbb{E}[X_t^2] \\
&= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[S_{N_t}^2 | N_t\right]\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[S_{N_t}^2 | N_t = k\right] \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[S_k^2\right] \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{k} \xi_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le k} \xi_i \xi_j\right] \mathbb{P}(N_t = k)
\end{aligned}
$$

复合泊松过程

(b). 方差函数 $D_X(t)$:

$$
\begin{aligned}
\Phi_X(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(N_t = k)\mathbb{E}[\xi_1^2] \\
&\quad +2\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{1\le i<j\le k}\mathbb{E}[\xi_i]\mathbb{E}[\xi_j]\right]\mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \mathbb{E}[\xi_1^2]\mathbb{E}[N_t] + \mu^2\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \mathbb{E}[\xi_1^2]\mathbb{E}[N_t] + \mu^2[\mathbb{E}[N_t^2] - \mathbb{E}[N_t]],
\end{aligned}
$$

$$
D_X(t) = \Phi_X(t) - m_X^2(t) = (\lambda^2 + \sigma^2)\lambda t
$$

复合泊松过程

(c). 相关函数 $R_X(s,t)$:

复合泊松过程也满足平稳独立增量性: $\forall\ 0 \le s < t < \infty$,

$$
\begin{aligned}
R_X(s,t) &= \mathbb{E}[X_s X_t] \\
&= \mathbb{E}[X_s(X_t - X_s + X_s)] \\
&= \mathbb{E}[X_s]\mathbb{E}[X_{t-s}] + \mathbb{E}[X_s^2] \\
&= m_X(s)m_X(t-s) + \Phi_X(s) \\
&= m_X(s)m_X(t-s) + D_X(s) + m_X^2(s).
\end{aligned}
$$

复合泊松过程

- 例题: 泊松过程可分解出复合泊松过程

r.v.s $(\xi_k : k \in \mathbb{N})$ i.i.d. 于 0-1 分布, 即 $\forall\ k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(\xi_k = 1) = p > 0, \quad and \quad \mathbb{P}(\xi_k = 0) = 1 - p.$$

参数为 λ 的泊松过程 N 独立于上面的 r.v.s.. $\forall\ t \geq 0$, 定义

$$M_t = S_{N_t}, \quad and \quad L_t = N_t - M_t,$$

证: $L = \{L_t : t \geq 0\}$ 和 $M = \{M_t : t \geq 0\}$ 是独立的服从参数为 λp 和 $\lambda(1-p)$ 的泊松过程.

复合泊松过程

- 证: 只需证明: $\forall\ t > s \geq 0$ 和 $m, k \in \mathbb{N}^*$, 事件

$$A = \{M_t - M_s = m, \quad L_t - L_s = k\}$$

独立于 r.v.s $\{M_u,\ L_u:\ u \leq s\}$ 且其概率为

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda^m p^m (t-s)^m}{m!} e^{-\lambda p(t-s)} \frac{\lambda^k (1-p)^k (t-s)^k}{k!} e^{-\lambda(1-p)(t-s)}.$$

复合泊松过程

(a). 注意到: $A = \{N_t - N_s = m + k, S_{N_t} - S_{N_s} = m\}$

(b). r.v.s $\{M_u, L_u : \ u \le s\}$ 由 $\{N_u : \ u \le s, \ \xi_1, \ldots, \xi_{N_s}\}$ 决定.
故 A 与 $\{M_u, L_u : \ u \le s\}$ 独立

复合泊松过程

(c). 因为 r.v. S_{m+k} 服从一个二项分布, 故

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A \cap \{N_s = n\}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_s = n, N_t - N_s = m + k, S_{N_t} - S_{N_s} = m) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_s = n, N_t - N_s = m + k, S_{m+n+k} - S_n = m) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_s = n, N_t - N_s = m + k)\mathbb{P}(S_{m+k} = m) \\
&= \mathbb{P}(N_{t-s} = m + k)\mathbb{P}(S_{m+k} = m) \\
&= \frac{\lambda^{m+k}(t-s)^{m+k}}{(m+k)!} e^{-\lambda(t-s)} \frac{(m+k)!}{m!k!} p^m (1-p)^k
\end{aligned}
$$