随机过程

Stochastic Processes

stoprocess@yahoo.com.cn

111111

① 马尔可夫(Markov)过程的定义

马尔可夫过程的定义

设$X = \{X_t;\ t \in I\}$是一个状态空间为S的随机过程,如果对任意的时刻$t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in I$ 和$x_1, \ldots, x_n \in S$ $(n \geq 2)$,其条件分布函数

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(X_{t_n} \leq x_n | X_{t_1} = x_1, \cdots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\right) \\ = \quad & \mathbb{P}\left(X_{t_n} \leq x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\right). \end{aligned}$$

如果我们用时刻t_{n-1}表示"现在", $t < t_{n-1}$表示"过去", $t > t_{n-1}$表示"将来"。则马尔可夫过程X就满足:

在"现在"状态已知的条件下,"将来"处在某个状态的条件概率与"过去"所处的状态无关。 此时我们称这样的过程满足"马尔可夫性"。

一般马尔可夫过程的例子

布朗运动(或称Wiener过程),Poisson过程和复合Poisson过程都是经典的马尔可夫过程。

如何验证Markov性?(超出范围可略去)

我们用到一个条件概率的性质:

如果随机变量Z与$\{X_{t_1},\ldots,X_{t_{n-1}}\}$独立,则

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(Z+X_{t_{n-1}}\le x_n|X_{t_1}=x_1,\cdots,X_{t_{n-1}}=x_{n-1}) \\ = \quad & \mathbb{P}(Z+X_{t_{n-1}}\le x_n|X_{t_{n-1}}=x_{n-1}). \end{aligned}$$

离散时间马尔可夫链(Markov Chain)

如果马尔可夫过程$X = \{X_n;\ n = 0, 1, \ldots\}$的状态空间$S$是离散的,即

$$S = \{i_0, i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots\},$$

我们称$X = \{X_n;\ n = 0, 1, \ldots\}$为一个离散时间马尔可夫链。这等价于

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_n = i_n | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\ = \quad & \mathbb{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}). \end{aligned}$$

A.A. Markov(认识一下)

马尔可夫链由前苏联数学家A.A. Markov(1856-1922)于1907年提出(其博士导师:Chebyshev)。

马氏链的转移概率与分布

为了简单起见,我们记马氏链$X = \{X_n;\ n = 0, 1, \dots\}$的状态空间为

$$S = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

转移概率

我们称条件概率

$$p_{ij}^{(k)}(n) = \mathbb{P}\left(X_{n+k} = j | X_n = i\right)$$

为马氏链X在时刻n的k步转移概率。 我们一般记时刻n的1步转移概率为

$$p_{ij}(n) := p_{ij}^{(1)}(n).$$

转移概率矩阵

我们称矩阵

$$\mathbf{P}^{(k)}(n) = \left(p_{ij}^{(k)}(n)\right)_{i,j=1,2,\ldots}$$

为马氏链X在时刻n的k步转移概率矩阵。同理,我们记时刻n的1步转移概率矩阵 为

$$\mathbf{P}(n) := \left(p_{ij}(n)\right)_{i,j=1,2,\ldots}$$

转移概率矩阵的性质

马氏链X在时刻n的k步转移概率矩阵$\mathbf{P}^{(k)}(n)$满足性质：

$$(1): \quad p_{ij}^{(k)}(n) \geq 0, \quad \forall\, k, n, i, j; \qquad (2): \quad \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}^{(k)}(n) = 1, \quad \forall\, k, n, i.$$

Proof: (1)显然。对于性质(2),根据概率测度的可列可加性, 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}^{(k)}(n) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(X_{n+k} = j | X_n = i\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\cup_{j=1}^{\infty} \{X_{n+k} = j\} | X_n = i\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\Omega | X_n = i\right) = 1.
\end{aligned}$$

以后我们称所有满足性质(1)和(2)的矩阵$a = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots}$为随机矩阵.

我们记<u>0步转移概率</u>为

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(0)}(n) &= \mathbb{P}(X_n = j | X_n = i) \\
&= \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \\
&= \delta_{ij}.
\end{aligned}
$$

因此<u>0步转移概率矩阵</u>

$$
\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{I}\,(\text{单位阵}).
$$

Chapman-Kolmogorov方程

我们一定有下面的Chapman-Kolmogorov(CK)方程成立：

$$p_{ij}^{(k+m)}(n) = \sum_{l=1}^{\infty} p_{il}^{(k)}(n) p_{lj}^{(m)}(n+k)$$

或可写成转移概率矩阵的形式

$$\mathbf{P}^{(k+m)}(n) = \mathbf{P}^{(k)}(n)\mathbf{P}^{(m)}(n+k).$$

Proof: 由定义知

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(k+m)}(n) &= \mathbb{P}(X_{n+k+m}=j|X_n=i) \\
&= \mathbb{P}(\cup_{l=1}^{\infty}\{X_{n+k}=l\}, X_{n+k+m}=j|X_n=i) \\
&= \mathbb{P}(\cup_{l=1}^{\infty}\{X_{n+k}=l, X_{n+k+m}=j\}|X_n=i) \\
&= \sum_{l=1}^{\infty}\mathbb{P}(X_{n+k}=l, X_{n+k+m}=j|X_n=i) \\
&= \sum_{l=1}^{\infty}\mathbb{P}(X_{n+k}=l|X_n=i)\mathbb{P}(X_{n+k+m}=j|X_{n+k}=l, X_n=i) \\
&= \sum_{l=1}^{\infty}\mathbb{P}(X_{n+k}=l|X_n=i)\mathbb{P}(X_{n+k+m}=j|X_{n+k}=l) \\
&= \sum_{l=1}^{\infty}p_{il}^{(k)}(n)p_{lj}^{(m)}(n+k).
\end{aligned}
$$

k步转移概率与1步转移概率的关系

马氏链$X = \{X_n;\ n = 0, 1, \ldots\}$的$k$步转移概率可由其1步转移概率完全决定,即

$$\mathbf{P}^{(k+1)}(n) = \mathbf{P}(n)\mathbf{P}(n+1) \times \cdots \times \mathbf{P}(n+k).$$

Proof: 在C-K方程中取$m = 1$, 则有

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{(k+1)}(n) &= \mathbf{P}^{(k)}(n)\mathbf{P}(n+k) \\
&= \mathbf{P}^{(k-1)}(n)\mathbf{P}(n+k-1)\mathbf{P}(n+k) \\
&= \cdots\cdots \\
&= \mathbf{P}(n)\mathbf{P}(n+1) \times \cdots \times \mathbf{P}(n+k).
\end{aligned}$$

马氏链的分布

设$X = \{X_n;\ n = 0, 1, \ldots\}$为一个马氏链.

1. 初始分布(initial distribution)

我们称概率

$$q_i^{(0)} = \mathbb{P}(X_0 = i), \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

为马氏链X的初始分布。记分布率

$$\mathbf{q}^{(0)} = \left(q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \ldots\right)$$

为马氏链X的初始分布向量。

2. 有限维分布(finite-dimensional distribution)

马氏链X的有限维分布由其初始分布和1步转移概率完全确定。

Proof:

设$i_1, i_2, \ldots, i_n \in S = \{1, 2, \ldots\}$和$m_1 < \cdots < m_n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$,则马氏链$X$的任意$n$维有限分布

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(X_{m_1} = i_1, X_{m_2} = i_2, \cdots, X_{m_n} = i_n) \\
= \quad & \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty}(X_0 = i), X_{m_1} = i_1, \cdots, X_{m_n} = i_n) \\
= \quad & \mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty}(X_0 = i, X_{m_1} = i_1, \cdots, X_{m_n} = i_n)\right) \\
= \quad & \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(X_0 = i, X_{m_1} = i_1, \cdots, X_{m_n} = i_n\right) \\
= \quad & \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_0 = i)\mathbb{P}(X_{m_1} = i_1 | X_0 = i)\mathbb{P}(X_{m_2} = i_2 | X_0 = i_n, X_{m_1} = i_1) \\
& \times \cdots \times \mathbb{P}(X_{m_n} = i_n | X_0 = i, X_{m_1} = i_1, \cdots, X_{m_{n-1}} = i_{n-1}) \\
= \quad & \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_0 = i)\mathbb{P}(X_{m_1} = i_1 | X_0 = i)\mathbb{P}(X_{m_2} = i_2 | X_{m_1} = i_1) \\
& \times \cdots \times \mathbb{P}(X_{m_n} = i_n | X_{m_{n-1}} = i_{n-1}) \\
= \quad & \sum_{i=1}^{\infty} q_i^{(0)} p_{ii_1}^{(m_1)}(0) p_{i_1 i_2}^{(m_2 - m_1)}(m_1) \times \cdots \times p_{i_{n-1} i_n}^{(m_n - m_{n-1})}(m_{n-1}).
\end{aligned}
$$

马氏链的绝对分布

我们称概率

$$q_j^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j), \quad n \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

为马氏链X的<u>绝对分布</u>。记分布率

$$\mathbf{q}^{(n)} = (q_1^{(n)}, q_2^{(n)}, \ldots), \qquad n \geq 0$$

为马氏链X的<u>绝对分布向量</u>。

绝对分布与初始分布的关系

$$q_j^{(n)} = \sum_{i=1}^{\infty} q_i^{(0)} p_{ij}^{(n)}(0), \qquad \text{或} \ \ \mathbf{q}^{(n)} = \mathbf{q}^{(0)} \mathbf{P}^{(n)}(0).$$

Proof: 事实上,我们有

$$\begin{aligned} q_j^{(n)} &= \mathbb{P}(X_n = j) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_0 = i, X_n = j) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_0 = i)\mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} q_i^{(0)} p_{ij}^{(n)}(0). \end{aligned}$$

齐次马氏链(Homogeneous Markov Chains)

马氏链$X = \{X_n;\ n = 0, 1, \ldots\}$的1步转移概率$p_{ij}(n)$与初始时刻$n$无关,我们此时记1步转移概率为$p_{ij} = p_{ij}(n)$,则我们称该马氏链 X是齐次马氏链。

这意味着齐次马氏链的k步转移概率可写成

$$p_{ij}^{(k)} = \mathbb{P}(X_k = j | X_0 = i) = \mathbb{P}(X_{n+k} = j | X_n = i), \quad \forall\, n \geq 1.$$

对于齐次马氏链我们有

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \mathbf{P}^{(k)} = \mathbf{P}^k, \quad k \geq 0, \\
&(2) \quad \mathbf{q}^{(k)} = \mathbf{q}^{(0)}\mathbf{P}^k, \quad k \geq 0.
\end{aligned}
$$

简单马氏链的举例

1. <u>独立马氏链</u>

设$X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$是独立同分布的且初始分布为

$$\mathbb{P}(X_0 = i) = a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

则$X = \{X_0, X_1, \ldots\}$是一个齐次马氏链。

Proof: 事实上,我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = i_n | X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}) &= \mathbb{P}(X_n = i_n) = a_{i_n} \\
&= \mathbb{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) \\
&= \mathbb{P}(X_{n+k} = i_n | X_{n+k-1} = i_{n-1}) \\
&= p_{i_{n-1} i_n}.
\end{aligned}$$

1步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} & a_m \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} & a_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} & a_m \end{bmatrix}$$

2. <u>随机游动</u>

设$(X_n;\ n \geq 1)$是相互独立同分布的随机变量且共同的分布为

$$\mathbb{P}(X_n = k) = a_k, \qquad k = \mathbb{Z}.$$

我们定义随机游动

$$S_0 = 0, \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \geq 1.$$

则$S = \{S_n; n \geq 0\}$是一个齐次马氏链。

Proof: 我们注意到$S_n = S_{n-1} + X_n$, 则

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(S_n = i_n | S_0 = 0, S_1 = i_1, \cdots, S_{n-1} = i_{n-1}) \\
= \quad & \mathbb{P}(X_n + i_{n-1} = i_n | S_0 = 0, S_1 = i_1, \cdots, S_{n-1} = i_{n-1}) \\
= \quad & \mathbb{P}(X_n = i_n - i_{n-1} | S_0 = 0, S_1 = i_1, \cdots, S_{n-1} = i_{n-1}) \\
= \quad & \mathbb{P}(X_n = i_n - i_{n-1}) = a_{i_n - i_{n-1}}.
\end{aligned}$$

另外,我们有

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(S_n = i_n | S_{n-1} = i_{n-1}) \\
= \quad & \mathbb{P}(X_n + i_{n-1} = i_n | S_{n-1} = i_{n-1}) \\
= \quad & \mathbb{P}(X_n = i_n - i_{n-1} | S_{n-1} = i_{n-1}) \\
= \quad & \mathbb{P}(X_n = i_n - i_{n-1}) = a_{i_n - i_{n-1}}.
\end{aligned}$$

1步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & \cdots \\ a_{-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1-n} & a_{2-n} & \cdots & a_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

3. 离散排队模型M/G/1

现假设有一个服务台。顾客到达服务台依次排队接受服务,服务台按照先到先服务(FIFO)的原则。我们用X_t表示 t时刻在该系统的顾客数(包括正在接受服务的顾客)。顾客接受服务完离开的时间记为

$$T_0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_n < \cdots .$$

用A_{n+1}表示在T_{n+1}时刻离开的顾客接受服务期间到达系统的顾客数。我们记

$$X_n = X_{T_n+},$$

则X_n表示在T_n时系统总顾客数(包括在T_n时刻即将离开的那位顾客). 于是X_n满足

$$X_{n+1} = (X_n - 1)_+ + A_{n+1}.$$

我们假设$\{A_n; n \geq 1\}$是独立同分布的且独立于X_0, 并且分布率为

$$\mathbb{P}(A_1 = k) = a_k, \qquad k \geq 0,$$

那么 $\{X_n;\ n \geq 0\}$是一个齐次马氏链。

Proof: 我们可以把X_{n+1}写成

$$X_{n+1} = g(X_n, A_{n+1}), \qquad g(x, y) = (x-1)_+ + y.$$

这样我们有

$$X_1 = g(X_0, A_1), \quad X_2 = g(X_1, A_2) = g(g(X_0, A_1), A_2), \quad \cdots,$$

这说明<u>X_n是X_0, A_1, $\ldots, A_n$的函数</u>。因此我们有

$$\underline{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ 都是独立于} A_{n+1} \text{的.}}$$

因此

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(X_{n+1}=i_{n+1}|X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n) \\
= \quad & \mathbb{P}(g(X_n,A_{n+1})=i_{n+1}|X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n) \\
= \quad & \mathbb{P}(g(i_n,A_{n+1})=i_{n+1}|X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n) \\
= \quad & \mathbb{P}(g(i_n,A_{n+1})=i_{n+1}|X_n=i_n) \\
= \quad & \mathbb{P}(g(i_n,A_{n+1})=i_{n+1})
\end{aligned}
$$

这证明了$\{X_n\}$是个马氏链。这同时证明了1步转移概率

$$
\begin{aligned}
p_{i_n i_{n+1}} \quad = \quad & \mathbb{P}(X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n)=\mathbb{P}(g(i_n,A_{n+1})=i_{n+1}|X_n=i_n) \\
= \quad & \mathbb{P}(g(i_n,A_{n+1})=i_{n+1})=\mathbb{P}(g(i_n,A_1)=i_{n+1}) \\
= \quad & \mathbb{P}(g(i_n,A_1)=i_{n+1}|X_0=i_n)=\mathbb{P}(g(X_0,A_1)=i_{n+1}|X_0=i_n) \\
= \quad & \mathbb{P}(X_1=i_{n+1}|X_0=i_n)=a_{i_{n+1}-(i_n-1)_+},
\end{aligned}
$$

这证明了该马氏链是齐次的。

1步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

齐次马氏链的状态分类

首达时间

设$X = \{X_0, X_1, X_2, \dots\}$是一个时间齐次的马氏链. 我们定义随机时间(Markov时或首达状态j的时间)

$$\tau_j(1) = \min\{m \geq 1;\ X_m = j\}, \quad j \in S = \{1, 2, \cdots\}.$$

首达概率

设$i, j \in S$和$n \geq 1$,称

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(n)} &= \mathbb{P}(\tau_j(1) = n | X_0 = i) \\ &= \mathbb{P}(X_n = j,\ X_m \neq j,\ m = 1, 2, \dots, n-1 | X_0 = i) \end{aligned}$$

为系统在0时刻从状态i出发经过n步后<u>首次</u>到达状态j的概率.

迟早概率

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(\tau_j(1) < \infty | X_0 = i).$$

不可达概率

$$\begin{aligned} f_{ij}^{+\infty} &= \mathbb{P}(\tau_j(1) = \infty | X_0 = i) \\ &= \mathbb{P}(X_n \neq j, \ \forall\, n \geq 1 | X_0 = i) \end{aligned}$$

平均转移步数

$$\mu_{ij} = \mathbb{E}[\tau_j(1) | X_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}.$$

首达概率和迟早概率的性质

$$(1)\quad 0 \le f_{ij}^{(n)} \le p_{ij}^{(n)} \le f_{ij} \le 1.$$

$$(2)\quad f_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1 \ne j} \sum_{i_2 \ne j} \cdots \sum_{i_{n-1} \ne j} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} j}.$$

$$(3)\quad p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}.$$

Proof: 对于$n \geq 1$,我们有

(1)

$$
\begin{aligned}
f_{ij}^{(n)} &= \mathbb{P}(\tau_j(1) = n | X_0 = i) \\
&= \mathbb{P}(X_n = j,\ X_m \neq j,\ m = 1, 2, \ldots, n-1 | X_0 = i) \\
&\leq \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = p_{ij}^{(n)} \\
&\leq \mathbb{P}(\tau_j(1) \leq n | X_0 = i) \\
&\leq \mathbb{P}(\tau_j(1) < \infty | X_0 = i) = f_{ij} \leq 1.
\end{aligned}
$$

(2) 我们首先证明当$n > 1$,

$$f_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1 \neq j} p_{ii_1} f_{i_1 j}^{(n-1)}.$$

事实上我们有

$$
\begin{aligned}
f_{ij}^{(n)} &= \mathbb{P}(\tau_j(1) = n | X_0 = i) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \neq j,\ X_2 \neq j,\ \cdots,\ X_{n-1} \neq j,\ X_n = j | X_0 = i) \\
&= \sum_{i_1 \neq j} \mathbb{P}(X_1 = i_1,\ X_2 \neq j,\ \cdots,\ X_{n-1} \neq j,\ X_n = j | X_0 = i) \\
&= \sum_{i_1 \neq j} \mathbb{P}(X_2 \neq j,\ \cdots,\ X_{n-1} \neq j,\ X_n = j | X_0 = i, X_1 = i_1) \\
&\quad \times \mathbb{P}(X_1 = i_1 | X_0 = i) \qquad \text{Markov Property} \\
&= \sum_{i_1 \neq j} \mathbb{P}(X_2 \neq j,\ \cdots,\ X_{n-1} \neq j,\ X_n = j | X_1 = i_1) p_{ii_1} \\
&\quad \text{Homogeneous Property} \\
&= \sum_{i_1 \neq j} p_{ii_1} \mathbb{P}(X_1 \neq j,\ \cdots,\ X_{n-2} \neq j,\ X_{n-1} = j | X_0 = i_1) \\
&= \sum_{i_1 \neq j} p_{ii_1} f_{i_1 j}^{(n-1)}.
\end{aligned}
$$

我们迭代上式有

$$
\begin{aligned}
f_{ij}^{(n)} &= \sum_{i_1 \neq j} p_{ii_1} f_{i_1 j}^{(n-1)} \\
&= \sum_{i_1 \neq j} p_{ii_1} \left(\sum_{i_2 \neq j} p_{i_1 i_2} f_{i_2 j}^{(n-2)} \right) \\
&= \sum_{i_1 \neq j} \sum_{i_2 \neq j} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} f_{i_2 j}^{(n-2)} \\
&= \cdots \\
&= \sum_{i_1 \neq j} \sum_{i_2 \neq j} \cdots \sum_{i_{n-1} \neq j} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-2} i_{n-1}} f_{i_{n-1} j}^{(1)} \\
&= \sum_{i_1 \neq j} \sum_{i_2 \neq j} \cdots \sum_{i_{n-1} \neq j} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-2} i_{n-1}} p_{i_{n-1} j}.
\end{aligned}
$$

(3) 用$\{X_n = j\} \subset \cup_{l=1}^{n}\{X_m \neq j,\ m = 1, 2, \ldots, l-1,\ X_l = j\}$我们有

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &= \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) \\
&= \mathbb{P}(\cup_{l=1}^{n}(X_m \neq j,\ m = 1, 2, \ldots, l-1,\ X_l = j), X_n = j | X_0 = i) \\
&= \sum_{l=1}^{n} \mathbb{P}(X_m \neq j,\ m = 1, 2, \ldots, l-1,\ X_l = j, X_n = j | X_0 = i) \\
&= \sum_{l=1}^{n} \mathbb{P}(X_n = j | X_m \neq j,\ m = 1, 2, \ldots, l-1,\ X_l = j, X_0 = i) \\
&\quad \times \mathbb{P}(X_m \neq j,\ m = 1, 2, \ldots, l-1,\ X_l = j | X_0 = i) \\
&= \sum_{l=1}^{n} \mathbb{P}(X_n = j | X_l = j) f_{ij}^{(l)} \\
&= \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}.
\end{aligned}
$$

马氏链状态的周期

设$i \in S$,则称$\{n \geq 1;\ p_{ii}^{(n)} > 0\}$的最大公约数为状态$i$的周期,我们记为$d_i$,即

$$d_i = \mathrm{GCD}\{n | n \geq 1;\ p_{ii}^{(n)} > 0\} \qquad (\mathrm{GCD} = \text{Greatest Common Divisor}),$$

此外，我们定义

$$h_i = \mathrm{GCD}\{n | n \geq 1;\ f_{ii}^{(n)} > 0\}.$$

例子

设一个齐次马氏链$X=\{X_n;\ n\geq 0\}$只有三个状态$S=\{1,2,3\}$且其一步概率转移矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

计算状态1的周期d_1。

Answer: $p_{11}=0$,根据$\mathbf{P}^{(n)}=\mathbf{P}^n$得到

$$p_{11}^{(2)}=p_{11}p_{11}+p_{12}p_{21}+p_{13}p_{31}=p_{12}p_{21}>0,$$

$$p_{11}^{(3)}=p_{12}p_{23}p_{31}>0,$$

因此$\{2,3\}\subset\{n;\ p_{ii}^{(n)}>0\}$,于是$d_1=1$。

周期的性质

(1) 如果$p_{ii}^{(n)} > 0$, 则存在$m \geq 1$使得

$$n = md_i.$$

(2) 如果$f_{ii}^{(n)} > 0$, 则存在$m' \geq 1$使得

$$n = m'h_i.$$

(3) 如果d_i和h_i中有一个存在,则另一个也存在,并且相等即$d_i = h_i$.

Proof: (1)和(2)显然由最大公约数的定义得到。下面我们分三步证明(3)。

Step 1. 定义两个集合

$$N_1 = \{n|n \geq 1;\ p_{ii}^{(n)} > 0\}, \quad \text{和} \quad N_2 = \{n|n \geq 1;\ f_{ii}^{(n)} > 0\}.$$

我们证明: <u>N_1和N_2中有一个非空,则另一个也非空。</u>

- 如果$N_1 \neq \emptyset$, 则存在某个$n \geq 1$,使$p_{ii}^{(n)} > 0$.这意味着(Lemma 5.3.1 Page148)

$$p_{ii}^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} f_{ii}^{(l)} p_{ii}^{(n-l)} > 0.$$

这说明一定存在$1 \leq l' \leq n$使$f_{ii}^{(l')} > 0$,即$l' \in N_2$。因此我们有$N_2 \neq \emptyset$。

• 如果$N_2 \neq \emptyset$, 则存在某个$n \geq 1$,使$f_{ii}^{(n)} > 0$. 故有

$$p_{ii}^{(n)} \geq f_{ii}^{(n)} > 0.$$

这证明了$n \in N_1$,即$N_1 \neq \emptyset$。

Step 2. 我们证明: $\underline{d_i \leq h_i}$。事实上,由于$f_{ii}^{(n)} \leq p_{ii}^{(n)}$,故$N_2 \subset N_1$,这意味着$d_i \leq h_i$。

Step 3. 我们证明: $\underline{h_i \leq d_i}$。

•如果$h_i = 1$,由Step 2得到$d_i = 1$,从而$d_i = h_i$。

•如果$h_i > 1$,则当$n = 1, \ldots, h_i - 1$, $f_{ii}^{(n)} = 0$,以及

$$p_{ii}^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} f_{ii}^{(l)} p_{ii}^{(n-l)} = 0.$$

•如果$n = h_i + l$,则当$l = 1, \ldots, h_i - 1$, $f_{ii}^{(n)} = 0$和$p_{ii}^{(l)} = 0$.并且我们有

$$
\begin{aligned}
p_{ii}^{(n)} &= \sum_{l'=1}^{n} f_{ii}^{(l')} p_{ii}^{(n-l')} \\
&= \underline{f_{ii}^{(1)} p_{ii}^{(h_i+l-1)} + \cdots + f_{ii}^{(h_i-1)} p_{ii}^{(l+1)}} \\
&\quad \text{根据上一步我们有} f_{ii}^{(1)} = \cdots = f_{ii}^{(h_i-1)} = 0 \\
&\quad + \underline{f_{ii}^{(h_i)} p_{ii}^{(l)}} \qquad \text{注意} p_{ii}^{(l)} = 0 \\
&\quad + \underline{f_{ii}^{(h_i+1)} p_{ii}^{(l-1)} \cdots + f_{ii}^{(h_i+l)} p_{ii}^{(0)}} \\
&\quad \text{根据这一步我们有} f_{ii}^{(h_i+1)} = \cdots = f_{ii}^{(h_i+l)} = 0 \\
&= 0 + 0 + 0 = 0.
\end{aligned}
$$

我们由数学归纳法可进一步证明: 对任意的$n \geq 1$且不能被h_i整除, 我们有

$$f_{ii}^{(n)} = 0 \Rightarrow p_{ii}^{(n)} = 0,$$

这说明n也不能被d_i整除,由逆否命题得到当$d_i|n$,则$h_i|n$。
取$n = d_i$,则$h_i|d_i$,这意味着$h_i \leq d_i$。

常返和非常返状态(Recurrence and Transience)

(1) 我们称马氏链状态i为常返状态(Recurrence),如果

$$f_{ii} = \mathbb{P}(\tau_i(1) < \infty | X_0 = i) = 1.$$

(2) 我们称马氏链状态i为非常返状态(Transience),如果

$$f_{ii} = \mathbb{P}(\tau_i(1) < \infty | X_0 = i) < 1.$$

i is Recurrent $\Leftrightarrow \mathbb{P}(X_n = i \text{ for infinitely many } n | X_0 = i) = 1$

i is Transient $\Leftrightarrow \mathbb{P}(X_n = i \text{ for infinitely many } n | X_0 = i) = 0$

(3) 我们称马氏链状态i为<u>正常返状态(Positive Recurrence)</u>,如果i为常返状态且

$$\mu_{ii} = \mathbb{E}[\tau_i(1)|X_0 = i] < \infty.$$

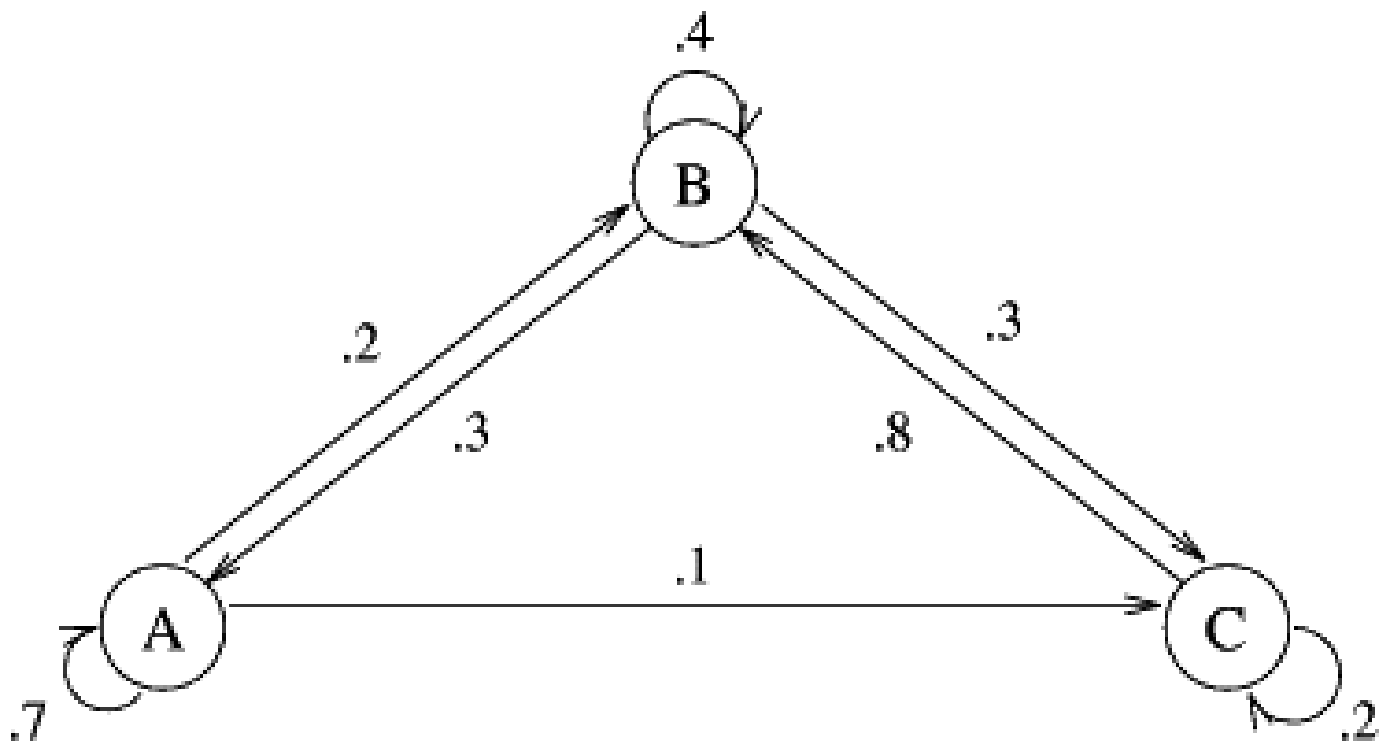
(4) 我们称马氏链状态i为<u>零常返状态</u>,如果i为常返状态且

$$\mu_{ii} = \mathbb{E}[\tau_i(1)|X_0 = i] = \infty.$$

(5) 我们称马氏链状态i为<u>周期状态</u>,如果$d_i > 1$. 称i为<u>非周期状态</u>,如果$d_i = 1$. 称i为<u>遍历状态</u>,如果i是正常返非周期状态。

可达与互通状态(Accessible and Communication)

如果存在$n \geq 1$使$p_{ij}^{(n)} > 0$,则称马氏链状态i<u>可达</u>状态j,记为$i \to j$。
如果$i \to j$且$j \to i$,则称状态i和j<u>互通</u>,记为$i \leftrightarrow j$。



可达与互通状态的性质

(1) <u>可达的传递性</u>: 如果$i \to j$和$j \to k$, 则$i \to k$。

(2) <u>互通的传递性</u>: 如果$i \leftrightarrow j$和$j \leftrightarrow k$, 则$i \leftrightarrow k$。

(3) <u>互通的对称性</u>: 如果$i \leftrightarrow j$,则$j \leftrightarrow i$。

Proof: 只证明(1)。(2)和(3)的证明类似。

假设$i \to j$和$j \to k$,则由定义存在$n_1, n_2 \geq 1$使

$$p_{ij}^{(n_1)} > 0, \qquad p_{jk}^{(n_2)} > 0.$$

则由CK方程,我们有

$$p_{ik}^{(n_1+n_2)} = \sum_{l=1}^{\infty} p_{il}^{(n_1)} p_{lk}^{(n_2)} \geq p_{ij}^{(n_1)} p_{jk}^{(n_2)} > 0.$$

可达与互通状态的判别

(1)

$$i \to j \Leftrightarrow f_{ij} > 0.$$

(2)

$$i \leftrightarrow j \Leftrightarrow f_{ij} f_{ji} > 0.$$

(3) 如果$i \neq j$且j是常返状态,$j \to i$,则$i \leftrightarrow j$并且有$f_{ij} = f_{ji} = 1$。

对于(3),我们还可以得到i也是常返状态,这在以后进行证明。

Proof: (1) 假设$i \to j$,则存在$n \geq 1$使$p_{ij}^{(n)} > 0$,于是(Lemma 5.3.1 Page148)

$$f_{ij} \geq p_{ij}^{(n)} > 0.$$

如果假设$f_{ij} > 0$, 则由

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} > 0$$

得到一定存在一个$n \geq 1$使$f_{ij}^{(n)} > 0$,于是(Lemma 5.3.1 Page148)我们有

$$p_{ij}^{(n)} \geq f_{ij}^{(n)} > 0.$$

对于(2),我们由(1)立即得到。

(3) 我们先证明$i \to j$。我们采用反证法。假设i不可达j,这意味着

$$\mathbb{P}(X_l \neq j,\ \forall\, l \geq 1 | X_0 = i) = 1.$$

由于$j \to i$,则存在一个$m \geq 1$使$p_{ji}^{(m)} > 0$. 注意到j是常返状态, 则

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{P}(\tau_j(1) = \infty | X_0 = j) \\
&= \mathbb{P}(X_l \neq j,\ \forall\, l \geq 1 | X_0 = j) \\
&= \mathbb{P}(X_l \neq j,\ \forall\, l \geq m+1 | X_0 = j) \quad \text{因为j是常返的,故它可无穷多次到达j} \\
&\geq \mathbb{P}(X_l \neq j,\ \forall\, l \geq m+1, X_m = i | X_0 = j) \quad \text{since } i \neq j \\
&= \mathbb{P}(X_l \neq j,\ \forall\, l \geq m+1 | X_m = i, X_0 = j)\mathbb{P}(X_m = i | X_0 = j) \\
&= \mathbb{P}(X_l \neq j,\ \forall\, l \geq m+1 | X_m = i) p_{ji}^{(m)} \quad \text{by Markov Property} \\
&= \mathbb{P}(X_l \neq j,\ \forall\, l \geq 1 | X_0 = i) p_{ji}^{(m)} \\
&= p_{ji}^{(m)} > 0. \quad \text{这显然是矛盾的.}
\end{aligned}$$

我们接着证明$f_{ij}=1$。由于$j\to i$, 则由(1)得到一定存在一个$m\geq 1$使

$$f_{ji}^{(m)}=\mathbb{P}(\tau_i(1)=m|X_0=j)>0.$$

再由状态j是常返的, 则由定义知

$$
\begin{aligned}
0 &= 1 - f_{jj} = \mathbb{P}(\tau_j(1) = \infty | X_0 = j) \\
&= \mathbb{P}(X_n \neq j,\ \forall\, n \geq 1 | X_0 = j) \\
&= \mathbb{P}(X_{n+m} \neq j,\ \forall\, n \geq 1 | X_0 = j) \\
&\quad \text{因为}j\text{是常返的,故它可无穷多次到达}j\text{。} \\
&\geq \mathbb{P}(\tau_i(1) = m, X_{n+m} \neq j,\ \forall\, n \geq 1 | X_0 = j) \\
&= \mathbb{P}(X_{n+m} \neq j,\ \forall\, n \geq 1 | \tau_i(1) = m, X_0 = j) \\
&\quad \times \mathbb{P}(\tau_i(1) = m | X_0 = j) \\
&= \mathbb{P}(X_{n+m} \neq j,\ \forall\, n \geq 1 | X_m = i) f_{ji}^{(m)} \\
&= \mathbb{P}(X_n \neq j,\ \forall\, n \geq 1 | X_0 = i) f_{ji}^{(m)} \\
&= (1 - f_{ij}) f_{ji}^{(m)}.
\end{aligned}
$$

Doeblin公式

我们有如下的Doeblin公式:

$$f_{ij} = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} p_{ij}^{(n)}}{1+\sum_{n=1}^{N} p_{jj}^{(n)}}.$$

特别地我们有

$$f_{ii} = 1 - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{(n)}}.$$

Proof: 我们采用一个更简单的证明方法(矩母函数方法)。考虑以下两个矩母函数:

$$P_{ij}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} x^n, \qquad F_{ij}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} x^n, \qquad 0 < x < 1.$$

我们约定$f_{ij}^{(0)} = 0$,对所有$i, j \in S$。

于是我们有

$$
\begin{aligned}
P_{ij}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} x^n = p_{ij}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} x^n \\
&= \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)} x^m x^{n-m} \\
&= \delta_{ij} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} f_{ij}^{(m)} x^m p_{jj}^{(n-m)} x^{n-m} \\
&= \delta_{ij} + \sum_{m=1}^{\infty} f_{ij}^{(m)} x^m \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} x^n \\
&= \delta_{ij} + \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(m)} x^m \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} x^n \\
&= \delta_{ij} + F_{ij}(x) P_{jj}(x), \quad 0 < x < 1.
\end{aligned}
$$

将上式两边同取极限$x \to 1$,且注意到

$$\lim_{x \to 1} F_{ij}(x) = f_{ij}.$$

得

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \delta_{ij} + f_{ij} \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} \\
\Leftrightarrow \quad & \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \delta_{ij} + f_{ij} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} \right) \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = f_{ij} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} \right).
\end{aligned}$$

常返状态的判别

$$\text{状态}i\text{是常返的} \quad \Leftrightarrow \quad f_{ii} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty.$$

$$\text{状态}i\text{是非常返的} \quad \Leftrightarrow \quad f_{ii} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < +\infty.$$

Proof: 应用公式

$$f_{ii} = 1 - \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}}.$$

转移概率的极限

如果状态i为周期d_i的<u>常返状态</u>,则存在极限

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd_i)} = \frac{d_i}{\mu_{ii}},$$

其中$\mu_{ii} = \mathbb{E}[\tau_i(1)|X_0 = i]$平均返回时间.

简证:

Step 1: 我们引入

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_{ii}^{(k)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

由于i是常返的,故$r_0 = f_{ii} = 1$. 因此

$$\begin{aligned} r_0 p_{ii}^{(n)} &= p_{ii}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)} = \sum_{k=1}^{n} (r_{k-1} - r_k) p_{ii}^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} r_{k-1} p_{ii}^{(n-k)} - \sum_{k=1}^{n} r_k p_{ii}^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} r_k p_{ii}^{(n-1-k)} - \sum_{k=1}^{n} r_k p_{ii}^{(n-k)}. \end{aligned}$$

这得到

$$\sum_{k=0}^{n} r_k p_{ii}^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n-1} r_k p_{ii}^{(n-1-k)}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

这进一步得到

$$\sum_{k=0}^{n} r_k p_{ii}^{(n-k)} = r_0 p_{ii}^{(0)} = 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Step 2: 设

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd_i)} = \lambda_i.$$

我们应用i的常返性及初等数论知识可证明：存在子列$\{n_m;\ m=1,2,\ldots\}$和正整数N_0使

$$\lim_{m\to\infty} p_{ii}^{((n_m-N)d_i)} = \lambda_i, \qquad \forall\, N \geq N_0.$$

根据Step 1,我们已经证明

$$\sum_{k=0}^{n} r_k p_{ii}^{(n-k)} = 1, \qquad n = 0,1,2,\ldots.$$

在上式取$n=(n_m-N_0)d_i$并注意到如果d_i不能整除k时,$p_{ii}^{(k)}=0$,于是我们有

$$\sum_{k=0}^{n_m-N_0} r_{kd_i} p_{ii}^{((n_m-N_0-k)d_i)} = 1.$$

令上式两边取$m \to \infty$(即$n_m \to \infty$),则有

$$\lambda_i = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} r_{kd_i}}.$$

注意到如果d_i不能整除k时,$f_{ii}^{(k)} = 0$以及r_n的定义我们得到

$$r_{kd_i} = \frac{1}{d_i} \sum_{n=kd_i}^{kd_i+d_i-1} r_n,$$

这意味着

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_{kd_i} = \frac{1}{d_i} \sum_{n=0}^{\infty} r_n = \frac{1}{d_i} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} f_{ii}^{(m)} = \frac{1}{d_i} \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} = \frac{1}{d_i} \mu_{ii}.$$

于是我们得到$\lambda_i = \frac{d_i}{\mu_{ii}}$. 同理如果我们设$\beta_i = \underline{\lim}_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd_i)}$,我们用相似的方法可证明 $\beta_i = \frac{d_i}{\mu_{ii}}$.于是$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd_i)} = \lambda_i = \beta_i = \frac{d_i}{\mu_{ii}}$.

转移概率极限的总结

现假设马氏链状态i是常返的, 则

(1) 状态i是零常返的 $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$。

(2) 状态i是遍历的 $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{ii}} > 0$。

(3) 状态i是正常返周期的 $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$不存在但有一收敛某正数的子列。

Proof: (1) 如果i是零常返的,则由(Thm 5.3.3 Page154),得到

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd_i)} = 0, \qquad (\text{since } \mu_{ii} = \infty),$$

而当d_i不能整除n时, 由周期的定义知 $p_{ii}^{(n)} = 0$.因此我们有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0.$$

反之,如果$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$,则状态$i$是零常返,否则$\mu_{ii} < +\infty$,于是

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd_i)} = \frac{d_i}{\mu_{ii}} > 0.$$

这与$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$矛盾。

(2) 如果i是遍历的,则周期$d_i = 1$,于是

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd_i)} = \frac{d_i}{\mu_{ii}} = \frac{1}{\mu_{ii}} > 0.$$

反之,如果$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{ii}} > 0$,则由(1)知,$i$一定不是零常返的。由于 i本身是常返的,则i是正常返的。再由极限的保号性,一定存在$N \geq 1$使当$n > N$时,我们有

$$p_{ii}^{(n)} > 0, \qquad p_{ii}^{(n+1)} > 0.$$

这意味着周期$d_i = 1$。

(3) 假设i是正常返的且$d_i > 1$,我们用反证法假设$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$存在。于是我们一定有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} \geq 0.$$

- 如果$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$,则由(1)知$i$是零常返的,这与$i$是正常返状态矛盾。
- 如果$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} > 0$,则由极限的保号性得到$d_i = 1$这与周期$d_i > 1$矛盾。

因此我们得到$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$不存在。但此时我们仍有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd_i)} = \frac{d_i}{\mu_{ii}}.$$

假设$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$不存在,则由(1)知$i$一定不是零常返的,由(2)知$i$也不是遍历的而 i本身是常返的,于是i只可能是正常返周期的。

推论

设状态$j \in S$是<u>非常返的或零常返的</u>,则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0, \qquad \forall\, i \in S.$$

Proof: • 如果$i = j$, 若j是零常返的,则由(1)知$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0$。
若j是非常返的,则$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$,故$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0$。

• 如果$i \neq j$, 则对任意的$1 < m < n$,我们有

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} \leq \sum_{l=1}^{m} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} + \sum_{l=m+1}^{n} f_{ij}^{(l)}.$$

于是

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \leq \sum_{l=1}^{m} f_{ij}^{(l)} \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n-l)} + \sum_{l=m+1}^{\infty} f_{ij}^{(l)} = \sum_{l=m+1}^{\infty} f_{ij}^{(l)}.$$

再令$m \to \infty$,则有

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \leq 0,$$

而一定成立

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \geq 0.$$

这就证明了

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0.$$

非周期的判别

假设状态$i, j \in S$,则我们有

(1)如果存在某个正整数$n \geq 1$使$p_{ii}^{(n)} > 0$和$p_{ii}^{(n+1)} > 0$,那么状态i是非周期的,即$d_i = 1$。

(2) 如果存在某个正整数$m \geq 1$使m步转移概率矩阵$\mathbf{P}^{(m)}$中第j列元素全不为零,则状态j非周期。

(3)如果状态i周期为d,则一定存在某个正整数$N_0 \geq 1$使

$$p_{ii}^{(nd)} > 0, \qquad \forall\, n \geq N_0.$$

Proof: (1)由周期d_i的定义立即可得。

(2) 由题意我们知道: 对任意的状态$i \in S$, 有$p_{ij}^{(m)} > 0$。于是根据Thm 5.2.2(Page142)得:一定存在某个状态$i_1 \in S$使$p_{ii_1} > 0$.由CK方程(并注意$p_{i_1 j}^{(m)} > 0$),

$$p_{ij}^{(m+1)} = \sum_{l=1}^{\infty} p_{il} p_{lj}^{(m)} \geq p_{ii_1} p_{i_1 j}^{(m)} > 0.$$

上式中取$i = j$有$p_{ii}^{(m)} > 0, \quad p_{ii}^{(m+1)} > 0$,故由(1)知$d_i = 1$。

(3) 将集合 $\{n|n \geq 1;\ p_{ii}^{(n)} > 0\}$中的数按从大到小的顺序排列为

$$\{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k, \ldots\}.$$

令

$$t_k = \mathrm{GCD}\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}, \qquad k \geq 1.$$

显然我们有$t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq d \geq 1$。故一定存在一个正整数$N$使

$$t_N = t_{N+1} = \cdots = d.$$

因此

$$d = \mathrm{GCD}\{n_1, n_2, \ldots, n_N\}.$$

根据初等数论知识我们可以找到一个正整数N_0使对任意的正整数$n \geq N_0$,

$$nd = \sum_{k=1}^{N} a_k n_k, \qquad a_k\text{为正整数。}$$

于是由CK方程推出

$$
\begin{aligned}
p_{ii}^{(nd)} &= p_{ii}^{(\sum_{k=1}^{N} a_k n_k)} \geq p_{ii}^{(a_1 n_1)} p_{ii}^{(a_2 n_2)} \cdots p_{ii}^{(a_N n_N)} \\
&\geq \prod_{k=1}^{N} \left(p_{ii}^{(n_k)} \right)^{a_k} > 0.
\end{aligned}
$$

互通状态的状态类型

互通的两个状态有相同的状态类型。

Proof: 假设$i \leftrightarrow j$,则存在正整数l, n使$\alpha := p_{ij}^{(l)} > 0$和$\beta := p_{ji}^{(n)} > 0$。于是由CK方程,对于任意的正整数$m$

$$p_{ii}^{(l+m+n)} = \sum_{k,s=1}^{\infty} p_{ik}^{(l)} p_{ks}^{(m)} p_{si}^{(n)} \geq p_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(m)} p_{ji}^{(n)} = \alpha\beta p_{jj}^{(m)}.$$

同理

$$p_{jj}^{(l+m+n)} \geq \alpha\beta p_{ii}^{(m)}.$$

- 如果j是常返状态,则$\sum_{m=1}^{\infty} p_{jj}^{(m)} = \infty$,于是

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_{ii}^{(l+m+n)} \geq \alpha\beta \sum_{m=1}^{\infty} p_{jj}^{(m)} = +\infty.$$

因此i是常返状态。同理将上面证明中i,j调换得如果j也是常返状态,则i是常返状态。

- 如果j(或i)是非常返状态,则由上面的逆否命题得i(或j)是非常返状态。

- 如果j是零常返状态,这等价于$\lim_{m\to\infty} p_{jj}^{(m)} = 0$。于是根据上面证明的不等式

$$0 \le \alpha\beta \lim_{m\to\infty} p_{ii}^{(m)} \le \lim_{m\to\infty} p_{jj}^{(l+m+n)} = \lim_{m\to\infty} p_{jj}^{(m)} = 0.$$

于是$\lim_{m\to\infty} p_{ii}^{(m)} = 0$因此这等价于$i$也是零常返状态。

- 如果j是正常返状态的,则由上面的逆否命题得i是正常返状态的。

- 现在我们假设i,j都是正常返的, 我们证明周期$d_i = d_j$。根据CK方程

$$p_{jj}^{(n+l)} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk}^{(n)} p_{kj}^{(l)} \ge p_{ji}^{(n)} p_{ij}^{(l)} = \alpha\beta > 0.$$

于是$d_j|n+l$。下面我们任取

$$m \in \{m|m \geq 1;\ p_{ii}^{(m)} > 0\},$$

则根据上面证明的不等式

$$p_{jj}^{(l+m+n)} \geq \alpha\beta p_{ii}^{(m)} > 0.$$

这说明$d_j|l+m+n$,于是$d_j|m$对所有,$m \in \{m|m \geq 1;\ p_{ii}^{(m)} > 0\}$。因此

$$d_j|d_i,\ \text{这意味着} d_j \leq d_i.$$

同理我们可证

$$d_i|d_j,\ \text{这意味着} d_i \leq d_j.$$

故$d_i = d_j$。

马氏链状态空间的分解

互通是一种等价关系

互通是一种等价关系,也就是它满足:

(1) <u>自返性:</u> $i \to i \Rightarrow i \leftrightarrow i$;

(2) <u>对称性:</u> $i \leftrightarrow j \Rightarrow j \leftrightarrow i$;

(3) <u>传递性:</u> $i \leftrightarrow j$ and $j \leftrightarrow k \Rightarrow i \leftrightarrow k$.

马氏链状态空间S的一种分解

利用互通这一等价关系,马氏链的状态空间S可分解为

$$S = \cup_{i \in S} S(i), \quad S(i) \cap S(j) = \emptyset, \ \ i \neq j, \ i, j \in S,$$

其中不同的集合$S(i)$和$S(j)$ $(i \neq j)$中的状态不互通,但单向可达是可以的。这样我们称$S(i)$为一个等价类。这意味着

$$S(i) = \{i\} \cup \{j \in S | j \leftrightarrow i\}.$$

闭集,不可约

(1) 闭集: 设集合$C \subset S$是一个子集,如果

$$\forall\, i \in C,\ \forall\, j \in C^c \Rightarrow\ p_{ij}^{(n)} = 0,\ \ \underline{\forall\, n \geq 0}.$$

如果单状态集$\{i\}$是一个闭集,则我们称状态i是一个吸收状态。

(2) 不可约闭集: 设$C \subset S$是一个闭集。如果C中不再含有任何非空真闭子集,则称C是一个不可约闭集(或称最小的闭集)。

(3) 不可约齐次马氏链: 如果状态空间S是不可约的, 则称该马氏链是不可约的。

$$i \text{ is a closed set} \Leftrightarrow\ \forall\, i \in C,\ \text{if } i \to j,\ \text{then } j \in C$$

闭集的判别条件

(1) C是闭集 $\Leftrightarrow p_{ij}=0,\ \forall\, i\in C,\ j\in C^c$。

(2) C是闭集 $\Leftrightarrow \sum_{j\in C} p_{ij}=1,\ \forall\, i\in C$。

(3) C是闭集 $\Leftrightarrow \sum_{j\in C} p_{ij}^{(n)}=1,\ \forall\, i\in C,\ n\geq 0$。

(4) $i\in S$是吸收状态 $\Leftrightarrow p_{ii}=1$。

事实上我们只需证明(1)。如果(1)成立,则$\forall\, i\in C$,我们有

$$1=\sum_{j\in S} p_{ij}=\sum_{j\in C} p_{ij}+\sum_{j\in C^c} p_{ij}=\sum_{j\in C} p_{ij}.$$

其余的(3)和(4)与(2)证明类似。下面我们只证明(1)。

Proof: (1) <u>必要性</u>由定义显然成立(在定义中取$n=1$)。

<u>充分性</u>:

- 显然我们有$p_{ij}^{(0)}=\delta_{ij}=0, \quad \forall\, i\in C,\ j\in C^c$。

- 由题意知 $p_{ij}=0,\ \forall\, i\in C,\ j\in C^c$。

- 我们假设$n=k\geq 2$时, 成立$p_{ij}^{(k)}=0,\ \forall\, i\in C,\ j\in C^c$。于是

当$n=k+1$时，根据CK方程我们有$\forall\, i\in C,\ j\in C^c$,

$$p_{ij}^{(k+1)}=\sum_{l\in S}p_{il}^{(k)}p_{lj}=\sum_{l\in C}p_{il}^{(k)}p_{lj}+\sum_{l\in C^c}p_{il}^{(k)}p_{lj}=\sum_{l\in C}p_{il}^{(k)}0+\sum_{l\in C^c}0p_{lj}=0.$$

因此由数学归纳法我们得到

$$\forall\, i\in C,\ \forall\, j\in C^c \Rightarrow\ p_{ij}^{(n)}=0,\ \ \forall\, n\geq 0.$$

不可约的判别条件

(1) 如果等价类$S(i)$是闭集,则它一定是不可约闭集。

(2) 设C是闭集,那么C是不可约的 $\Leftrightarrow$ C中的任何两个状态都互通。

(3) 齐次马氏链不可约 $\Leftrightarrow$ 它的任何两个状态都互通。

(4) 设i是常返的,则$S(i)$是闭集,因此是不可约的。

由于马氏链的状态空间S是一个闭集,则(3)的结果可由(2)推出。下面我们只证明(1),(2)和(4)。

Proof: (1) 设C是$S(i)$的一个非空闭集,则由闭集的定义我们知

$$\forall\, j \in C,\ \text{如果} j \to k,\ \text{则} k \in C.$$

取$\forall\, l \in S(i)$和$j \in C$,则$l \leftrightarrow i$和$j \leftrightarrow i$,根据互通的传递性我们有$j \leftrightarrow l$。而$j \in C$(闭集),则$l \in C$.这证明了$S(i) \subset C$因而$S(i) = C$。

(2) <u>充分性</u>的证明与(1)的证明完全类似。

<u>必要性</u>: 设C是不可约闭集。我们用反证法假设状态$i, j \in C$和$i \nrightarrow j$ ($i \neq j$),定义集合

$$D = \{i\} \cup \{l \neq i | l \in C,\ i \to l\} \subset C.$$

则由定义得D是C的非空闭子集(为什么?)。

[1] $i \in D$, 所以D非空;
[2] 假设D不是闭集,则存在一个状态$k \in D^c$使$l \to k$ (其中 $i \neq l \in D$)。由于$i \to l$,故根据可达的传递性,我们有 $i \to k$,但由D的定义, $k \in D$。这与$k \in D^c$矛盾。

注意到$j \in D^c$, 故 D是C的一个非空真闭子集,这与C不可约矛盾,因此$i \to j$。相似地,我们有$j \to i$,于是 $i \leftrightarrow j$。

(4) 我们只需证明$S(i)$是闭集。任取状态$j \in S(i)$和$k \in S$,则$i \leftrightarrow j$,由于i常返故j也常返(Thm5.3.6Page157)。现假设$j \to k$,我们只需证明: $k \in S(i)$。事实上, $j \to k$和j是常返状态,则一定有 $j \leftrightarrow k$ (Coro5.3.6Page152)。这意味着$i \leftrightarrow k$, 因此$k \in S(i)$。

有限状态齐次马氏链的情形

(1) 有限状态齐次马氏链的所有非常返状态所形成的集合D不可能是闭集($D \neq \emptyset$)。

(2) 有限状态齐次马氏链不可能存在零常返状态。

(3) 不可约有限状态齐次马氏链的所有状态都是正常返的。

Proof: (1) 用反证法假设D是闭集,则由Lemma5.3.7(3)Page159得到

$$\sum_{j\in D} p_{ij}^{(n)} = 1, \qquad \forall\, i \in D,\ n \geq 0.$$

根据推论5.3.3Page156知$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$。注意到$D$的元素是有限的, 因此对上式两边取极限$n \to \infty$得到$0 = 1$的矛盾。 因此$D$不是闭集。

(2) 用反证法假设状态空间中存在零常返状态$j \in S$。于是一定存在某个等价类$S(j)$,因j常返故$S(j)$是闭集。因此我们有

$$\sum_{k \in S(j)} p_{ik}^{(n)} = 1, \qquad \forall\, i \in S(j),\ n \geq 0.$$

由于$\lim_{n\to\infty} p_{ik}^{(n)} = 0$及$S(j)$元素的有限性得到矛盾。因此零常返状态是不可能存在的。

(3) 由(1)和(2)立即得到。

齐次马氏链状态空间分解定理

齐次马氏链状态空间S可唯一分解成互不相交的状态子集之并

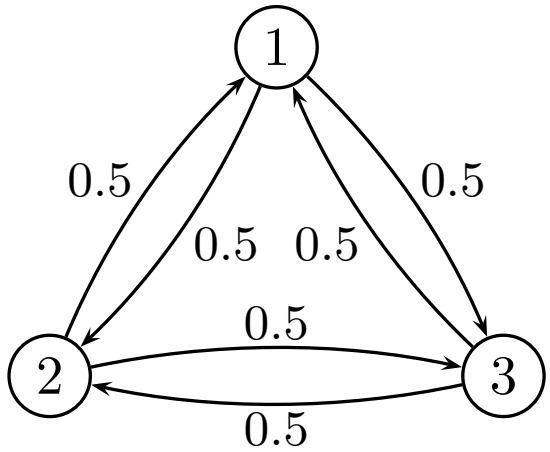
$$S = D \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots ,$$

其中D是所有非常返状态构成的子集, $C_n,\ n = 1, 2, \ldots$ 是由常返状态构成的不可约闭集,每个C_i中有相同的状态类型。

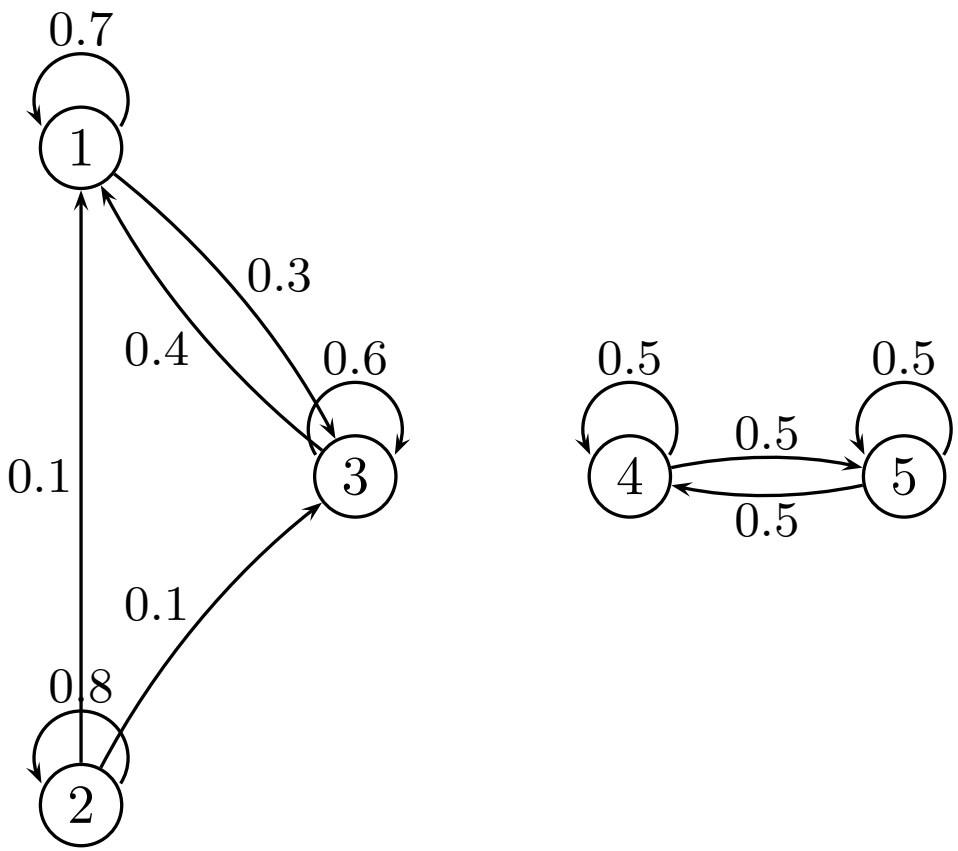
练习

对以下齐次马氏链的状态空间进行分解

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$


1
2
3
0.5
0.5
0.5
0.5
0.5
0.5

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$


0.7
1
0.3
0.4
0.6
0.1
3
0.1
0.8
2
0.5
0.5
0.5
4
5
0.5

不可约闭集的周期分类

设状态空间的子集C是一个周期为d的不可约闭集,则如C可以唯一分解成d个互不相交状态子集$J_1, \ldots, J_d$的并,即

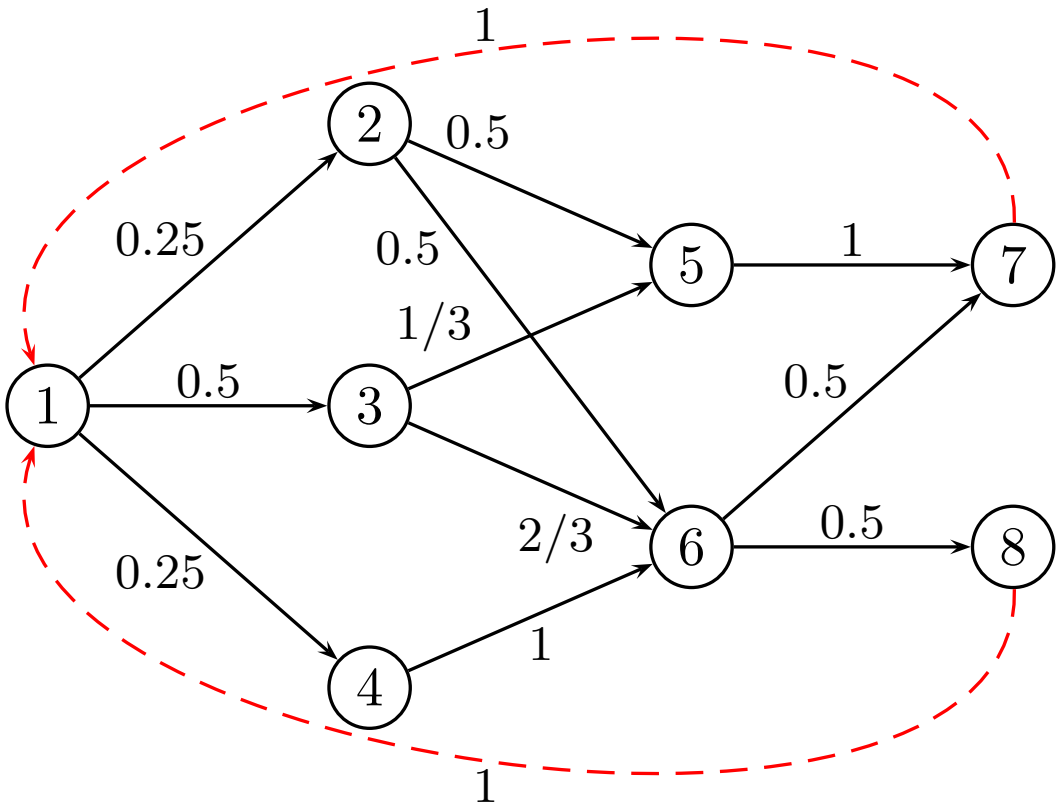
$$C = \cup_{m=1}^{d} J_m, \qquad J_m \cap J_l = \emptyset, \ \ m \neq l$$

并且对任意的$k \in J_m (m = 1, 2, \ldots, d)$有

$$\sum_{j \in J_{m+1}} p_{kj} = 1, \qquad\qquad J_{d+1} := J_1.$$

上面的求和公式说明：从J_m中的任意状态出发,经一步转移必定能进入J_{m+1}中。

例5.3.8Page165



引理

设状态空间的子集C是一个周期为d的不可约闭集。如果对任意的状态$i, j \in C$,有

$$p_{ij}^{(n_1)} > 0, \qquad p_{ij}^{(n_2)} > 0, \qquad (n_2 > n_1)$$

则我们有

$$d | n_2 - n_1.$$

Proof: 由于C是一个不可约闭集则它中的所有状态都互通。于是一定存在某个正整数n使$p_{ji}^{(n)} > 0$. 于是根据CK方程,我们有

$$p_{ii}^{(n_1+n)} \geq p_{ij}^{(n_1)} p_{ji}^{(n)} > 0, \qquad p_{ii}^{(n_2+n)} \geq p_{ij}^{(n_2)} p_{ji}^{(n)} > 0.$$

故$d | n_1 + n$和$d | n_2 + n$,这证明了$d | n_2 - n_1$。

简证(Thm5.3.10): 对任意的状态$i \in C$和$m = 1, \ldots, d$,我们构造状态子集

$$J_m = \{j \in C;\ \exists\, n \geq 0,\ p_{ij}^{(nd+m)} > 0\}.$$

显然我们有$C = \cup_{m=1}^{d} J_m$。现在我们证明:

$$J_m \cap J_l = \emptyset, \quad m \neq l.$$

用反证法假设存在$j \in J_m \cap J_l$,那么由J_m的定义一定存在$n_1, n_2 \geq 0$使

$$p_{ij}^{(n_1 d+m)} > 0, \qquad\qquad p_{ij}^{(n_2 d+l)} > 0.$$

由上面的引理得$d|l-m$,但$1 \leq m, l \leq d$故只有$m = l$。这与$m \neq l$矛盾。

下面我们证明$\forall\ k \in J_m$, 有$\sum_{j\in J_{m+1}} p_{kj} = 1$. 注意到$C$是闭集,故

$$1 = \sum_{j\in C} p_{kj} = \sum_{j\in J_{m+1}} p_{kj} + \sum_{j\in C/J_{m+1}} p_{kj}.$$

仍由$k \in J_m$的定义知存在$n \geq 0$使$p_{ik}^{(nd+m)} > 0$,而对上面的 n及$j \in C/J_{m+1}$,有

$$0 = p_{ij}^{(nd+m+1)} \geq p_{ik}^{(nd+m)} p_{kj} \geq 0.$$

这说明$p_{ik}^{(nd+m)} p_{kj} = 0$.而$p_{ik}^{(nd+m)} > 0$这样只有$p_{kj} = 0$.

唯一性(略)

练习

设$X=\{X_n;\ n\geq 0\}$为周期d的不可约齐次马氏链。那么根据上面的定理我们知道其状态空间S可唯一分解为d个互不相交 的状态子集$J_1,\ldots,J_d$的并,现在定义新的过程

$$Y_n=X_{nd},\qquad\qquad n=0,1,2,\ldots.$$

证明:

(1) $Y=\{Y_n;\ n\geq 0\}$是以$(p_{ij}^{(d)})$为一步转移概率矩阵的齐次马氏链。

(2) 对新马氏链Y而言,J_m $(m=1,2,\ldots,d)$都是不可约闭集且其中的状态都是非周期的。

(3) 如果X中的所有状态都是常返的,那么Y的所有状态也是常返的。

Proof: (1) 事实上我们有

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(Y_{n+1}=j|Y_0=i_0,\ldots,Y_{n-1}=i_{n-1},\ Y_n=i) \\
= \quad & \mathbb{P}(X_{(n+1)d}=j|X_0=i_0,\ X_d=i_0,\ldots,X_{(n-1)d}=i_{n-1},\ X_{nd}=i) \\
= \quad & \mathbb{P}(X_{(n+1)d}=j|X_{nd}=i)=p_{ij}^{(d)} \\
= \quad & \mathbb{P}(Y_{n+1}=j|Y_n=i) \\
= \quad & \mathbb{P}(X_d=j|X_0=i) \\
= \quad & \mathbb{P}(Y_1=j|Y_0=i).
\end{aligned}
$$

Proof: (2) 我们知道对任意的$k \in J_m$, $\sum_{j \in J_{m+1}} p_{kj} = 1$。再根据$J_m$的构造我们一定有

$$\sum_{j \in J_m} p_{kj}^{(d)} = 1, \qquad \forall\, k \in J_m.$$

也就是说：从J_m出发经过d步转移一定可以重新返回J_m。

这样由Lemma5.3.7(page158)知: J_m $(m = 1, \ldots, d)$对Y而言都是闭集。由于X是不可约的, 故对任意的$j, k \in J_m$, 有$j \leftrightarrow k$, 于是存在$N \geq 0$使$p_{jk}^{(N)} > 0$, 这意味着N只能是形如nd的表示。事实上:

对固定的状态i, 由$j \in J_m$, 则存在$n_1 \geq 0$, 使$p_{ij}^{(n_1 d+m)} > 0$. 根据CK方程我们有 $p_{ik}^{(n_1 d+m+N)} \geq p_{ij}^{(n_1 d+m)} p_{jk}^{(N)} > 0$, 由于$k \in J_m$, 故$d | n_1 d + N$. 这证明$d | N$。

因此对Y而言, $j \to k$同理$k \to j$, 故$j \leftrightarrow k$。 这样应用 Lemma 5.3.9 Pg159得: J_m对Y而言是不可约闭集。再应用Thm5.3.5(3)Page156得: 一定存在 $N \geq 1$使

$$p_{ii}^{(nd)} > 0, \qquad p_{ii}^{((n+1)d)} > 0, \quad \forall\, n \geq N.$$

故Y的状态是非周期的。

(3) 设X的所有状态是常返的, 则对任意的$j \in J_m$, 根据周期的定义, 当d不能整除n时, $p_{jj}^{(n)} = 0$。因为$p_{jj}^{(n)} \geq f_{jj}^{(n)}$, 从而$f_{jj}^{(n)} = 0$, 于是

$$1 = f_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(nd)}.$$

因此相对Y而言其状态都是常返的。

转移概率的极限与平稳分布

回顾已经证明的结果

如果马氏链状态j是非常返或零常返的,则对任意的状态$i \in S$,我们有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0.$$

接下来我们讨论: (1) 状态i非常返, j正常返; (2) i, j同属于一个正常返类时 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$的极限问题。

转移概率的极限与平稳分布

极限定理5.4.1

如果状态j正常返, 则对任意的状态i, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd_j+r)} = f_{ij}(r)\frac{d_j}{\mu_{jj}}, \qquad r = 1, 2, \ldots, d_j.$$

其中$f_{ij}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(nd_j+r)}$且满足

$$\sum_{r=1}^{d_j} f_{ij}(r) = f_{ij}.$$

为了证明该极限定理, 我们需要下面的一个引理。

引理

设$\{a_n;\ n \geq 0\}$和$\{b_n;\ n \geq 0\}$都是非负数列. 如果它们满足如下条件:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$ (或$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$但$a_n$有界);

(2) $\lim_{n\to\infty} b_n = b < +\infty$, 那么我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}}{\sum_{m=0}^{n} a_m} = b.$$

极限定理4.5.1的证明

注意到我们有

$$p_{ij}^{(nd_j+r)} = \sum_{m=1}^{n} f_{ij}^{(md_j+r)} p_{jj}^{((n-m)d_j)}.$$

如果我们取

$a_n = f_{ij}^{(nd_j+r)}$ 有界, $\quad b_n = p_{jj}^{(nd_j)} \to b = \dfrac{d_j}{\mu_{jj}},\ n \to \infty,$ by Thm5.3.3 Pp154,

那么

$$p_{ij}^{(nd_j+r)} = \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}.$$

由上面的引理并注意到

$$\sum_{m=0}^{n} a_m = \sum_{m=0}^{n} f_{ij}^{(md_j+r)} \to f_{ij}(r),\ n \to \infty,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd_j+r)} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\sum_{m=0}^{n} a_m \right) \frac{\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}}{\sum_{m=0}^{n} a_m} \right] = b f_{ij}(r) = f_{ij}(r) \frac{d_j}{\mu_{jj}}.$$

推论

设马氏链$X=\{X_n;\ n=0,1,\ldots\}$是不可约齐次马氏链, 且它的每个状态都是正常返和周期为d。于是状态空间S可被唯一分解成$S=\cup_{m=1}^{d}J_m$, 则对任意的状态$i,j\in S$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(nd)}=\begin{cases}\frac{d}{\mu_{jj}}, & \text{若}i,j\text{属于同一个}J_m\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

特别地, 如果周期$d=1$ ($S=J_1$), 则对任意的$i,j\in S$, 我们一定有

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\frac{1}{\mu_{jj}}.$$

在$d=1$的情形下,我们发现$(p_{ij}^{(n)})$的极限存在且与状态i无关, 我们经常记这个极限为π_j, 即

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}}.$$

Proof: 在定理4.5.1中取$r=d$, 则有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd)} &= \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{((n+1)d)} = f_{ij}(d)\frac{d}{\mu_{jj}} \\ &= \frac{d}{\mu_{jj}}\sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{((n+1)d)} = \frac{d}{\mu_{jj}}\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(nd)}.\end{aligned}$$

•如果i,j不属于同一个J_m, 则由J_m的定义知:

$$p_{ij}^{(nd)} = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$ 见本讲义Page100.

注意到$0 \le f_{ij}^{(nd)} \le p_{ij}^{(nd)} = 0$, 故$f_{ij}^{(nd)} = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, 于是 $f_{ij}(d) = 0$.

•如果属于同一个J_m。若d不能整除n, 则$p_{ij}^{(n)}=0$, 从而$f_{ij}^{(n)}=0$。于是

$$f_{ij}(d)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(nd)}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}=f_{ij}.$$

由Lemma5.3.6Page152, 得$f_{ij}=1$, 因此$f_{ij}(d)=1$。

转移概率极限总结

设马氏链状态空间$S = D \cup C^0 \cup C_1^+ \cup C_2^+ \cup \cdots$,其中$D$为非常返状态集, C^0为零常返状态闭集, $C_m^+(m = 1, 2, \ldots)$为正常返状态闭集,则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 0, & j \in D \cup C^0, & i \in S \\ \frac{f_{ij}}{\mu_{jj}}, & j \in C_m^+\text{遍历}(d = 1), & i \in S \\ 0, & j \in C_m^+\text{周期}d > 1, & i \in C^0 \cup C_l^+, l \neq m \\ \text{一般不存在}, & j \in C_m^+\text{周期}d > 1, & i \in D \cup C_m^+. \end{cases}$$

极限分布

设C为互通的遍历状态构成的闭集(不可约闭集), 则我们有

$$\sum_{j\in C}\frac{1}{\mu_{jj}}=1.$$

如果$C=S$, 则$\pi=\{\pi_j=\frac{1}{\mu_{jj}};\ j\in S\}$构成一个概率分布(分布率)。
此时我们称π为马氏链的极限分布。

Proof: 我们注意到:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{jj}} > 0, \qquad \forall\, i, j \in C.$$

因为C是闭集, 则$\sum_{j\in C} p_{ij}^{(n)} = 1,\ \ i \in C$. 根据Fatou引理

$$\sum_{j\in C} \frac{1}{\mu_{jj}} = \sum_{j\in C} \underline{\lim}_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{j\in C} p_{ij}^{(n)} = 1.$$

再根据CK方程, 对任意的自然数m, 我们有$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k\in C} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$.
两边取下极限($n \to \infty$), 由Fatou引理得

$$\frac{1}{\mu_{jj}} \ge \sum_{k\in C} \frac{1}{\mu_{kk}} p_{kj}^{(m)}.$$

下面我们证明：对任意的$j \in C$和m, 都有

$$\frac{1}{\mu_{jj}} = \sum_{k\in C} \frac{1}{\mu_{kk}} p_{kj}^{(m)}.$$

用反证法, 假设存在某个$j_0 \in C$使

$$\frac{1}{\mu_{j_0 j_0}} > \sum_{k \in C} \frac{1}{\mu_{kk}} p_{kj_0}^{(m)}.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\sum_{j \in C} \frac{1}{\mu_{jj}} &> \sum_{j \in C} \left(\sum_{k \in C} \frac{1}{\mu_{kk}} p_{kj}^{(m)} \right) = \sum_{k \in C} \frac{1}{\mu_{kk}} \left(\sum_{j \in C} p_{kj}^{(m)} \right) \\ &= \sum_{k \in C} \frac{1}{\mu_{kk}},\end{aligned}$$

这显然是个矛盾。于是我们证明了 对任意的$j \in C$和m, 都有

$$\frac{1}{\mu_{jj}} = \sum_{k \in C} \frac{1}{\mu_{kk}} p_{kj}^{(m)}.$$

两边取$m \to \infty$(用控制收敛定理(DCT)如何用?), 又注意到$\frac{1}{\mu_{jj}} > 0$, 因此可得我们的结果。

控制收敛定理(Dominated Convergence Theorem)

DCT1

设$\{a_n^{(m)}; n=1,2,\dots\}$是实值数列 ($m\in\mathbb{N}$) 且$\lim_{m\to\infty} a_n^{(m)}$存在。
如果$|a_n^{(m)}|\le b_n$且$\sum_{n=1}^{\infty} b_n<\infty$, 则

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{m\to\infty} a_n^{(m)}\right).$$

对于上面定理的证明, 我们只需注意到:

$$\sum_{k\in C}\left|\frac{1}{\mu_{kk}}p_{kj}^{(m)}\right|\le\sum_{k\in C}\frac{1}{\mu_{kk}}\le 1<\infty.$$

DCT2

设$\{f_n(x); n=1,2,\dots\}$是一列$\mathbb{R}$上的函数且$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$。
如果$|f_n(x)|\le g(x)$且$\int_{\mathbb{R}}|g(x)|dx<\infty$, 则$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx\to\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$。

例题：PAGE196–11

(1) 为什么是马氏链；

(2) 状态空间；

(3) 状态分解;

(4) 计算：$f_{00}^{(2)}$和$f_{00}^{(7)}$?。

平稳分布(不变测度)

平稳分布的定义

设$\pi = \{\pi_j;\ j \in S\}$是一个概率分布, 如果它满足

$$\pi = \pi \mathbf{P}, \quad or \ \ \pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}, \ \ j \in S,$$

则称π是马氏链的一个平稳分布。

平稳分布π还满足

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}^{(n)}, \quad j \in S, \ \ n = 1, 2, \ldots.$$

平稳分布的性质

设$\pi = \{\pi_j;\ j \in S\}$是马氏链$X$一个平稳分布, 如果我们取初始分布为$\pi$: $\mathbb{P}(X_0 = i) = \pi_i$, 则对任意的$n \geq 1$, 我们有

$$\mathbb{P}(X_n = i) = \pi_i, \qquad i \in S.$$

进一步我们有: 对任意$l \geq 2$和m,

$$\mathbb{P}(X_{n_1+m} = i_1, \ldots, X_{n_l+m} = i_l) = \mathbb{P}(X_{n_1} = i_1, \ldots, X_{n_l} = i_l).$$

此时, 马氏链X是严平稳的。

Proof: (1) 显然我们有

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = i) &= \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X_n = i, X_0 = k) \\
&= \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X_n = i | X_0 = k) \mathbb{P}(X_0 = k) \\
&= \sum_{k \in S} \pi_k p_{ki}^{(n)} = \pi_i, \quad i \in S.
\end{aligned}
$$

(2) 利用Thm5.2.3Page142, 我们有

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(X_{n_1+m} = i_1, \ldots, X_{n_l+m} = i_l) \\
= & \underline{\sum_{i_0 \in S} \pi_{i_0} p_{i_0 i_1}^{(n_1+m)} p_{i_1 i_2}^{(n_2-n_1)} \cdots p_{i_{l-1} i_l}^{(n_l-n_{l-1})}} \\
= & \pi_{i_1} p_{i_1 i_2}^{(n_2-n_1)} \cdots p_{i_{l-1} i_l}^{(n_l-n_{l-1})} \\
= & \mathbb{P}(X_{n_1} = i_1)\mathbb{P}(X_{n_2} = i_2 | X_{n_1} = i_1) \\
& \times \mathbb{P}(X_{n_l} = i_l | X_{n_{l-1}} = i_{l-1}) \\
= & \mathbb{P}(X_{n_1} = i_1, \ldots, X_{n_l} = i_l), \qquad \text{By Markov Property.}
\end{aligned}
$$

Thm5.4.1的一个推论

对任意的状态$i \in S$, 我们有下列的极限结果:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)} = \begin{cases} 0, & \text{若}j\text{为非常返或零常返;} \\ \frac{f_{ij}}{\mu_{jj}}, & \text{若}j\text{为正常返.} \end{cases}$$

如果马氏链是不可约的且状态都是常返的, 则这些状态一定是互通因此$f_{ij} = 1$。于是我们根据上面的结果一定有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)} = \frac{1}{\mu_{jj}}.$$

下面我们证明这个推论, 为此我们需要下面的引理。

一个关于数列极限的引理

设$\{a_n;\ n \geq 1\}$是一个数列且存在正整数d使

$$\lim_{m\to\infty} a_{md+r} = b_r, \qquad r = 1, 2, \ldots, d,$$

则我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} a_m = \frac{1}{d} \sum_{r=1}^{d} b_r.$$

Proof:

- 如果状态j为非常返或零常返, 则$\lim_{m\to\infty} p_{ij}^{(m)} = 0, \forall\, i \in S$. 在上面的引理中取$a_m = p_{ij}^{(m)}$和$d = 1$, 则只能有$r = 1$且$b_1 = 0$. 于是根据上面的引理, 我们立即有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)} = b_1 = 0.$$

- 如果状态j为正常返且周期为d_j, 则由Thm5.4.1(P167), 我们有

$$\lim_{m\to\infty} p_{ij}^{(md_j+r)} = f_{ij}(r)\frac{d_j}{\mu_{jj}}, \qquad r = 1, 2, \ldots, d_j.$$

在上面引理中取$a_m = p_{ij}^{(m)}$和$d = d_j$, 则 $b_r = f_{ij}(r)\frac{d_j}{\mu_{jj}}$, 因此有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)} = \frac{1}{d_j} \sum_{r=1}^{d_j} b_r = \frac{1}{d_j} \sum_{r=1}^{d_j} f_{ij}(r)\frac{d_j}{\mu_{jj}} = \frac{f_{ij}}{\mu_{jj}}.$$

概率分布$\{\frac{1}{\mu_{jj}};\ j \in C\}$

设C是一个周期为$d > 1$的<u>正常返状态的不可约闭集</u>, 则$\{\frac{1}{\mu_{jj}};\ j \in C\}$一定是个概率分布, 即 $\sum_{j \in C} \frac{1}{\mu_{jj}} = 1$.

$d = 1$的情形已被Thm5.4.4Page169所证明。

Proof: 根据Thm5.3.10Page160, 我们有分解 $C = \cup_{m=1}^{d} J_m$。
由Coro5.4.1Page168知: $\forall\, i, j \in J_m$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_{jj}}.$$

再根据Thm5.3.11Page161, 我们构造一个新的马氏链

$$Y = \{Y_n := X_{nd};\ n = 0, 1, \ldots\}.$$

于是Y的一步转移概率为

$$p_{y;ij}^{(1)} = p_{ij}^{(d)}.$$

进一步我们有: 对Y而言, 每个J_m都是不可约闭集, 且其中的状态都是非周期的。 于是对Y而言, 有

$$\pi_{y;j} := \lim_{n\to\infty} p_{y;ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_{jj}}, \quad \forall\, i, j \in J_m.$$

对Y, 应用非周期的情形(见Thm5.4.4Page169), 我们有

$$\sum_{j\in J_m}\frac{d}{\mu_{jj}}=\sum_{j\in J_m}\pi_{y;j}=1.$$

因此我们有

$$\sum_{j\in C}\frac{1}{\mu_{jj}}=\sum_{m=1}^{d}\left(\sum_{j\in J_m}\frac{1}{\mu_{jj}}\right)=\frac{1}{d}\sum_{m=1}^{d}\left(\sum_{j\in J_m}\frac{d}{\mu_{jj}}\right)=\frac{1}{d}\sum_{m=1}^{d}1=1.$$

不可约正常返马氏链的平稳分布

设$X = \{X_n;\ n = 0, 1, \ldots\}$是一个不可约齐次马氏链, 如果其状态空间$S$中所有状态都是正常返的, 则$X$有唯一的平稳分布:

$$\{\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}}; \qquad j \in S\}.$$

进一步, 如果S中所有状态都是遍历的, 则这个唯一的平稳分布就是极限分布。

Proof: (1) 因为S是不可约闭集且状态都是正常返, 所以我们根据上面的结果有$\sum_{j\in S}\pi_j=\sum_{j\in S}\frac{1}{\mu_{jj}}=1$。

(2) 我们证明关系$\pi=\pi\mathbf{P}$. 根据CK方程, 我们有

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m+1)}=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k\in S}p_{ik}^{(m)}p_{kj}\right)=\sum_{k\in S}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ik}^{(m)}\right)p_{kj}.$$

因此我们根据Fatou引理有

$$\begin{aligned}\pi_j &= \frac{1}{\mu_{jj}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\times\frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^{n+1}\left(p_{ij}^{(m)}-p_{ij}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m+1)}=\underline{\lim}_{n\to\infty}\sum_{k\in S}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ik}^{(m)}\right)p_{kj}\\ &\geq \sum_{k\in S}\left(\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ik}^{(m)}\right)p_{kj}=\sum_{k\in S}\pi_k p_{kj}.\end{aligned}$$

下面我们证明上面的不等式实际上是等式。我们用反证法, 假设存在某个状态$j_0 \in S$使

$$\pi_{j_0} > \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj_0}.$$

这样我们有

$$\begin{aligned} \sum_{j \in S} \pi_j &> \sum_{j \in S} \left(\sum_{k \in S} \pi_k p_{kj} \right) = \sum_{k \in S} \pi_k \left(\sum_{j \in S} p_{kj} \right) \\ &= \sum_{k \in S} \pi_k. \text{ 这显然是个矛盾。} \end{aligned}$$

(3) π的唯一性将在下面的定理中进行讨论。

一般齐次马氏链的平稳分布

设齐次马氏链的状态空间S分解如下：

$$S = D \cup C^0 \cup C_1^+ \cup C_2^+ \cup \cdots = Q \cup H, \quad (Q = D \cup C^0),$$

其中D是非常返状态集, C^0是零常返状态闭集, C_m^+ $(m = 1, 2, \ldots)$是正常返状态的不可约闭集。假设 $\pi_j > 0,\ j \in S$和$\sum_{j \in S} \pi_j < \infty$, 则$\{\pi_j;\ j \in S\}$为该马氏链的平稳分布的<u>充要条件</u>是: 存在非负数列$\{\lambda_m;\ m = 1, 2, \ldots\}$使

$$(1) \quad \sum_m \lambda_m = 1;$$

$$(2) \quad \pi_j = 0, \quad j \in Q;$$

$$(3) \quad \pi_j = \frac{\lambda_m}{\mu_{jj}}, \quad j \in C_m^+, \ \ m = 1, 2, \ldots.$$

一般齐次马氏链的平稳分布

由上面的定理, 我们很容易得到下面的推论：对于齐次马氏链,

(1) 其平稳分布存在 $\Leftrightarrow$ 其至少存在一个正常返不可约闭集C_m^+。

此时的平稳分布为$\pi_j = \frac{\lambda_m}{\mu_{jj}}$其中$j \in C_m^+$和$\sum_m \lambda_m = 1$.

(2) 其存在唯一的平稳分布 $\Leftrightarrow$ 其恰好只有一个正常返不可约闭集C_1^+。 此时这个唯一的平稳分布为$\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}}$其中$j \in C_1^+$.

(3) 其存在无穷多个平稳分布 $\Leftrightarrow$ 其至少有两个不同的正常返状态的不可约闭集C_m^+, C_n^+。例如只有两个的情形, 则平稳分布为$\pi_j = \frac{\lambda_m}{\mu_{jj}}(\frac{\lambda_n}{\mu_{jj}})$其中$j \in C_m^+(C_n^+)$和$\lambda_m + \lambda_n = 1$ (显然非负的λ_m, λ_n有无穷个取值满足这个方程).

(4) 不可约齐次马氏链存在唯一的平稳分布 $\Leftrightarrow$ 其状态空间S的状态都是正常返的。此时这个唯一的平稳分布为$\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}}$其中$j \in S$.

不可约齐次马氏链的平稳分布存在的另一个充要条件

不可约齐次马氏链的平稳分布存在 $\Leftrightarrow$ 下面的线性方程组

$$z_j = \sum_{i \in S} z_i p_{ij}, \qquad j \in S$$

有非零(非负)的绝对收敛解$\{z_j;\ j \in S\}$ (即$\sum_{j \in S} z_j < +\infty$)。此时，我们还有

$$z_j = \sum_{i \in S} z_i \frac{1}{\mu_{jj}}, \quad j \in S.$$

或写成

$$\frac{1}{\mu_{jj}} = \frac{z_j}{\sum_{i \in S} z_i}, \quad j \in S.$$

Proof:

$\Rightarrow$ 假设该马氏链有平稳分布, 则由(1)知它至少存在一个正常返不可约闭集。由于马氏链不可约, 因此状态空间S就是 这个正常返不可约闭集。根据Thm5.4.6 Page172得到$\{\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}}; j \in S\}$就是平稳分布, 因此根据平稳分布的定义$\pi$就是方程组$z = z\mathbf{P}$的解。

$\Leftarrow$ 假设方程组$z = z\mathbf{P}$具有正的绝对收敛解$z = \{z_j;\ j \in S\}$, 则利用CK方程得

$$z_j = \sum_{i \in S} z_i p_{ij}^{(m)}, \ \ \forall\, j \in S,\ m \geq 1.$$

于是我们有

$$z_j = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} z_j = \sum_{i \in S} z_i \left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)}\right), \ \ \forall\, n \geq 1.$$

根据z的绝对收敛, 我们在上式两边取极限$n \to \infty$得到

$$z_j = \sum_{i \in S} z_i \left(\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)} \right)$$

因为$z = \{z_j;\ j \in S\}$非零, 这意味着存在某个状态$j_0 \in S$使$z_{j_0} \neq 0$.
这样根据上式一定存在某个状态$i_0 \in S$使

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{i_0 j_0}^{(m)} > 0.$$

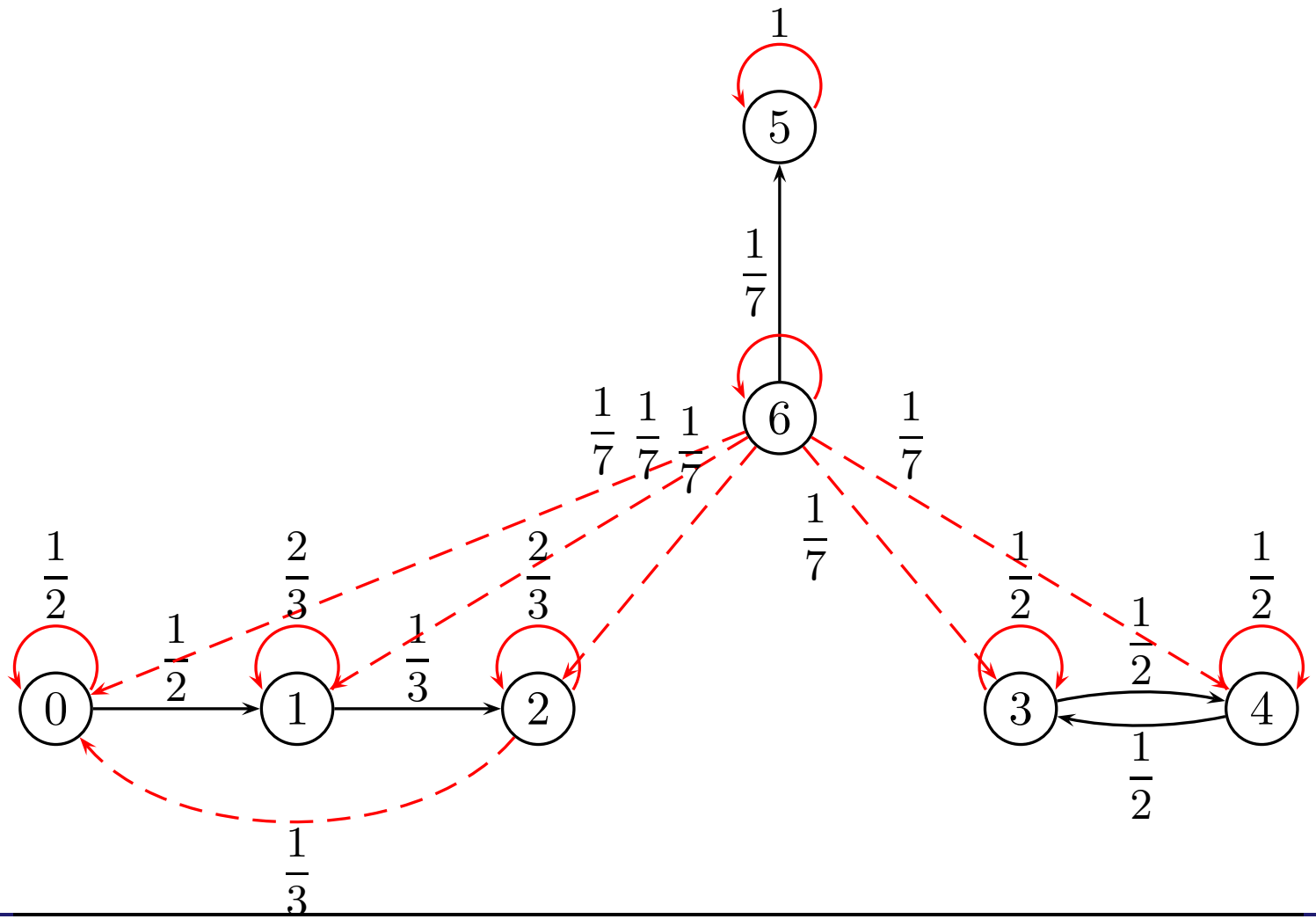
由Lemma5.4.1 Page171得到只能有

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{i_0 j_0}^{(m)} = \frac{f_{i_0 j_0}}{\mu_{j_0 j_0}} > 0, \quad \text{且} j_0 \text{是正常返的。}$$

由于马氏链不可约因此S中所有状态都互通, 故S中所有状态都是正常返的。根据(4)知: 平稳分布存在且唯一并且就是

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}}, \qquad j \in S.$$

例5.4.4Page178



于是这个有限状态马氏链的状态空间分解如下：

$$S = D \cup C_1^+ \cup C_2^+ \cup C_3^+,$$

其中$D = \{6\}$, $C_1^+ = \{0, 1, 2\}$, $C_2^+ = \{3, 4\}$和$C_3^+ = \{5\}$。

与C_1^+对应的一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

与C_2^+, C_3^+对应的一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}_3 = [1].$$

解如下方程组:

$$\pi^{(1)} = \pi^{(1)}\mathbf{P}_1, \qquad \sum_{j=1}^{3} \pi_j^{(1)} = 1;$$

$$\pi^{(2)} = \pi^{(2)}\mathbf{P}_2, \qquad \sum_{j=1}^{2} \pi_j^{(1)} = 1;$$

$$\pi^{(3)} = \pi^{(3)}\mathbf{P}_3, \qquad \pi_1^{(1)} = 1;$$

于是得到非负解

$$\pi^{(1)} = \left\{\frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right\}, \quad \pi^{(2)} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}, \quad \pi^{(3)} = \{1\}.$$

因此平稳分布有无穷多个:

$$\pi = \left\{\frac{2\lambda_1}{8}, \frac{3\lambda_1}{8}, \frac{3\lambda_1}{8}, \frac{\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_2}{2}, \lambda_3, 0\right\},$$

其中λ_i非负($i = 1, 2, 3$)且$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$。