随机过程

Stochastic Processes

stoprocess@yahoo.com.cn

111111

① 均方极限
② 均方连续
③ 均方可导
④ 均方积分
⑤ 均方随机微分方程
⑥ 正态过程的均方分析

均方极限

二阶矩随机变量空间$\mathbb{H}$

设X为概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上的一个**二阶矩**随机变量, 即

$$\Phi_X = \mathbb{E}[|X|^2] < \infty.$$

记

$$\mathbb{H} = \{\text{所有}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})\text{上的二阶矩随机变量}\}.$$

$\mathbb{H}$是一个线性空间

如果过程$X_1,\ X_2 \in \mathbb{H}$, C_1, C_2为常数, 则有

$$C_1 X_1 + C_2 X_2 \in \mathbb{H}.$$

Proof: 我们只需证明

$$\mathbb{E}[|C_1X_1 + C_2X_2|^2] < \infty.$$

事实上我们有

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[|C_1X_1 + C_2X_2|^2\right] \\
= \quad & \mathbb{E}\left[\overline{(C_1X_1 + C_2X_2)}(C_1X_1 + C_2X_2)\right] \\
\leq \quad & |C_1|^2\mathbb{E}[|X_1|^2] + |C_2|^2\mathbb{E}[|X_2|^2] + 2|C_1||C_2|\mathbb{E}[|X_1X_2|] \\
\leq \quad & |C_1|^2\Phi_{X_1} + |C_2|^2\Phi_{X_2} + 2|C_1||C_2|\Phi_{X_1}^{1/2}\Phi_{X_2}^{1/2} \\
< \quad & +\infty.
\end{aligned}$$

均方极限的定义

设$\{X_n;\ n=1,2,\dots\}\subset\mathbb{H}$(即一列二阶矩随机变量)和$X\in\mathbb{H}$。如果

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[|X_n-X|^2\right]=0,$$

则称这列二阶矩随机变量$\{X_n;\ n=1,2,\dots\}$均方收敛于二阶矩随机变量X, 我们记这个极限为

$$X=\mathrm{l.i.m}_{n\to\infty}X_n.$$

均方极限的性质

均方极限的唯一性

设$\{X_n;\ n=1,2,\dots\}\subset\mathbb{H}$和$X,Y\in\mathbb{H}$。如果

$$X=\mathrm{l.i.m}_{n\to\infty}X_n \quad 和 \quad Y=\mathrm{l.i.m}_{n\to\infty}X_n,$$

则

$$\mathbb{P}(X=Y)=1.$$

Proof: 我们只需证明$\mathbb{E}[|X-Y|^2]=0$. 事实上我们有

$$\begin{aligned}
0 &\le \mathbb{E}[|X-Y|^2]=\mathbb{E}[|X-X_n+X_n-Y|^2]\\
&\le \mathbb{E}[|X_n-X|^2]+\mathbb{E}[|X_n-Y|^2]\\
&\quad +2\mathbb{E}^{1/2}[|X_n-X|^2]\mathbb{E}^{1/2}[|X_n-Y|^2]\\
&\to 0,\quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

均方极限的运算性

设$\{X_n;\ n=1,2,\dots\}\subset\mathbb{H}$, $\{Y_n;\ n=1,2,\dots\}\subset\mathbb{H}$和$X,Y\in\mathbb{H}$。如果$X=\mathrm{l.i.m}_{n\to\infty}X_n$和$Y=\mathrm{l.i.m}_{n\to\infty}Y_n$, 则对任意的常数$a,b$,

(1)

$$\mathrm{l.i.m}_{n\to\infty}(aX_n+bY_n)=aX+bY.$$

(2)

$$\lim_{m,n\to\infty}\mathbb{E}[\overline{X}_mY_n]=\mathbb{E}[\overline{X}Y].$$

Lipschitz函数复合

设$\{X_n;\ n=1,2,\ldots\}\subset\mathbb{H}$, $X\in\mathbb{H}$和$X=\mathrm{l.i.m}_{n\to\infty}X_n$。如果$f(x)$是一个确定性的Lipschitz函数,即存在一个$M>0$使

$$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|,$$

则有

$$\mathrm{l.i.m}_{n\to\infty}f(X_n)=f(X).$$

Proof: (1) 证明$f(X_n), f(X) \in \mathbb{H}, \forall\, n = 1, 2, \ldots$. 事实上由于$f$是Lipschitz函数,这意味着$f$满足(线性增长性): 存在一个常数$C > 0$使

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|).$$

因此我们有,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|f(X_n)|^2] &\leq 2C^2(1 + \Phi_{X_n}) < \infty, \\ \mathbb{E}[|f(X)|^2] &\leq 2C^2(1 + \Phi_X) < \infty. \end{aligned}$$

(2) 证明$\mathrm{l.i.m}_{n\to\infty} f(X_n) = f(X)$. 事实上我们有

$$0 \quad \leq \quad \mathbb{E}[|f(X_n) - f(X)|^2] \leq M^2 \mathbb{E}[|X_n - X|^2] \to 0, \quad n \to \infty.$$

因此我们有

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|f(X_n) - f(X)|^2] = 0.$$

推论

设$\{X_n;\ n=1,2,\dots\}\subset\mathbb{H}$, $X\in\mathbb{H}$和$X=\mathrm{l.i.m}_{n\to\infty}X_n$。则有

$$\mathrm{l.i.m}_{n\to\infty}e^{\mathrm{i}uX_n}=e^{\mathrm{i}uX},\quad \mathrm{i}=\sqrt{-1},\ \forall\, u\in\mathbb{R}.$$

这意味着随机变量X_n和X的特征函数收敛,即对任意的$u_1\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{X_n}(u_1)=\varphi_X(u_1).$$

Proof: 注意到对每一个u, 函数$f(x)=e^{\mathrm{i}ux}$是Lipschitz连续的。应用上面的结论和推论3.1.1(课本Page66)。

均方收敛的判别准则

Cauchy判别准则

设$\{X_n;\ n=1,2,\dots\}\subset\mathbb{H}$。则$\{X_n;\ n=1,2,\dots\}$均方收敛当且仅当

$$\lim_{m,n\to\infty}\mathbb{E}[|X_m-X_n|^2]=0.$$

Loéve判别准则

设$\{X_n;\ n=1,2,\dots\}\subset\mathbb{H}$。则$\{X_n;\ n=1,2,\dots\}$均方收敛当且仅当

$$\lim_{m,n\to\infty}\mathbb{E}\left[\overline{X}_m X_n\right]=c,$$

其中c为一常数。

均方大数定律

设$\{X_k;\ k=1,2,\dots\}\subset\mathbb{H}$是相互独立同分布(i.i.d.)的二阶矩随机变量序列,且$\mathbb{E}[X_1]=\mu$,则

$$\mathrm{l.i.m}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k=\mu.$$

Proof: 注意到：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)\right|^2\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[\left|\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mathbb{E}[X_k])\right|^2\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[\overline{\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mathbb{E}[X_k])}\sum_{l=1}^{n}(X_l-\mathbb{E}[X_l])\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k,l=1}^{n}\mathrm{Cov}(X_k,X_l) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D(X_k)=\frac{D(X_1)}{n}\to 0,\quad n\to\infty.
\end{aligned}
$$

随机过程的均方极限

设$X = \{X_t;\ t \in I\}$为定义在$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上的二阶矩过程($\Phi_X(t) < \infty$ $\forall\, t \in I$)。假设随机变量$Y \in \mathbb{H}$, 如果对某个时刻$t_0 \in I$,有

$$\lim_{t \to t_0} \mathbb{E}[|X_t - Y|^2] = 0,$$

则称当$t \to t_0$, 二阶矩过程X均方收敛二阶矩随机变量Y,记为

$$\mathrm{l.i.m}_{t \to t_0} X_t = Y.$$

Loéve判别准则

设$X=\{X_t;\ t\in I\}$为定义在$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$上的二阶矩过程。
当$t\to t_0\in I$, 过程X均方收敛的充要条件为

$$\lim_{s,t\to t_0}\mathbb{E}[\overline{X}_sX_t]=c,$$

其中c为任意有限常数。

注:

这个充要条件还可以写成

$$\lim_{s,t\to t_0}R_X(s,t)=c.$$

均方连续

均方连续的定义

设$X = \{X_t;\ t \in I\}$为定义在$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上的二阶矩过程。我们称过程$X$在$t_0 \in I$时刻均方连续, 如果

$$\mathrm{l.i.m}_{t \to t_0} X_t = X_{t_0}.$$

如果过程X在任意时刻$t \in I$都均方连续,则称过程X在I上均方连续。

练习

根据定义证明:

1. 布朗运动(Wiener过程)W是均方连续的。

2. Poisson过程N是均方连续的。

提示: 只需证明

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0}\mathbb{E}[|W_t-W_{t_0}|^2] &= 0,\\ \lim_{t\to t_0}\mathbb{E}[|N_t-N_{t_0}|^2] &= 0.\end{aligned}$$

均方连续的判别准则

(1)设$X = \{X_t;\ t \in I\}$为一个二阶矩过程,则X在t_0均方连续的充要条件是其相关函数$R_X(s,t)$在(t_0,t_0)处连续。

Proof: 根据Loéve判别准则,X在t_0均方连续的充要条件是

$$\lim_{s,t\to t_0} R_X(s,t) = c.$$

下面我们计算常数c就是$\mathbb{E}[\overline{X_{t_0}}X_{t_0}]$. 事实上如果$X$在$t_0$均方连续,我们

有

$$
\begin{aligned}
0 &\leq |\mathbb{E}[\overline{X_s}X_t] - \mathbb{E}[\overline{X_{t_0}}X_{t_0}]| \\
&\leq \mathbb{E}[|\overline{X_s}X_t - \overline{X_{t_0}}X_{t_0}|] \\
&= \mathbb{E}[|\overline{X_s}X_t - \overline{X_{t_0}}X_t + \overline{X_{t_0}}X_t - \overline{X_{t_0}}X_{t_0}|] \\
&\leq \mathbb{E}[|\overline{(X_s - X_{t_0})}X_t + \overline{X_{t_0}}(X_t - X_{t_0})|] \\
&\leq \mathbb{E}[|\overline{(X_s - X_{t_0})}X_t - \overline{(X_s - X_{t_0})}X_{t_0} + \overline{(X_s - X_{t_0})}X_{t_0} \\
&\quad + \overline{X_{t_0}}(X_t - X_{t_0})|] \\
&= \mathbb{E}[|\overline{(X_s - X_{t_0})}(X_t - X_{t_0}) + \overline{(X_s - X_{t_0})}X_{t_0} + \overline{X_{t_0}}(X_t - X_{t_0})|] \\
&\leq \mathbb{E}^{1/2}[|X_s - X_{t_0}|^2]\mathbb{E}^{1/2}[|X_t - X_{t_0}|^2] \\
&\quad + \mathbb{E}^{1/2}[|X_s - X_{t_0}|^2]\Phi_X^{1/2}(t_0) + \mathbb{E}^{1/2}[|X_t - X_{t_0}|^2]\Phi_X^{1/2}(t_0) \\
&\to 0, \quad s, t \to t_0.
\end{aligned}
$$

由极限的唯一性有$c = \mathbb{E}[\overline{X_{t_0}}X_{t_0}] = R_X(t_0, t_0)$.

(2)设$X=\{X_t;\ t\in I\}$为一个二阶矩过程,则X是均方连续的当且仅当对任意的$t_0\in I$, 其相关函数$R_X(s,t)$在(t_0,t_0)处连续。

均值和方差函数的连续性

如果二阶矩过程$X = \{X_t;\ t \in I\}$是均方连续的,则其均值和方差函数都是连续的,即对任意的$t_0 \in I$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \to t_0} m_X(t) &= m_X(t_0), \\ \lim_{t \to t_0} D_X(t) &= D_X(t_0). \end{aligned}$$

练习

利用均方连续的判别准则证明: 布朗运动(Wiener过程)W和Poisson过程N都是是均方连续的。

提示: 我们已经计算过W和N的相关函数分别为

$$R_W(s,t) = s \wedge t, \qquad R_N(s,t) = \lambda^2 st + \lambda s \wedge t.$$

均方导数

均方导数的定义

设$X = \{X_t;\ t \in I\}$为一个二阶矩过程,如果对某个$t_0 \in I$, 下面的均方极限

$$\mathrm{l.i.m}_{\Delta t \to 0} \frac{X_{t_0+\Delta t} - X_{t_0}}{\Delta t}$$

存在, 则称该均方极限为二阶矩过程X在时刻t_0处的均方导数。我们记这个均方导数为

$$X'_{t_0} \quad \text{or} \quad \frac{dX_t}{dt}|_{t=t_0}.$$

均方导数过程

如果二阶矩过程X在I上的任何一点t上都可导,则称该过程X是均方可导的,对应的均方导数$X' = \{\frac{dX_t}{dt};\ t \in I\}$称为$X$的(一阶)均方导数过程。

相似地,如果(一阶)均方导数过程$X' = \{\frac{dX_t}{dt};\ t \in I\}$也是均方可导的,我们还可以相似定义二阶均方导数过程$X" = \{\frac{d^2X_t}{dt^2};\ t \in I\}$.

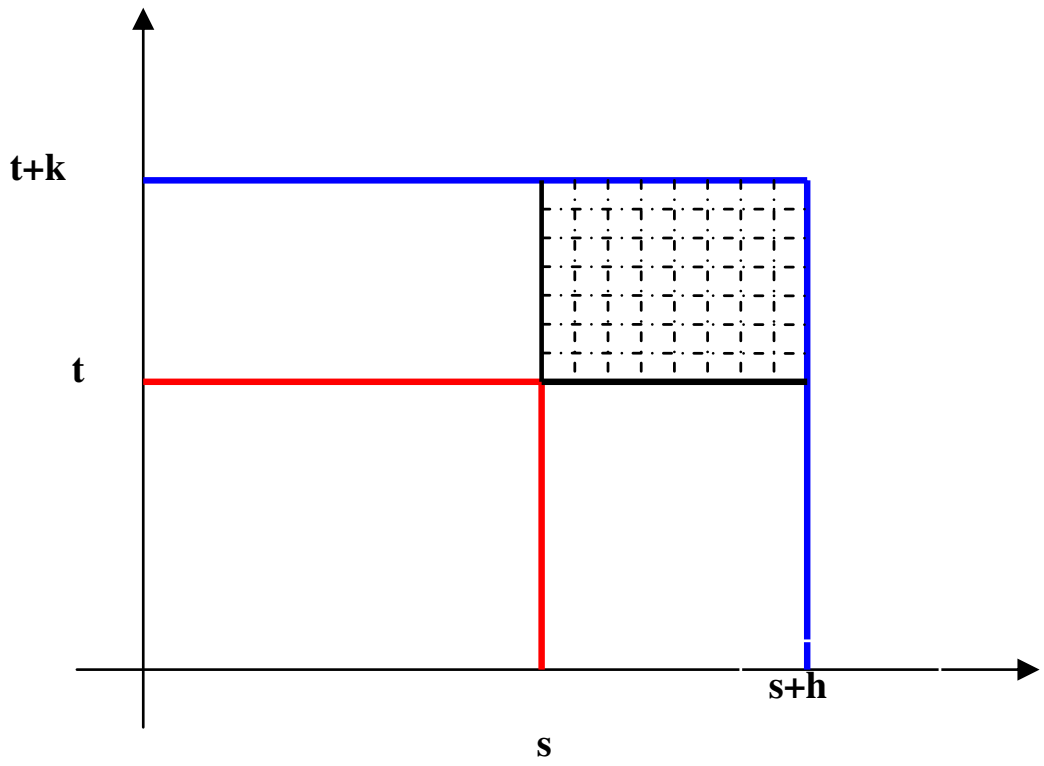
均方可导判别准则

广义二阶可导

设$f(s,t)$是一个确定性的实值二元函数,如果下面的极限

$$\lim_{h,k\to 0}\frac{f(s+h,t+k)-f(s+h,t)-f(s,t+k)+f(s,t)}{hk}$$

存在, 则称该极限为f在点(s,t)处的广义二阶导数。



$$f(s+h,t+k)-f(s+h,t)-f(s,t+k)+f(s,t)$$

均方可导判别准则

设$X = \{X_t;\ t \in I\}$为一个二阶矩过程,则X在某个$t_0 \in I$处均方可导当且仅当其相关函数$R_X(s,t)$在(t_0,t_0)点广义二阶可导。

Proof: 根据定义,二阶矩过程X在t_0处均方可导当且仅当二阶矩随机变量:

$$\left\{Y_n = \frac{X_{t_0+h_n} - X_{t_0}}{h_n};\ n \geq 1\right\} \quad \text{其中} \lim_{n\to\infty} h_n = 0,$$

均方收敛(当$n \to \infty$)。用Loéve判别准则,这等价于

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbb{E}\left[\overline{Y}_m Y_n\right] = c.$$

注意到下面的等式成立:

$$
\begin{aligned}
& \lim_{m,n\to\infty} \mathbb{E}\left[\overline{Y}_m Y_n\right] \\
= \quad & \lim_{h_m,h_n\to 0} \frac{R_X([t_0, t_0+h_m]\times[t_0, t_0+h_n])}{h_m h_n},
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
& R_X([t_0, t_0+h_m]\times[t_0, t_0+h_n]) \\
= \quad & R_X(t_0+h_m, t_0+h_n) - R_X(t_0+h_n, t_0) - R_X(t_0, t_0+h_m) \\
& +R_X(t_0, t_0).
\end{aligned}
$$

这等价于$R_X(s,t)$在(t_0,t_0)点广义二阶可导。

均方可导判别准则

二阶矩过程$X=\{X_t;\ t\in I\}$均方可导的充要条件是其相关函数$R_X(s,t)$在(t,t)上都是广义二阶可导的($\forall\ t\in I$)。

如何判别相关函数$R_X(s,t)$是广义二阶可导的?

相关函数$R_X(s,t)$广义二阶可导的充分条件是其偏导数$\frac{\partial R_X}{\partial s}$和$\frac{\partial R_X}{\partial t}$存在,其二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 R_X}{\partial s\partial t}$存在且连续。必要条件是偏导数$\frac{\partial R_X}{\partial s}$和$\frac{\partial R_X}{\partial t}$存在,其二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 R_X}{\partial s\partial t}$存在且相等。

(均方可导判别准则) 总结

设$X = \{X_t;\ t \in I\}$为一个二阶矩过程和某个时刻$t_0 \in I$,则我们有

(1) 二阶矩过程X在t_0处均方可导的**充分条件**是其相关函数$R_X(s,t)$的偏导数$\frac{\partial R_X}{\partial s}$和$\frac{\partial R_X}{\partial t}$在$(t_0,t_0)$点存在,其二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 R_X}{\partial s \partial t}$在$(t_0,t_0)$点存在且连续。

(2) 二阶矩过程X均方可导的**充分条件**是对任何时刻$t \in I$, 其相关函数R_X的偏导数$\frac{\partial R_X}{\partial s}$和$\frac{\partial R_X}{\partial t}$在$(t,t)$点存在,其二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 R_X}{\partial s \partial t}$在$(t,t)$点存在且连续。

(3) 二阶矩过程X在t_0处均方可导的**必要条件**是其相关函数$R_X(s,t)$的偏导数$\frac{\partial R_X}{\partial s}$和$\frac{\partial R_X}{\partial t}$在$(t_0,t_0)$点存在,其二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 R_X}{\partial s \partial t}$在$(t_0,t_0)$点存在且相等。

(4) 二阶矩过程X均方可导的**必要条件**是 对任意时刻$t \in I$, 其相关函数R_X的偏导数$\frac{\partial R_X}{\partial s}$和$\frac{\partial R_X}{\partial t}$在$(t,t)$点存在,其二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 R_X}{\partial s \partial t}$在$(t,t)$点存在且相等。

均方可导过程的性质

设二阶矩过程$X=\{X_t;\ t\in I\}$均方可导,用$X'=\{\frac{dX_t}{dt};\ t\in I\}$表示其均方可导过程, 则我们有

(1)

$$m_{X'}(t)=\frac{dm_X(t)}{dt}.$$

(2)

$$R_{X'X}(s,t)=\frac{\partial}{\partial s}R_X(s,t),\quad R_{XX'}(s,t)=\frac{\partial}{\partial t}R_X(s,t).$$

(3)

$$R_{X'}(s,t)=\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}R_X(s,t)=\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}R_X(s,t).$$

Proof: 我们回顾下面的结论:

如果$X = \mathrm{l.i.m}_{n\to\infty} X_n$, $Y = \mathrm{l.i.m}_{n\to\infty} Y_n$和$Z$是一个二阶矩随机变量, 则

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n Z] = \mathbb{E}[XZ], \quad \lim_{m,n\to\infty} \mathbb{E}[\overline{X}_m Y_n] = \mathbb{E}[\overline{X}Y].$$

(1)

$$\begin{aligned} m_{X'}(t) &= \mathbb{E}\left[\mathrm{l.i.m}_{h\to 0} \frac{X_{t+h} - X_t}{h}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{m_X(t+h) - m_X(t)}{h} \\ &= \frac{dm_X(t)}{dt}. \end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
R_{X'X}(s,t) &= \mathbb{E}\left[\overline{X'_s}X_t\right] = \mathbb{E}\left[\overline{\mathrm{l.i.m}_{h\to 0}\frac{X_{s+h}-X_s}{h}}X_t\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\mathbb{E}\left[\frac{\overline{X_{s+h}}-\overline{X_s}}{h}X_t\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{R_X(s+h,t)-R_X(s,t)}{h} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}R_X(s,t).
\end{aligned}
$$

(3)和(4)类似于(2)。

n阶均方导数过程的均值函数

$$m_{X^{(n)}}(t) = \frac{d^n m_X(t)}{dt^n}.$$

练习

验证布朗运动(Wiener过程)W和Poisson过程N是否均方可导？

Proof: 我们要用到二阶矩过程均方可导的判别准则。注意到我们已经证明布朗运动(Wiener过程)W和Poisson过程N 都是二阶矩过程且其相关函数为

$$R_W(s,t) = s \wedge t, \qquad R_N(s,t) = \lambda^2 st + \lambda s \wedge t.$$

下面我们验证相关函数的偏导数是否存在。事实上对$t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0^+} \frac{R_W(t+h,t) - R_W(t,t)}{h} &= 0, \\
\lim_{h \to 0^-} \frac{R_W(t+h,t) - R_W(t,t)}{h} &= \lim_{h \to 0^-} \frac{t+h-t}{h} = 1.
\end{aligned}$$

这说明$\frac{\partial R_W(s,t)}{\partial s}$在$(t,t)$并不存在,因此$W$不是均方可导的。同理, N也不是均方可导的。

白噪声过程(White Noise)

我们可以证明

$$\frac{\partial R_W(s,t)}{\partial s} = \begin{cases} 1, & s < t \\ 0, & s > t \end{cases}$$

因此

$$\frac{\partial^2 R_W(s,t)}{\partial s \partial t} = \delta(s-t).$$

同理可证明

$$\frac{\partial^2 R_W(s,t)}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 R_W(s,t)}{\partial t \partial s}.$$

白噪声过程的定义

如果存在某个实值随机过程W'使其相关函数$R_{W'}(s,t)=\delta(s-t)$,则称$W'=\{\frac{dW_t}{dt};\ t\geq 0\}$为白噪声过程。我们进一步称$W'$为$W$的一阶导数过程。

均方可导过程的性质

均方可导→均方连续

如果二阶矩过程$X = \{X_t;\ t \in I\}$均方可导,则其一定均方连续。

Proof: 对任意的时刻$t \in I$, $\frac{dX_t}{dt} \in H$,因此

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \mathbb{E}[|X_{t+h} - X_t|^2] &= \lim_{h\to 0} \mathbb{E}\left[\left|\frac{X_{t+h} - X_t}{h}\right|^2 h^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathrm{l.i.m}_{h\to 0}\left|\frac{X_{t+h} - X_t}{h}\right|^2 \lim_{h\to 0} h^2\right] \\
&= \mathbb{E}[|\frac{dX_t}{dt}|^2 \cdot 0] = 0.
\end{aligned}$$

均方连续$\not\Rightarrow$均方可导

反例：布朗运动(Wiener过程)W和Poisson过程N是均方连续的但不是均方可导的。

均方导数是唯一的

如果二阶矩过程$X = \{X_t;\ t \in I\}$均方可导,则对每一个$t \in I$, 其均方导数$\frac{dX_t}{dt}$在概率1下唯一的。

Proof: 均方极限在概率1下是唯一的。

均方可导运算法则

设a, b为有限常数,则

$$\frac{d(aX_t + bY_t)}{dt} = a\frac{dX_t}{dt} + b\frac{dY_t}{dt}.$$

设$f(t)$是I上普通的可导函数,则我们有

$$\frac{d(f(t)X_t)}{dt} = \frac{df(t)}{dt}X_t + f(t)\frac{dX_t}{dt}.$$

均方可导运算法则

如果二阶矩过程$X=\{X_t;\ t\in I\}$均方可导且对每一个时刻$t\in I$有$\frac{dX_t}{dt}=0$,则有对每一个$t\in I$,存在一个随机变量Y使

$$\mathbb{P}(X_t=Y)=1.$$

Proof: 由于二阶矩过程X均方可导,则其相关函数$R_X(s,t)$的偏导数$\frac{\partial R_X(s,t)}{\partial s}$和$\frac{\partial R_X(s,t)}{\partial t}$均存在。于是对于任意$s\neq t\in I$, 由中值定理和均方可导过程的性质得($u_1,u_2$均在$s$和$t$之间)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|X_t-X_s|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\overline{(X_t-X_s)}(X_t-X_s)\right] \\
&= [R_X(t,t)-R_X(t,s)]-[R_X(s,t)-R_X(s,s)] \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial t}R_X(t,u_1)-\frac{\partial}{\partial t}R_X(s,u_2)\right](t-s) \\
&= \left(\mathbb{E}[\overline{X}_t\frac{dX_{u_1}}{dt}]-\mathbb{E}[\overline{X}_2\frac{dX_{u_2}}{dt}]\right)(t-s)=(0-0)(t-s)=0.
\end{aligned}$$

均方积分

均方积分的定义

设$X=\{X_t;\ t\in[a,b]\}$为一个二阶矩过程, $f(s,u)$为$[a,b]\times U$上的一个确定性函数。对区间$[a,b]$作一任意划分:

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b,\quad \Delta_n=\max_{1\le k\le n}(t_k-t_{k-1})\to 0,\ n\to\infty.$$

对每一个$n\ge 1$, 取任意的一点$t_k^*\in[t_{k-1},t_k]$, 考虑和式:

$$S_n(u)=\sum_{k=1}^{n}f(t_k^*,u)X_{t_k^*}\Delta t_k\in H,\quad \Delta t_k=t_k-t_{k-1}.$$

如果和式序列$(S_n(u);\ n\ge 1)$的均方极限$Y_u=\mathrm{l.i.m}_{n\to\infty}S_n(u)$存在,则称这个均方极限$Y_u$为$\{f(t,u)X_t;\ t\in[a,b]\}$在区间$[a,b]$上的均方积分,记

$$Y_u=\int_a^b f(t,u)X_t dt,\quad u\in U.$$

广义均方积分的定义

设$\int_a^b f(t,u)X_t dt$为$\{f(t,u)X_t;\ t\in[a,b]\}$在区间$[a,b]$上的均方积分,则广义均方积分定义为: 对固定的$u\in U$,

$$\begin{aligned}
\int_a^{\infty} f(t,u)X_t dt &= \mathrm{l.i.m}_{b\to\infty}\int_a^b f(t,u)X_t dt,\\
\int_{-\infty}^{b} f(t,u)X_t dt &= \mathrm{l.i.m}_{a\to-\infty}\int_a^b f(t,u)X_t dt,\\
\int_{-\infty}^{\infty} f(t,u)X_t dt &= \mathrm{l.i.m}_{b\to\infty}\int_{-\infty}^b f(t,u)X_t dt.
\end{aligned}$$

均方可积的判别准则

$\{f(t,u)X_t;\ t\in[a,b]\}$在区间$[a,b]$上均方可积的**充分条件**是: 对固定的$u\in U$,

$$\int_a^b\int_a^b \overline{f(s,u)}f(t,u)R_X(s,t)dsdt \text{ 存在。}$$

这里a,b可以为$+\infty$和$-\infty$。

Proof: 根据均方积分的定义, 如果对固定的$u \in U$,均方极限

$$\mathrm{l.i.m}_{n\to\infty} S_n(u) = \mathrm{l.i.m}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k^*, u) X_{t_k^*} \Delta t_k$$

存在,则$\{f(t,u)X_t;\ t \in [a,b]\}$在区间$[a,b]$上一定均方可积。 根据Loéve判别准则(本讲稿Page11), 我们有$\mathrm{l.i.m}_{n\to\infty} S_n(u)$存在当且仅当

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbb{E}\left[\overline{S_m(u)} S_n(u)\right] \text{ 存在。}$$

注意到$f(t,u)$是非随机的,则

$$
\begin{aligned}
& \lim_{m,n\to\infty} \mathbb{E}\left[\overline{S_m(u)}S_n(u)\right] \\
= & \lim_{\Delta_n,\Delta_n'\to 0} \mathbb{E}\left[\overline{\sum_{l=1}^{n} f(s_l^*,u)X_{s_l^*}\Delta s_l}\sum_{k=1}^{n} f(t_k^*,u)X_{t_k^*}\Delta t_k\right] \\
= & \lim_{\Delta_n,\Delta_n'\to 0} \sum_{k,l=1}^{n} \overline{f(s_l^*,u)}f(t_k^*,u)\mathbb{E}\left[\overline{X_{s_l^*}}X_{t_k^*}\right]\Delta s_l\Delta t_k \\
= & \lim_{\Delta_n,\Delta_n'\to 0} \sum_{k,l=1}^{n} \overline{f(s_l^*,u)}f(t_k^*,u)R_X(s_l^*,t_k^*)\Delta s_l\Delta t_k \\
= & \int_a^b\int_a^b \overline{f(s,u)}f(t,u)R_X(s,t)dsdt,
\end{aligned}
$$

其中$[a,b]$的另一划分为

$$a=s_0<s_1<\cdots<s_{n-1}<s_n=b,\quad \Delta_n'=\max_{1\le k\le n}(s_k-t_{s-1})\to 0,\ n\to\infty.$$

练习

验证布朗运动(Wiener过程)W和Poisson过程N是否在有限时间区间$[a,b]\subset[0,\infty)$均方可积?

提示：只需考虑下面积分是否存在:

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_a^b R_W(s,t)dsdt &= \int_a^b\int_a^b s\wedge tdsdt = 2\int_a^b\left(\int_a^{b\wedge t} sds\right)dt\\ \int_a^b\int_a^b R_N(s,t)dsdt &= \int_a^b\int_a^b \lambda^2 stdsdt + \lambda\int_a^b\int_a^b s\wedge tdsdt.\end{aligned}$$

均方积分的性质

均方连续的二阶矩过程$X=\{X_t;\ t\in[a,b]\}$在有限时间区间$[a,b]$上均方可积。

Proof: 在上面的假设下X的相关函数$R_X(s,t)$在$[a,b]^2$上是连续的,这意味着积分

$$\int_a^b\int_a^b R_X(s,t)dsdt \text{ 存在。}$$

均方积分的运算性质

设$\{f(t,u)X_t;\ t\in[a,b]\}$和$\{g(t,u)Y_t;\ t\in[a,b]\}$在区间$[a,b]$上都均方可积, 则对任意的常数$\alpha,\beta$有

$$\int_a^b(\alpha f(t,u)X_t+\beta g(t,u)Y_t)dt=\alpha\int_a^b f(t,u)X_tdt+\beta\int_a^b \alpha g(t,u)Y_tdt.$$

均方积分的运算性质

设$\{f(t,u)X_t;\ t\in[a,b]\}$在区间$[a,b]$上均方可积, 则对任意的$c\in(a,b)$有

$$\int_a^b f(t,u)X_t dt = \int_a^c f(t,u)X_t dt + \int_c^b f(t,u)X_t dt.$$

均方积分过程的数字特征

设积分

$$\int_a^b \int_a^b \overline{f(s,u)} f(t,u) R_X(s,t) ds dt \text{ 存在},$$

则均方积分过程:

$$Y_u = \int_a^b f(t,u) X_t dt, \quad u \in U$$

的数字特征为:

(1)

$$m_Y(u) = \int_a^b f(t,u) m_X(t) dt, \quad u \in U.$$

(2)

$$R_Y(u,v) = \int_a^b \int_a^b \overline{f(s,u)} f(t,v) R_X(s,t) ds dt, \quad u,v \in U,$$

(3)

$$\Phi_Y(u) = \int_a^b \int_a^b \overline{f(s,u)} f(t,u) R_X(s,t) ds dt,$$

(4)

$$C_Y(u,v) = \int_a^b \int_a^b \overline{f(s,u)} f(t,v) C_X(s,t) ds dt,$$

(5)

$$D_Y(u) = \int_a^b \int_a^b \overline{f(s,u)} f(t,u) C_X(s,t) ds dt.$$

Proof: 我们回顾下面的结论:

如果$X = \mathrm{l.i.m}_{n\to\infty} X_n$, $Y = \mathrm{l.i.m}_{n\to\infty} Y_n$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X], \qquad \lim_{m,n\to\infty} \mathbb{E}[\overline{X}_m Y_n] = \mathbb{E}[\overline{X} Y].$$

这里我们仅证明(1), 其余的类似。我们注意到

$$\int_a^b f(t,u) X_t dt = \mathrm{l.i.m}_{n\to\infty} Y_n = \mathrm{l.i.m}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k^*, u) X_{t_k^*} \Delta t_k.$$

(1)

$$
\begin{aligned}
m_Y(u) &= \mathbb{E}\left[\int_a^b f(t,u)X_t dt\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathrm{l.i.m}_{n\to\infty} Y_n\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_n] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k^*, u)\mathbb{E}[X_{t_k^*}]\Delta t_k \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k^*, u) m_X(t_k^*)\Delta t_k, \quad \text{Riemann integral} \\
&= \int_a^b f(t,u) m_X(t) dt.
\end{aligned}
$$

均方积分过程数字特征的估计

设二阶矩过程$X=\{X_t;\ t\in[a,b]\}$均方连续($[a,b]$是有限的时间区间),则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|\int_a^b X_t dt\right|^2\right] &\leq \left(\int_a^b \Phi_X^{1/2}(t)dt\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b \Phi_X(t)dt \\ &\leq (b-a)^2 \max_{t\in[a,b]}\Phi_X(t).\end{aligned}$$

Proof: 我们仅证明第一个不等式成立。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\int_a^b X_t dt\right|^2\right] &= \int_a^b\int_a^b R_X(s,t)dsdt = \int_a^b\int_a^b \mathbb{E}[\overline{X_s}X_t]dsdt \\
&\leq \int_a^b\int_a^b \mathbb{E}^{1/2}[|X_s|^2]\mathbb{E}^{1/2}[|X_t|^2]dsdt \\
&= \left(\int_a^b \mathbb{E}^{1/2}[|X_t|^2]dt\right)^2 \\
&= \left(\int_a^b \Phi_X^{1/2}(t)dt\right)^2 .
\end{aligned}
$$

均方不定积分

均方不定积分的定义

设$X = \{X_t;\ t \in [a,b]\}$为一个均方连续的二阶矩过程,定义一个均方积分过程:

$$Y_t = \int_a^t X_s ds, \quad t \in [a,b],$$

则称$Y = \{Y_t;\ t \in [a,b]\}$为时间区间$[a,b]$上的均方不定积分。

均方不定积分过程的性质

设$X=\{X_t;\ t\in[a,b]\}$为一个均方连续的二阶矩过程,则均方不定积分过程Y在$[a,b]$上均方可导,且对每个$t\in[a,b]$,

(1)

$$\mathbb{P}[\frac{dY_t}{dt}=X_t]=1.$$

(2)

$$m_Y(t)=\int_a^t m_X(s)ds.$$

(3)

$$R_Y(s,t)=\int_a^s\int_a^t R_X(u,v)dudv.$$

Proof: (1)

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{E}[|\frac{dY_t}{dt} - X_t|^2] \\
&= \mathbb{E}\left[\left|\mathrm{l.i.m}_{h\to 0}\frac{Y_{t+h}-Y_t}{h} - X_t\right|^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left|\mathrm{l.i.m}_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}(X_s - X_t)ds\right|^2\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\mathbb{E}\left[\left|\int_t^{t+h}(X_s - X_t)ds\right|^2\right] \\
&\leq \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}h^2 \max_{s\in[t,t+h]}\mathbb{E}\left[|X_s - X_t|^2\right] = 0.
\end{aligned}
$$

这意味着(1)成立同时也证明了Y_t是均方可导的且其均方导数就为X_t。

(2)

$$m_Y(t) = \mathbb{E}\left[\int_a^t X_s ds\right] = \int_a^t \mathbb{E}[X_s]ds = \int_a^t m_X(s)ds.$$

(3)

$$\begin{aligned} R_Y(s,t) &= \mathbb{E}\left[\int_a^t \int_a^s \overline{X_u} X_v du dv\right] \\ &= \int_a^t \int_a^s \mathbb{E}\left[\overline{X_u} X_v\right] du dv \\ &= \int_a^s \int_a^t R_X(u,v) du dv. \end{aligned}$$

均方不定积分过程的运算性质

设$X=\{X_t;\ t\in[a,b]\}$为一个均方可导的二阶矩过程,且其导数过程$X'=\{\frac{dX_t}{dt};\ t\in[a,b]\}$在$[a,b]$上均方连续,则

$$\int_a^b \frac{dX_s}{ds}ds = X_b - X_a.$$

练习

设$W=\{W_t;\ t\geq 0\}$和$N=\{N_t;\ t\geq 0\}$分别表示布朗运动(Wiener过程)和参数为λ的Poisson过程,求不定均方积分

$$\int_0^t W_s ds, \qquad \text{和} \quad \int_0^t N_s ds$$

的数字特征。

Answer: 我们仅计算$Y_t = \int_0^t W_s ds$.

$$
\begin{aligned}
m_Y(t) &= \mathbb{E}\left[\int_0^t W_s ds\right] = \int_0^t m_W(s) ds = 0. \\
R_Y(s,t) &= \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_0^s W_u W_v du dv\right] = \int_0^t \int_0^s R_W(u,v) du dv \\
&= \int_0^t \int_0^s u \wedge v du dv = \frac{(t \wedge s)^2}{6}(3(s \vee t) - t \wedge s). \\
C_Y(s,t) &= R_Y(s,t) - m_Y(s) m_Y(t) = R_Y(s,t). \\
D_Y(t) &= \Phi_Y(t) = R_Y(t,t).
\end{aligned}
$$

均方随机微分方程

解下面的均方随机微分方程

设$Y=\{Y_t;\ t\geq t_0\}$均方连续, $a(t)$是一个确定性函数, X_0为二阶矩随机变量, 则下面的一阶线性均方随机微分方程:

$$\begin{cases} \frac{dX_t}{dt}+a(t)X_t=Y_t, \quad t\geq t_0, \\ X_{t_0}=X_0 \end{cases} \tag{1}$$

有解

$$X_t=X_0\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a(u)du\right)+\int_{t_0}^{t}Y_s\exp\left(-\int_{s}^{t}a(u)du\right)ds,\ \ t\geq t_0.$$

Proof: 我们主要应用下面的均方导数和积分的运算性质:
设$f(t)$是I上确定性的可导函数,则

$$\frac{d(f(t)X_t)}{dt} = \frac{df(t)}{dt}X_t + f(t)\frac{dX_t}{dt}$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{d}{dt}\int_a^t X_s ds = X_t\right) = 1.$$

一个直观解法

对每一个$\omega \in \Omega$,我们考虑下面的常微分方程(ODE):

$$\begin{cases} \frac{dX_t(\omega)}{dt} + a(t)X_t(\omega) = Y_t(\omega), \quad t \geq t_0, \\ X_{t_0}(\omega) = X_0(\omega). \end{cases}$$

均方随机微分方程的数字特征

均方随机微分方程(2)的均值函数和相关函数满足下面的常微分方程(ODE):

$$\begin{cases} \frac{dm_X(t)}{dt} + a(t)m_X(t) = m_Y(t), \quad t \geq t_0, \\ m_X(t_0) = \mathbb{E}[X_0], \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial R_X(s,t)}{\partial t} + a(t)R_X(s,t) = R_{XY}(s,t), \quad t \geq t_0, \\ R_X(s,t_0) = \mathbb{E}[\overline{X_s}X_0], \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial R_{XY}(s,t)}{\partial s} + \overline{a(s)}R_{XY}(s,t) = R_Y(s,t), \quad t \geq t_0, \\ R_X(t_0,t) = \mathbb{E}[\overline{X_0}Y_t]. \end{cases}$$

Proof: 1th方程: 对方程(2)两边取数学期望,并利用

$$\mathbb{E}[\frac{dX_t}{dt}] = \frac{dm_X(t)}{dt}.$$

2nd方程: 对方程(2)两边左乘$\overline{X_s}$然后取数学期望,并利用

$$R_{XX'}(s,t) = \mathbb{E}\left[\overline{X_s}\frac{dX_t}{dt}\right] = \frac{\partial R_X(s,t)}{\partial t}.$$

3rd方程: 对方程(2)取共轭, 则有

$$\begin{cases} \frac{d\overline{X}_s}{ds} + \overline{a(s)}\overline{X}_s = \overline{Y}_s, \quad s \geq t_0, \\ \overline{X}_{t_0} = \overline{X_0}, \end{cases}$$

再对上面的方程两边右乘X_t,然后取数学期望，并利用

$$R_{X'X}(s,t) = \mathbb{E}\left[\overline{\frac{dX_s}{ds}} X_t\right] = \frac{\partial R_X(s,t)}{\partial s}.$$

练习

设$W=\{W_t;\ t\geq 0\}$是一个布朗运动(Wiener过程), a是一个常数, 求下面一阶线性均方随机微分方程解得均值函数和相关函数:

$$\begin{cases} \frac{dX_t}{dt}+aX_t=W_t, \\ X_0=0. \end{cases}$$

简证: 上面方程的解为

$$X_t=\int_0^t W_s e^{-a(t-s)}ds, \qquad t\geq 0.$$

故我们有

$$
\begin{aligned}
m_X(t) &= \int_0^t m_W(s)e^{-a(t-s)}ds = 0 \\
R_X(s,t) &= \mathbb{E}\left[\overline{X}_s X_t\right] = \mathbb{E}\left[\overline{\int_0^s W_u e^{-a(s-u)}du}\int_0^t W_v e^{-a(t-v)}dv\right] \\
&= e^{-a(s+t)}\int_0^t\int_0^s R_W(u,v)e^{a(u+v)}dudv \\
&= e^{-a(s+t)}\int_0^t\int_0^s (u\wedge v)e^{a(u+v)}dudv.
\end{aligned}
$$

正态过程的随机分析

n维正态序列的均方极限仍是正态

对每一个$m \geq 1$, 设$\mathbf{X}^{(m)} = (X_1^{(m)}, \ldots, X_n^{(m)})$为实值$n$正态随机变量, 如果

$$\mathrm{l.i.m}_{m\to\infty} X_k^{(m)} = X_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

则$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$为$n$正态随机变量。

Proof: 我们设

$$
\begin{aligned}
\mu^{(m)} &= \mathbb{E}[\mathbf{X}^{(m)}] = (\mu_1^{(m)}, \ldots, \mu_n^{(m)}) \\
\mu &= \mathbb{E}[\mathbf{X}] = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \\
\mathbf{C}^{(m)} &= \left(\mathrm{Cov}(X_i^{(m)}, X_j^{(m)})\right)_{1\le i,j\le n} = (C_{ij}^{(m)})_{1\le i,j\le n}, \\
\mathbf{C} &= (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1\le i,j\le n} = (C_{ij})_{1\le i,j\le n}.
\end{aligned}
$$

由于$\mathrm{l.i.m}_{m\to\infty} X_k^{(m)} = X_k$,则

$$
\lim_{m\to\infty} \mu^{(m)} = \mu, \qquad \lim_{m\to\infty} \mathbf{C}^{(m)} = \mathbf{C}.
$$

下面计算$\mu^{(m)}$的特征函数($\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_n)$),

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{X}^{(m)}}(\mathbf{u}) &= \exp\left(\mathrm{i}\mu^{(m)}\mathbf{u}'-\frac{1}{2}\mathbf{u}\mathbf{C}^{(m)}\mathbf{u}'\right)\\ &\to \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})=\exp\left(\mathrm{i}\mu\mathbf{u}'-\frac{1}{2}\mathbf{u}\mathbf{C}\mathbf{u}'\right),\end{aligned}$$

用课本推论3.1.2, Page67.

正态过程的均方导数仍是正态过程

设$X=\{X_t;t\in I\}$为实值均方可导正态过程, 则其(一阶)均方可导过程$X'=\{\frac{dX_t}{dt};\ t\in I\}$也是正态过程。

Proof: 我们只需证明对任意的$n\geq 1$, $t_1,\ldots,t_n\in I$, 随机向量$(\frac{dX_{t_1}}{dt},\ldots,\frac{dX_{t_n}}{dt})$服从$n$维正态。设$h$充分小,考虑

$$\begin{aligned}&\left(\frac{X_{t_1+h}-X_{t_1}}{h},\ldots,\frac{X_{t_n+h}-X_{t_n}}{h}\right)\\=\quad&(X_{t_1},X_{t_1+h},\ldots,X_{t_n},X_{t_n+h})_{1\times 2n}\times A_h,\end{aligned}$$

其中

$$A_h = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{h} \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$$

这意味着

$$\left(\frac{X_{t_1+h}-X_{t_1}}{h},\ldots,\frac{X_{t_n+h}-X_{t_n}}{h}\right)$$

是一个n 维正态,由于X均方可导,即

$$\mathrm{l.i.m}_{h\to 0}\frac{X_{t_k+h}-X_{t_k}}{h}=\frac{dX_{t_k}}{dt},\quad k=1,\ldots,n,$$

因此均方导数过程也是正态过程。

正态过程的均方导数过程的特征函数

设$X=\{X_t;t\in I\}$为实值均方可导正态过程, 则其(一阶)均方可导过程$X'=\{\frac{dX_t}{dt};\ t\in I\}$的特征函数为

$$\begin{aligned}&\varphi_{X'}(t_1,\ldots,t_n;u_1,\ldots,u_n)\\ =\quad&\exp\left(\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}u_k\frac{dm_X(t_k)}{dt}-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}u_ku_l\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}C_X(t_k,t_l)\right).\end{aligned}$$

Proof: 只需计算均方导数过程的均值函数$m_{X'}(t)$和协方差函数$C_{X'}(s,t)$. 事实上,我们有

$$m_{X'}(t)=\frac{dm_X(t)}{dt},\qquad C_{X'}(s,t)=\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}C_X(s,t).$$

正态过程的均方不定积分过程是正态过程

设$X=\{X_t;t\in I\}$为实值均方连续正态过程, 则其均方不定积分过程$Y=\{\int_a^t X_s ds;\ t\in I\}$也是正态过程,且其特征函数为

$$\begin{aligned}&\varphi_Y(t_1,\ldots,t_n;u_1,\ldots,u_n)\\ =\quad &\exp\left(\mathrm{i}\sum_{k=1}^n u_k\int_a^{t_k} m_X(s)ds-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^n u_k u_l\int_a^{t_k}\int_a^{t_l} C_X(u,v)dudv\right).\end{aligned}$$

Proof: 关于均方不定积分过程的正态性与上面定理类似。对于均方不定积分的特征函数 我们只需计算均方积分过程的均值函数$m_Y(t)$和协方差函数$C_Y(s,t)$. 事实上,我们有

$$m_Y(t)=\int_a^t m_X(s)ds,\qquad C_Y(s,t)=\int_a^s\int_a^t C_X(u,v)dudv.$$