随机过程

Stochastic Processes

stoprocess@yahoo.com.cn

111111

① 随机过程的定义
② 随机过程举例
③ 有限维分布函数
④ 数字特征
⑤ 二维随机过程
⑥ 二维随机过程的数字特征
⑦ 复值随机过程
⑧ 复值随机过程的数字特征
⑨ 二维复值随机过程
⑩ 几个重要随机过程的性质

随机过程的定义

什么是随机过程: Stochastic Processes?

设$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$是一个概率空间, I表示一个索引集合。对每个索引参数$t \in I$, X_t是 定义在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上的随机变量,则我们称$X = \{X_t,\ t \in I\}$为在该概率空间上的随机过程。

注释

- 由定义, 随机过程$X_t(\omega) : I \times \Omega \to \mathbb{R}$上的可测函数,
- 索引集合I可以取不同类型的集合, 例如: $I = [0, \infty)$, $I = \{0\} \cup \mathbb{N}$, 甚至可以是$I = [0, \infty) \times \mathbb{R}$。

状态空间: State Space

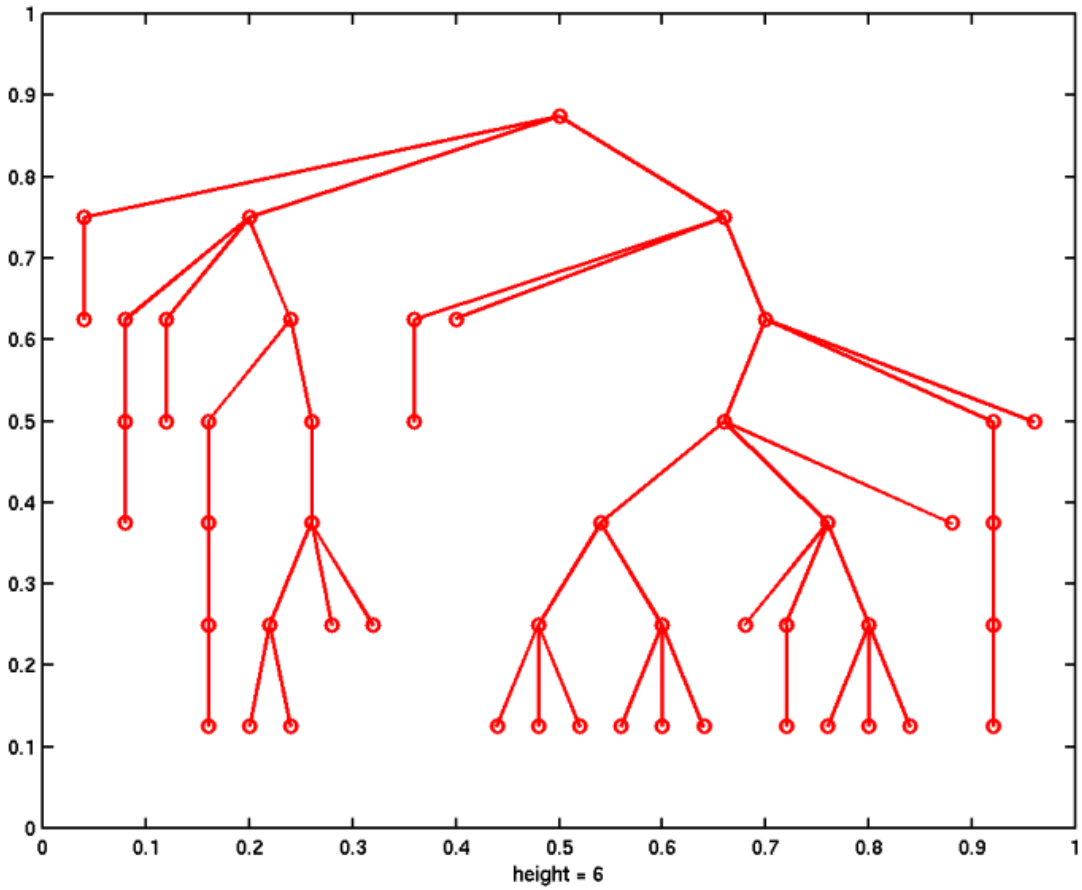
当(t, ω)变化时, $X_t(\omega)$所有取值的全体。

样本轨道: Sample Path

固定$\omega \in \Omega$, 关于时间的函数$t \to X_t(\omega)$称为随机过程X的样本轨道。

随机过程举例

1. 简单分枝过程: Simple Branching Process



Z_n–第n代的粒子个数 (随机变量)

$Z_{n,j}$–第n代第j个粒子产生的后代个数 (i.i.d. 随机变量)

于是我们有

$$Z_{n+1} = Z_{n,1} + Z_{n,2} + \cdots + Z_{n,Z_n}.$$

显然$Z = \{Z_n;\ n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$是一个离散时间的随机过程。

2. Poisson过程: Poisson Process

我们称随机过程$N = \{N_t;\ t \geq 0\}$为Poisson过程, 如果它满足：

(1) $N_0 = 0$,

(2) 对每个固定的时间$t > 0$, r.v. N_t服从参数为λt的Poisson分布,即

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}, \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

(3) 对任一时间对$t > s > 0$, r.v.s $N_t - N_s$与N_{t-s}同分布, 且独立于$(N_u;\ u \leq s)$.

Poisson过程在金融建模和排队模型$M/M/1$和$M/G/1$中有重要应用。

3. 复合Poisson风险过程: Compound Poisson Risk Process

我们称随机过程$X = \{X_t;\ t \geq 0\}$为复合Poisson风险过程, 如果它可以写成:

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} U_i, \quad (\sum_{i=1}^{0} U_i = 0)$$

其中

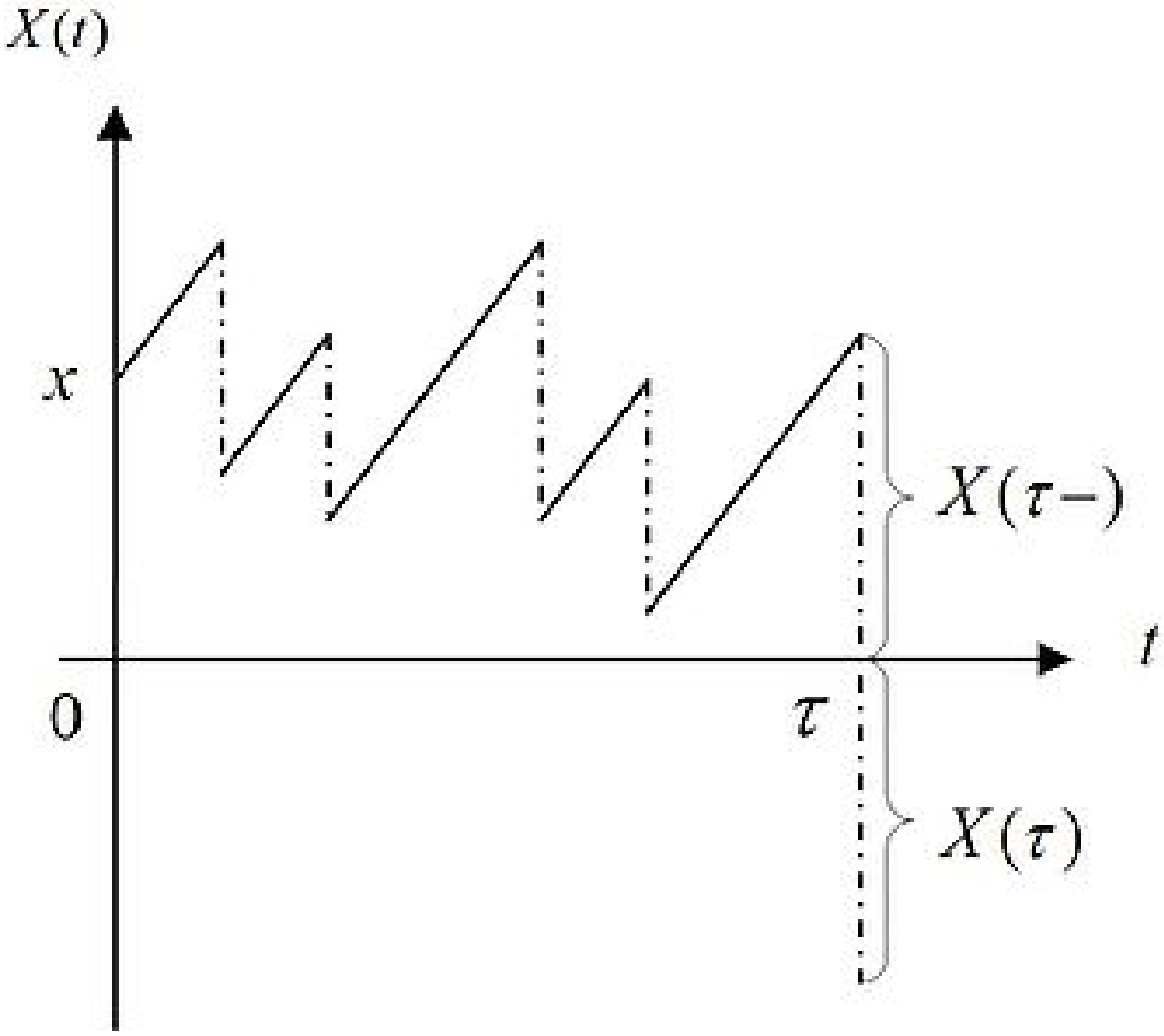
x–初始准备金

c–线性收益率

$N = \{N_t;\ t \geq 0\}$—-Poisson过程($[0, t]$时间段内投保的人数)

$(U_i;\ i \geq 1)$—-个人赔付(i.i.d.随机变量)且独立于N.

复合Poisson风险过程的样本轨道



4. 布朗运动: Brownian Motion (Wiener Process)

我们称随机过程$W = \{W_t;\ t \geq 0\}$为(标准)布朗运动, 如果它满足：

(1) $W_0 = 0$,

(2) 对每个固定的时间$t > 0$, r.v. $W_t \sim N(0, t)$,

(3) 对任一时间对$t > s > 0$, r.v.s $W_t - W_s$与W_{t-s}同分布, 且独立于$(W_u;\ u \leq s)$。

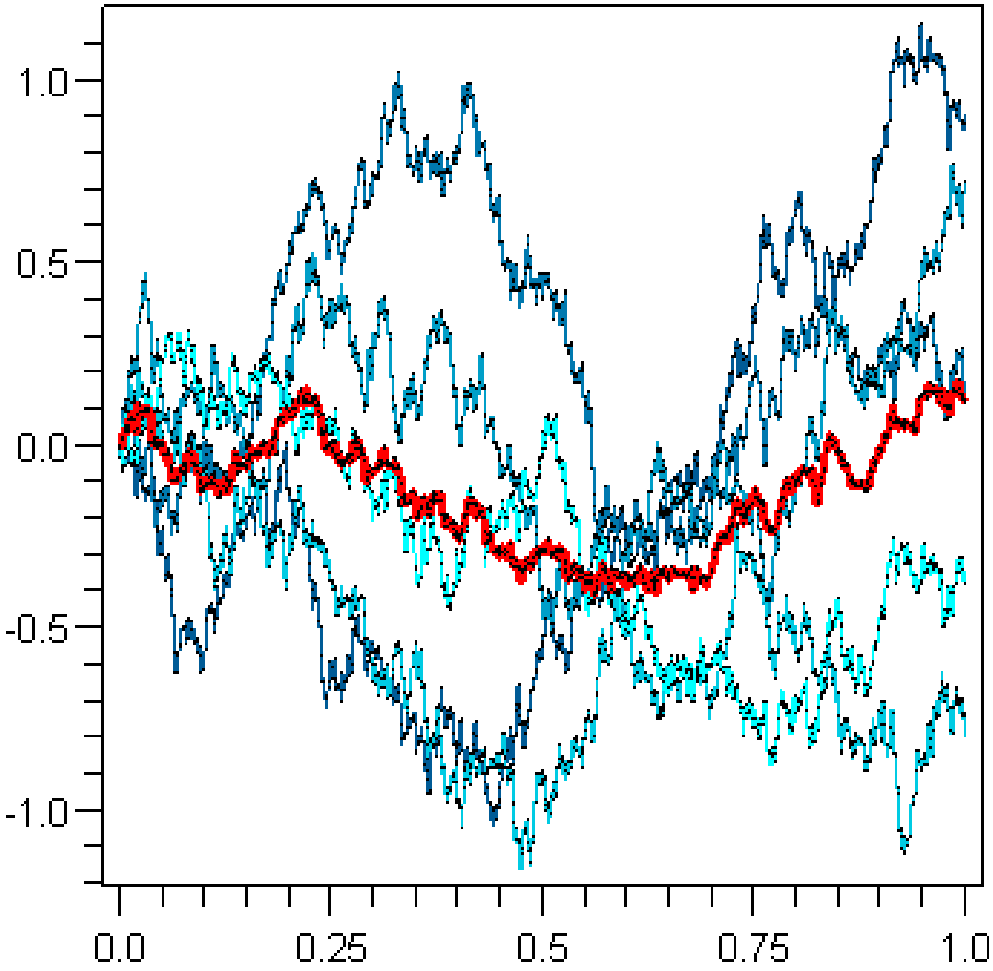
- ➜ 布朗运动的主要贡献者：Bachelier (1900), Einstein (1905) and Wiener (1923,1924).
- ➜ 与布朗运动相关的随机过程：几何布朗运动

$$X = \{e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t};\ t \geq 0\}$$

和反射布朗运动

$$X = \{|W_t|;\ t \geq 0\}.$$

布朗运动的样本轨道



5. 随机微分方程: Stochastic Differential Equation (SDE)

一个(Itô)随机微分方程形式上可描述为：

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x.$$

其(强)解$X = \{X_t;\ t \geq 0\}$也是一个随机过程。

几何布朗运动$X = \{e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t};\ t \geq 0\}$ 满足如下的SDE:

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = x > 0.$$

Black and Scholes就是用这个SDE来建模股票回报率从而导出了著名的期权定价公式Black-Scholes公式。

6. 鞅过程: Martingale

一个随机过程$X = \{X_t;\ t \geq 0\}$称为鞅过程, 如果它满足

$$\mathbb{E}[X_t | X_u,\ u \leq s] = X_s, \quad t > s.$$

布朗运动W和补偿的Poisson过程$\widetilde{N} = \{N_t - \lambda t;\ t \geq 0\}$都属于鞅过程。

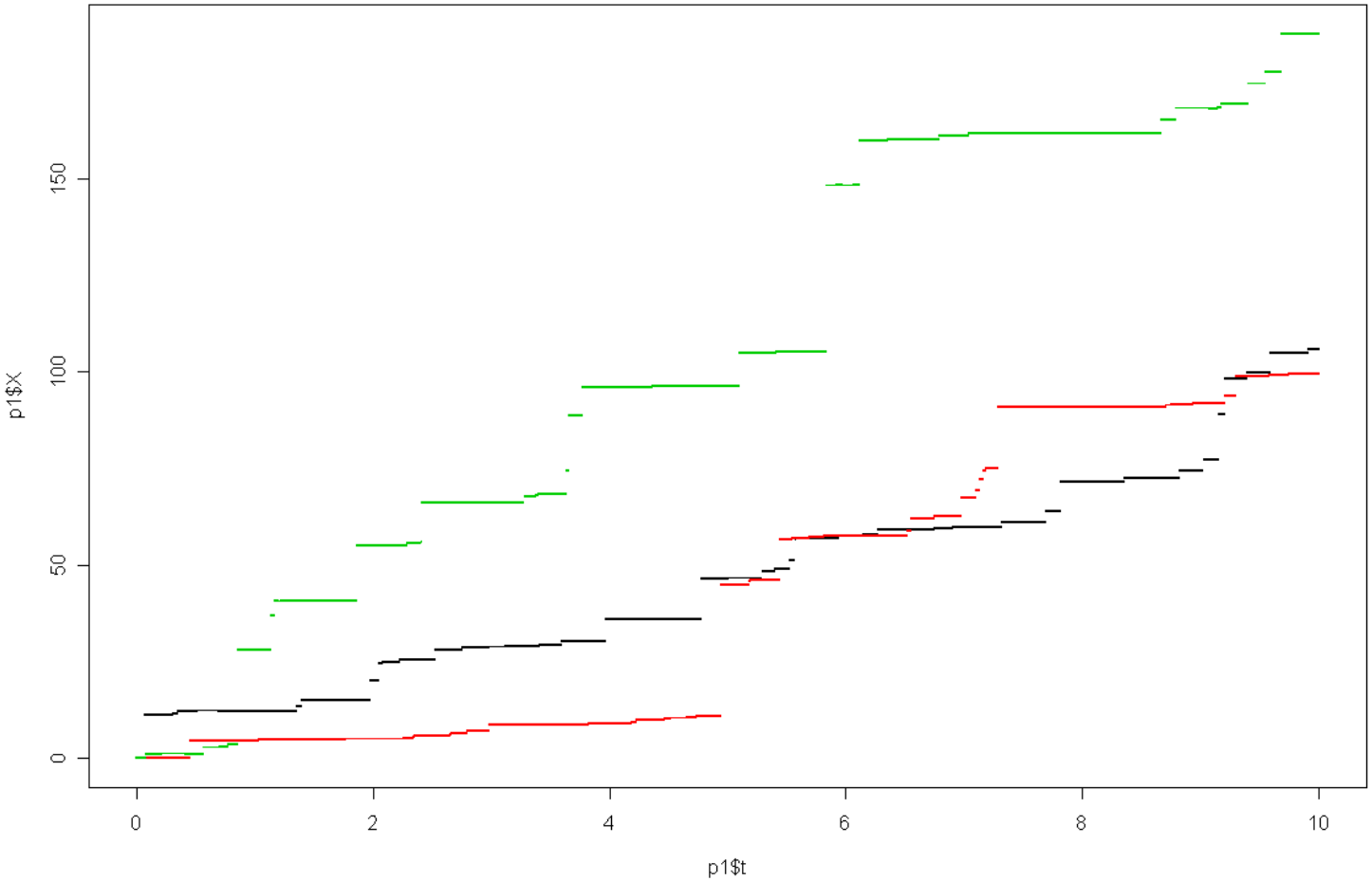
鞅过程是Itô随机分析中最重要的工具，在无套利定价理论(Non-arbitrary Pricing Theory)中具有举足轻重的地位。

7. Lévy过程: Lévy Process

所有平稳独立增量过程都称为Lévy过程。

布朗运动W, Poisson过程N和复合Poisson风险过程都是Lévy过程。Lévy过程及其应用是目前国际前沿研究的热点。

α-稳定过程的样本轨道 (α-stable process)



有限维分布函数族

什么是有限维分布函数: Finite-Dimensional Distribution Function?

设$X=\{X_t;\ t\in I\}$是定义在概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$上的随机过程。对任意固定的时刻$t_1,t_2,\cdots,t_n\in I$, 称

$$F_n(t_1,\ldots,t_n;x_1,\ldots,x_n)=\mathbb{P}(X_{t_1}\le x_1,\ldots,X_{t_n}\le x_n),$$

$x_i\in S\ (i=1,2,\ldots,n)$, 为过程$X$的有限维分布函数。

有限维分布函数族

过程X的所有有限维分布函数的全体,即

$$\mathbb{F}=\{F_n(t_1,\ldots,t_n;x_1,\ldots,x_n);\ x_i\in S,\ t_i\in I,\ i=1,\ldots,n,\ n\in\mathbb{N}\}.$$

有限维分布函数族的性质

1. (对称性: symmetry). 设$(i_1, \ldots, i_n)$为$(1, \ldots, n)$任意排列 (permutation), 则

$$F_n(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}; x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = F_n(t_1, \ldots, t_n; x_1, \ldots, x_n).$$

2. (相容性: Consistent). 设$m < n$, 则

$$\begin{aligned} &F_m(t_1, \ldots, t_m; x_1, \ldots, x_m) \\ &\quad = F_n(t_1, \ldots, t_m, t_{m+1}, \ldots, t_n; x_1, \ldots, x_m, +\infty, \ldots, +\infty). \end{aligned}$$

为什么引入有限维分布函数族$\mathbb{F}$?

由上面的定义我们发现：给定一个随机过程X, 我们就可以定义其有限维分布函数族并且其一定满足对称性和相容性。

反之,如果我们已知一族有限维分布函数$(F_n,\ n \in \mathbb{N})$且其满足对称性和相容性, 那是否会存在一个随机过程X使其有限维分布函数就是F_n?

Answer: YES! Daniell (1918), Kolmogorov (1933).

这个结论实际上给我们提供了构造某个随机过程的方法 (可以用该方法构造Brownian Motion).

有限维分布函数另外一种刻画–特征函数: Characteristic Function

设$X = \{X_t;\ t \in I\}$为定义在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上的随机过程, 对任意固定的时刻$t_1, \ldots, t_n \in I$, 称

$$\varphi(t_1, \ldots, t_n; u_1, \ldots, u_n) = \mathbb{E}\left[\exp\left(\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} u_k X_{t_k}\right)\right],$$

$\mathrm{i} = \sqrt{-1},\ u_i \in \mathbb{R}$, 为过程$X$的特征函数。

根据Fourier变换的逆转公式可以看出：有限维分布函数与特征函数是一一对应的。

例题

1. 计算标准布朗运动W的2维分布函数$F_2(t_1, t_2; x_1, x_2)$和n维特征函数$\varphi(t_1, \ldots, t_n; u_1, \ldots, u_n)$。

Answer: Let $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$. Then

$$
\begin{aligned}
F_2(t_1, t_2; x_1, x_2) &= \mathbb{P}(W_{t_1} \leq x_1, W_{t_2} \leq x_2) \\
&= \mathbb{P}(W_{t_1} \leq x_1, W_{t_2} - W_{t_1} + W_{t_1} \leq x_2) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(W_{t_1} \leq x_1, W_{t_2} - W_{t_1} + W_{t_1} \leq x_2, W_{t_1} \in dy) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(W_{t_1} \leq x_1, W_{t_2} - W_{t_1} + W_{t_1} \leq x_2 | W_{t_1} \in dy) \\
&\quad \times \mathbb{P}(W_{t_1} \in dy) \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} \mathbb{P}(W_{t_2} - W_{t_1} \leq x_2 - y | W_{t_1} \in dy) \varphi_{t_1}(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} \varphi_{t_2 - t_1}(x_2 - y) \varphi_{t_1}(y) dy.
\end{aligned}
$$

Let $0 \leq t_1 < \cdots < t_n < \infty$ and

$$Y_1 := W_{t_1},\ Y_2 := W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, Y_n := W_{t_n} - W_{t_{n-1}}.$$

Then they are independent, and

$$W_{t_2} = Y_1 + Y_2,\ \ldots,\ W_{t_n} = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Consequently,

$$\begin{aligned}
& \varphi(t_1, \ldots, t_n; u_1, \ldots, u_n) \\
= \quad & \mathbb{E}\left[\exp\left(\mathrm{i}((u_1 + \cdots u_n)Y_1 + (u_2 + \cdots u_n)Y_2 + \cdots + u_n Y_n)\right)\right] \\
= \quad & \mathbb{E}\left[\exp\left(\mathrm{i}(u_1 + \cdots u_n)Y_1\right)\right] \times \cdots \times \mathbb{E}\left[\exp\left(\mathrm{i}u_n Y_n\right)\right] \\
= \quad & e^{-\frac{1}{2}(u_1 + \cdots u_n)^2 t_1} \times \cdots \times e^{-\frac{1}{2}u_n^2 (t_n - t_{n-1})}.
\end{aligned}$$

$\square$

随机过程的数字特征

设$X = \{X_t;\ t \in I\}$为概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上的随机过程。

1. 均值函数: Mean Function

$$m_X(t) = \mathbb{E}[X_t], \quad t \in I.$$

2. 均方差函数: Mean Square Deviation Function

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}[|X_t|^2], \quad t \in I.$$

3. 方差函数: Variance Function

$$\begin{aligned} D_X(t) = \mathrm{Var}[X_t] &= \mathbb{E}[|X_t - m_X(t)|^2] \\ &= \Phi_X(t) - m_X^2(t), \quad t \in I. \end{aligned}$$

4. 相关函数: Correlation Function

$$R_X(s,t) = \mathbb{E}[X_s X_t], \quad s,t \in I.$$

5. 协方差函数: Covariance Function

$$\begin{aligned} C_X(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t) &= \mathbb{E}[(X_s - m_X(s))(X_t - m_X(t))] \\ &= R_X(s,t) - m_X(s)m_X(t), \quad s,t \in I. \end{aligned}$$

例题

1. 计算标准布朗运动W的数字特征。
2. 计算Poisson过程N的数字特征。
3. 计算复合Poisson风险过程X的数字特征。

1. 计算标准布朗运动的数字特征。

Answer: Note that $W_t \sim N(0,t)$. Then for all $t > 0$,

$$
\begin{aligned}
m_W(t) &= \mathbb{E}[W_t] = 0 \\
\Phi_W(t) &= \mathbb{E}[|W_t|^2] = t \\
D_W(t) &= \Phi_W(t) - m_W^2(t) = t \\
R_W(s,t) &= \mathbb{E}[W_s W_t] = \mathbb{E}[W_s(W_t - W_s)] + \mathbb{E}[|W_s|^2] \\
&= \mathbb{E}[W_s]\mathbb{E}[W_t - W_s] + s = s, \quad \text{if } s < t \\
&= \mathbb{E}[W_t]\mathbb{E}[W_s - W_t] + t = t, \quad \text{if } t < s \\
&= s \wedge t, \quad \text{for all } s,t \geq 0 \\
C_W(s,t) &= R_W(s,t) - m_W(s)m_W(t) = s \wedge t, \quad \text{for all } s,t \geq 0.
\end{aligned}
$$

$\square$

2. 计算Poisson过程的数字特征。

Answer: Note that $N_t \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$. Then for all $t > 0$,

$$
\begin{aligned}
m_N(t) &= \mathbb{E}[N_t] = \lambda t \\
\Phi_N(t) &= \mathbb{E}[|N_t|^2] = \lambda t(1+\lambda t) \\
D_N(t) &= \Phi_N(t) - m_N^2(t) = \lambda t \\
R_N(s,t) &= \mathbb{E}[N_s N_t] = \mathbb{E}[N_s(N_t - N_s)] + \mathbb{E}[|N_s|^2] \\
&= \mathbb{E}[N_s]\mathbb{E}[N_{t-s}] + \lambda s(1+\lambda s) = \lambda s(1+t), \quad \text{if } s < t \\
&= \mathbb{E}[N_t]\mathbb{E}[N_{s-t}] + \lambda t(1+\lambda t) = \lambda t(1+s), \quad \text{if } t < s \\
&= \lambda s \wedge t(1 + s \vee t), \quad \text{for all } s,t \geq 0 \\
C_N(s,t) &= R_N(s,t) - m_N(s)m_N(t) = \lambda s \wedge t(1+s\vee t) - \lambda^2 st, \\
&\qquad \text{for all } s,t \geq 0.
\end{aligned}
$$

□

3. 计算复合Poisson风险过程的数字特征。

Answer: Note that

$$X_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} U_i, \quad \{U_i,\ i \geq 1\} \text{ i.i.d..}$$

Then

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_t} U_i\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_t} U_i | N_t\right]\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_t} U_i | N_t = n\right] \mathbb{P}(N_t = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} U_i | N_t = n\right] \mathbb{P}(N_t = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} U_i\right] \mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{E}\left[U_1\right] \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(N_t = n) \\
&= \mathbb{E}\left[U_1\right] m_N(t) = \lambda t \mathbb{E}\left[U_1\right],
\end{aligned}$$

and

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{N_t} U_i\right|^2\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i,j=1}^{n} U_i U_j\right] \mathbb{P}(N_t = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} U_i^2\right] \mathbb{P}(N_t = n) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i \neq j}^{n} \mathbb{E}[U_i]\mathbb{E}[U_j]\mathbb{P}(N_t = n) \\
&= \lambda t \mathbb{E}[U_1^2] + \mathbb{E}^2[U_1] \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_{\mathrm{n}}^2 \mathbb{P}(N_t = n) \\
&= \lambda t \mathbb{E}[U_1^2] + (\Phi_N(t) - m_N(t))\mathbb{E}^2[U_1].
\end{aligned}
$$

Let $M_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i$. Then

$$\begin{aligned} R_M(s,t) &= \mathbb{E}[M_s M_t] = \mathbb{E}[M_s(M_t - M_s)] + \mathbb{E}[|M_s|^2] \\ &= \mathbb{E}[M_s]\mathbb{E}[M_{t-s}] + \mathbb{E}[|M_s|^2], \quad \text{if } s < t \\ &= \mathbb{E}[M_t]\mathbb{E}[M_{s-t}] + \mathbb{E}[|M_t|^2], \quad \text{if } t < s. \end{aligned}$$

$\square$

二维随机过程: 2-Dim Stochastic Process

设$X = \{X_t;\ t \in I\}$和$Y = \{Y_t;\ t \in I\}$是定义在同一概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上两个随机过程,我们称$\mathbf{X} = (X, Y)$为 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上的一个二维随机过程。

二维随机过程$\mathbf{X}$的联合有限维分布函数: Joint Finite-Dimensional Distribution Function

设时刻$t_1, \ldots, t_m, t'_1, \ldots, t'_n \in I$和$x_1, \ldots, x_m \in S_X,\ y_1, \ldots, y_n \in S_Y$,称

$$
\begin{aligned}
&F_{m,n}(t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_m; t'_1, \ldots, t'_n, y_1, \ldots, y_n) \\
&= \mathbb{P}(X_{t_1} \le x_1, \ldots, X_{t_m} \le x_m, Y_{t'_1} \le y_1, \ldots, Y_{t'_n} \le y_n)
\end{aligned}
$$

为二维随机过程$\mathbf{X}$的联合有限维分布函数。

二个随机过程(X,Y)的独立性: Independence of Stoch. Processes

设F_m^X和F_n^Y分别表示过程X和Y的有限维分布函数,如果(X,Y)的 联合有限维分布函数$F_{m,n}$满足:

$$\begin{aligned}&F_{m,n}(t_1,\ldots,t_m,x_1,\ldots,x_m;t_1',\ldots,t_n',y_1,\ldots,y_n)\\&=F_m^X(t_1,\ldots,t_m,x_1,\ldots,x_m)F_n^Y(t_1',\ldots,t_n',y_1,\ldots,y_n),\end{aligned}$$

则称过程X与Y相互独立.

二维布朗运动: 2-Dim Brownian Motion

设$W^1=\{W_t^1;\ t\geq 0\}$和$W^2=\{W_t^2;\ t\geq 0\}$是定义在同一概率空间上的两个**独立**的标准布朗运动,则称(W^1,W^2)为这个概率空间上的二维布朗运动.

二维随机过程(X,Y)的数字特征

互相关函数: (Cross) Correlation Function

$$R_{XY}(s,t)=\mathbb{E}(X_sY_t),\quad s,t\in I.$$

互协方差函数: (Cross) Covariance Function

$$\begin{aligned}C_{XY}(s,t) &= \mathbb{E}[(X_s-m_X(s))(Y_t-m_Y(t))]\\ &= R_{XY}(s,t)-m_X(s)m_Y(t),\quad s,t\in I.\end{aligned}$$

Problem: 二维布朗运动的$R_{W^1W^2}(s,t)=$?和$C_{W^1W^2}(s,t)=$?

例题

设$N_1 = \{N_1(t);\ t \geq 0\}$和$N_2 = \{N_2(t);\ t \geq 0\}$是两个参数分别为$\lambda_1 > 0$和$\lambda_2 > 0$的独立的Poisson过程。 证明过程$N = N_1 + N_2 = \{N_1(t) + N_2(t);\ t \geq 0\}$也是一个Poisson过程且参数为$\lambda_1 + \lambda_2$。

Answer:

(1) $N_0 = N_1(0) + N_2(0) = 0.$

(2) For each $t > 0$ and $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t = n) &= \mathbb{P}(N_1(t) + N_2(t) = n) = \sum_{m=0}^{n} \mathbb{P}(N_1(t) + N_2(t) = n, N_1(t) = m) \\
&= \sum_{m=0}^{n} \mathbb{P}(N_2(t) = n - m, N_1(t) = m) \\
&= \sum_{m=0}^{n} \mathbb{P}(N_2(t) = n - m)\mathbb{P}(N_1(t) = m), \quad \text{独立性} \\
&= \sum_{m=0}^{n} \frac{(\lambda_1 t)^{n-m} e^{-\lambda_1 t}}{(n-m)!} \frac{(\lambda_2 t)^m e^{-\lambda_2 t}}{m!} \\
&= \frac{1}{n!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{(n-m)!m!} (\lambda_1 t)^{n-m} (\lambda_2 t)^m \\
&= \frac{1}{n!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} (\lambda_1 + \lambda_2)^n t^n
\end{aligned}
$$

(3) 验证平稳独立增量性。对于$t > s > 0$, 增量

$$\begin{aligned} N_t - N_s &= (N_1(t) - N_1(s)) + (N_2(t) - N_2(s)) \\ &= N_1(t-s) + N_2(t-s) \quad \text{同分布意义下} \\ &= N_{t-s}. \end{aligned}$$

由于$N_1(t) - N_1(s)$独立于$(N_1(u);\ u \le s)$及$N_2(t) - N_2(s)$独立于$(N_2(u);\ u \le s)$, 又注意到N_1与N_2独立,因此有$N_t - N_s$与$(N_1(u) + N_2(u);\ u \le s)$独立。

复值随机过程

什么是复值随机过程: Complex-Valued Stoch. Process?

设$X = \{X_t;\ t \in I\}$和$Y = \{Y_t;\ t \in I\}$是定义在同一概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上的两个**实值**随机过程。定义

$$Z_t = X_t + \mathrm{i}Y_t, \quad \mathrm{i} = \sqrt{-1},$$

则称$Z = \{Z_t;\ t \in I\}$为定义在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上的复值随机过程。

复值随机过程的数字特征

均值函数

$$
\begin{aligned}
m_Z(t) &= \mathbb{E}[Z_t] = \mathbb{E}[X_t] + \mathrm{i}\mathbb{E}[Y_t] \\
&= m_X(t) + \mathrm{i}m_Y(t).
\end{aligned}
$$

均方差函数

$$
\begin{aligned}
\Phi_Z(t) &= \mathbb{E}[|Z_t|^2] = \mathbb{E}[|X_t|^2] + \mathbb{E}[|Y_t|^2] \\
&= \Phi_X(t) + \Phi_Y(t).
\end{aligned}
$$

方差函数

$$
\begin{aligned}
D_Z(t) &= \mathbb{E}[|Z_t - m_Z(t)|^2] = \mathbb{E}[|(X_t - m_X(t)) + \mathrm{i}(Y_t - m_Y(t))|^2] \\
&= D_X(t) + D_Y(t).
\end{aligned}
$$

相关函数

$$
\begin{aligned}
R_Z(s,t) &= \mathbb{E}[\overline{Z_s} Z_t] = \mathbb{E}[(X_s - \mathrm{i}Y_s)(X_t + \mathrm{i}Y_t)] \\
&= R_X(s,t) + R_Y(s,t) + \mathrm{i}(R_{XY}(s,t) - R_{YX}(s,t)).
\end{aligned}
$$

协方差函数

$$
\begin{aligned}
C_Z(s,t) &= \mathbb{E}\left[\overline{(Z_s - m_Z(s))}(Z_t - m_Z(t))\right] \\
&= \mathbb{E}\{[(X_s - m_X(s)) - \mathrm{i}(Y_s - m_Y(s))] \\
&\qquad [(X_t - m_X(t)) + \mathrm{i}(Y_t - m_Y(t))]\times\} \\
&= C_X(s,t) + C_Y(s,t) + \mathrm{i}(C_{XY}(s,t) - C_{YX}(s,t)).
\end{aligned}
$$

Prove:

$$
\begin{aligned}
\Phi_Z(t) &= R_Z(t,t), \\
C_Z(s,t) &= R_Z(s,t) - \overline{m_Z(s)}m_Z(t).
\end{aligned}
$$

二维复值随机过程

设$Z_1 = \{Z_1(t);\ t \in I\}$和$Z_2 = \{Z_2(t);\ t \in I\}$是定义在同一概率空间上两个复值随机过程,则称$(Z_1, Z_2)$是一个二维复值随机过程。

互相关函数

$$R_{Z_1 Z_2}(s,t) \quad = \quad \mathbb{E}\left[\overline{Z_1(s)} Z_2(t)\right].$$

互协方差函数

$$C_{Z_1 Z_2}(s,t) \quad = \quad \mathbb{E}\left[\overline{(Z_1(s) - m_{Z_1}(s))}(Z_2(t) - m_{Z_2}(t))\right].$$

例题(课本P50: 例2.6.1)

设复值随机过程:

$$Z_t = \sum_{k=1}^{n} X_k e^{\mathrm{i}(\omega_0 t + \Phi_k)}, \quad \mathrm{i} = \sqrt{-1}, \quad t \in \mathbb{R},$$

其中$\omega_0 > 0,\ n \in \mathbb{N}, X_1, \ldots, X_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$是相互独立的实值随机变量,且$\mathbb{E}[X_k] = 0, D(X_k) = \sigma_k > 0, \Phi_k \sim \mathrm{U}[0, 2\pi]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. 计算$Z = \{Z_t;\ t \in \mathbb{R}\}$的均值函数$m_Z(t)$和相关函数$R_Z(s,t)$ $(s, t \in \mathbb{R})$。

Answer:

$$
\begin{aligned}
m_Z(t) &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k e^{\mathrm{i}(\omega_0 t+\Phi_k)}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k]\mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}(\omega_0 t+\Phi_k)}\right] \qquad \text{独立性} \\
&= 0, \qquad \text{因为}\mathbb{E}[X_k]=0.
\end{aligned}
$$

Answer:

$$
\begin{aligned}
R_Z(s,t) &= \mathbb{E}\left[\overline{\sum_{k=1}^{n} X_k e^{\mathrm{i}(\omega_0 s+\Phi_k)}} \sum_{l=1}^{n} X_l e^{\mathrm{i}(\omega_0 t+\Phi_l)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k e^{-\mathrm{i}(\omega_0 s+\Phi_k)} \sum_{l=1}^{n} X_l e^{\mathrm{i}(\omega_0 t+\Phi_l)}\right] \\
&= e^{\mathrm{i}\omega_0(t-s)}\mathbb{E}\left[\sum_{k,l=1}^{n} X_k X_l e^{\mathrm{i}(\Phi_k-\Phi_l)}\right] \\
&= e^{\mathrm{i}\omega_0(t-s)}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right] + e^{\mathrm{i}\omega_0(t-s)}\mathbb{E}\left[\sum_{k\neq l}^{n} X_k X_l e^{\mathrm{i}(\Phi_k-\Phi_l)}\right] \\
&= e^{\mathrm{i}\omega_0(t-s)}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right] = e^{\mathrm{i}\omega_0(t-s)} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2.
\end{aligned}
$$

$\square$

几个重要随机过程的性质

二阶矩过程: Second-Moment Process

设$X = \{X_t;\ t \in I\}$为定义在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上的(复值)随机过程,如果其均方差函数$\Phi_X(t)$存在,即

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}[|X_t|^2] < \infty, \quad \forall\, t \in I,$$

则称X是一个二阶矩过程。

Prove: (Hint: 利用Cauchy-Schwarz不等式)

1. 二阶矩过程X的均值函数$m_X(t)$一定存在 ($\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$)?

2. 二阶矩过程X的相关函数$R_X(s,t)$一定存在 ($\mathbb{E}[|X_s X_t|] < \infty$)?

二阶矩过程相关函数的性质

(1) 共轭对称性:

$$\overline{R_X(s,t)} = R_X(t,s), \quad s,t \in I.$$

(2) 非负定性: 对任意$n \geq 1$, $t_1, \ldots, t_n \in I$和复数$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, 有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} R_X(t_k,t_l)\bar{\lambda}_k\lambda_l \geq 0.$$

正态过程(高斯过程): Gaussian Process

设$X = \{X_t;\ t \in I\}$为定义在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上的随机过程,如果对任意$n \geq 1$和$t_1, \ldots, t_n \in I$, 随机向量$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$服从$n$维正态分布, 则称$X$是一个正态(或高斯)过程。

注释: n维正态分布

$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$服从$n$维正态分布意味着$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$具有$n$维联合密度函数:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\mathbf{C}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{b})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{b})},$$

其中$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (\mathbb{E}[X_{t_1}], \ldots, \mathbb{E}[X_{t_n}])^{\mathrm{T}}$和$\mathbf{C}_{n\times n}$表示$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$的协方差矩阵。

例题

证明标准布朗运动W(或称Wiener过程)是正态过程。

Proof: 定义如下两个随机向量:

$$\mathbf{X} = (W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_n}), \quad \mathbf{Y} = (W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}).$$

于是我们有

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y}A,$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

注意到$\mathbf{Y}$服从n维正态$N(\mathbf{0}, \mathbf{C})$, 其中

$$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}},$$

和

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 - t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_n - t_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

因此

$$\mathbf{X} \sim N(\mathbf{0}, A^{\mathrm{T}}\mathbf{C}A).$$

这也同时计算出布朗运动的n维分布函数就是$N(\mathbf{0}, A^{\mathrm{T}}\mathbf{C}A)$的分布函数。

正交增量过程

设$X=\{X_t;\ t\geq 0\}$为定义在概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$上的一个二阶矩过程,如果对任意$t_1<t_2\leq t_3<t_4$,有

$$\mathbb{E}\left[\overline{(X_{t_2}-X_{t_1})}(X_{t_4}-X_{t_3})\right]=0,$$

则称X是一个正交增量过程。

正交增量过程的数字特征

设$X=\{X_t;\ t\in[a,b]\}$为一个正交增量过程且$X_a=0$,则有:

(1) $R_X(s,t)=\Phi_X(s\wedge t)$,

(2) $C_X(s,t)=D_X(s\wedge t)+|m_X(s\wedge t)|^2-\overline{m_X(s)}m_X(t)$,

(3) 关于时间函数$t\to\Phi_X(t)$是单调不减的.

Proof: (1) 假设$a \le s \le t \le b$, 则有

$$
\begin{aligned}
R_X(s,t) &= \mathbb{E}[\overline{X_s}X_t] = \mathbb{E}[\overline{X_s}(X_t - X_s + X_s)] \\
&= \mathbb{E}[\overline{X_s}(X_t - X_s)] + \mathbb{E}[|X_s|^2] \\
&= \mathbb{E}[\overline{(X_s - X_a)}(X_t - X_s)] + \Phi_X(s), \quad (X_a = 0) \\
&= \Phi_X(s \wedge t).
\end{aligned}
$$

(2)

$$
C_X(s,t) = R_X(s,t) - \overline{m_X(s)}m_X(t).
$$

Proof: (3) 对于$a \le s \le t \le b$,则有

$$
\begin{aligned}
0 &\le \mathbb{E}[|X_s - X_t|^2] = \mathbb{E}\left[\overline{(X_s - X_t)}(X_s - X_t)\right] \\
&= \Phi_X(s) + \Phi_X(t) - R_X(s,t) - R_X(t,s) \\
&= \Phi_X(s) + \Phi_X(t) - \Phi_X(s) - \Phi_X(s) \\
&= \Phi_X(t) - \Phi_X(s).
\end{aligned}
$$

独立增量过程

设$X = \{X_t;\ t \geq 0\}$为定义在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上的一个随机过程,如果对任意$n \geq 3$和$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$,有增量$X_{t_2} - X_{t_1}$, $X_{t_3} - X_{t_2}$, $\ldots$, $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$是相互独立的, 则称X是一个独立增量过程。

独立增量过程的有限维分布

独立增量过程的有限维分布函数完全由其一维分布函数和增量分布函数决定。如果它还是平稳增量的,则 其有限维分布函数完全由其一维分布函数决定。

Proof: 有限维分布函数与特征函数一一对应。定义随机变量:

$$Y_1 = X_{t_1},\ Y_2 = X_{t_2} - X_{t_1},\ \ldots,\ Y_n = X_{t_n - t_{n-1}}.$$

则$(Y_1, \ldots, Y_n)$是相互独立的。于是特征函数:

$$\begin{aligned}
\varphi(t_1, \ldots, t_n; u_1, \ldots, u_n) &= \mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}(u_1 X_{t_1} + \cdots + u_n X_{t_n})}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}(u_1 + \cdots + u_n)Y_1 + \mathrm{i}(u_2 + \cdots + u_n)Y_2 + \cdots + \mathrm{i}u_n Y_n}\right] \\
&= \varphi_{Y_1}(u_1 + \cdots + u_n)\varphi_{Y_2}(u_2 + \cdots + u_n) \cdots \varphi_{Y_n}(u_n) \\
&= \varphi_{X_{t_1}}(u_1 + \cdots + u_n)\varphi_{X_{t_2} - X_{t_1}}(u_2 + \cdots + u_n) \\
&\quad \times \cdots \times \varphi_{X_{t_n} - X_{t_{n-1}}}(u_n).
\end{aligned}$$

计数过程与Poisson过程

<u>计数过程</u>: 称实值随机过程$N = \{N_t;\ t \geq 0\}$为计数过程,如果对任意$t > 0$, N_t表示到t时刻累积发生的随机数。因此计数过程N满足：

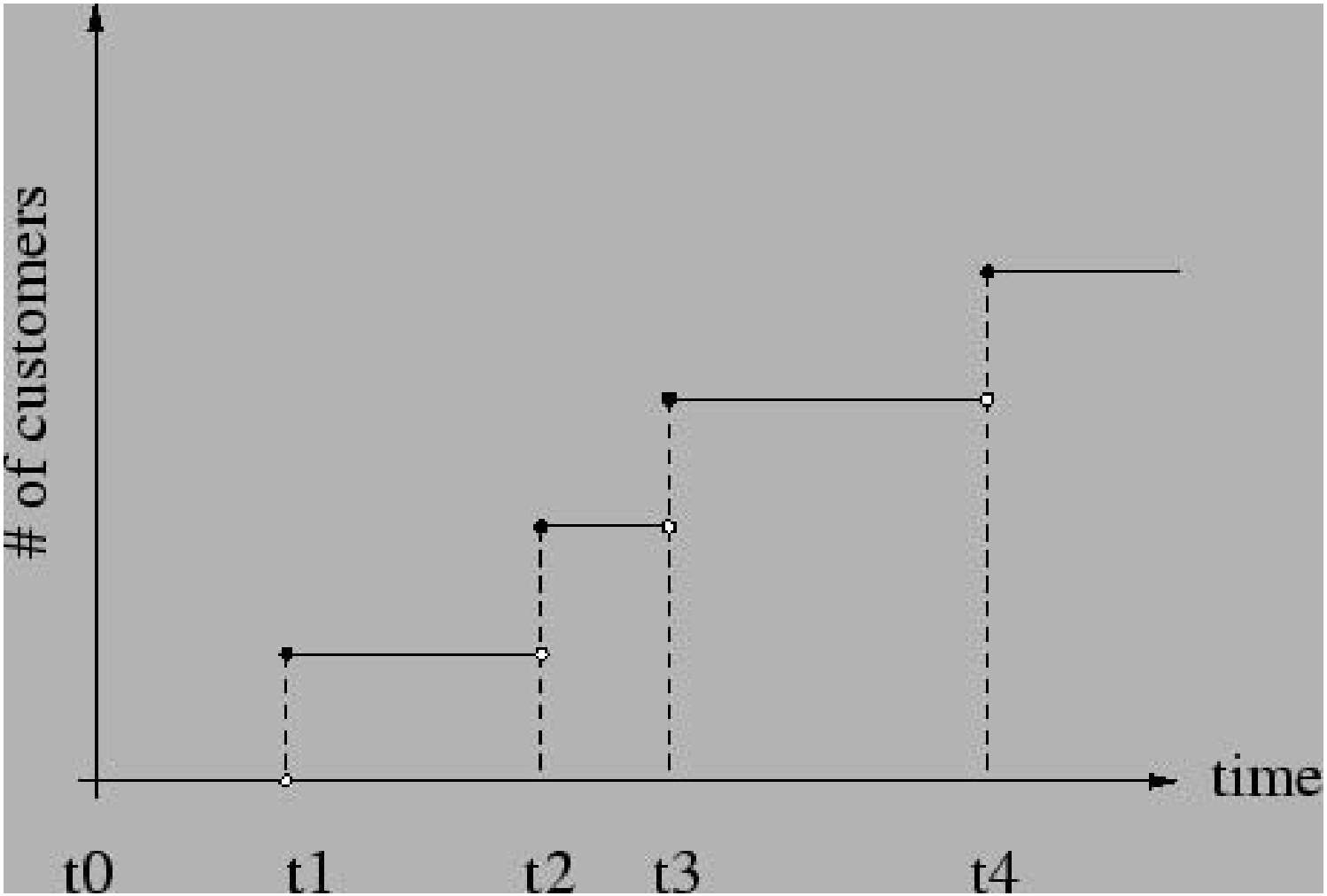
(1) $N_0 = 0$,

(2) $N_t \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\forall\, t > 0$ (状态空间$S = \{0\} \cup \mathbb{N}$),

(3) 对于任意$0 \leq s < t$, $N_t \geq N_s$ (样本轨道是单调不减的),

(4) 对于任意$0 \leq s < t$, 增量$N_t - N_s$表示在时间段$(s, t]$内发生的随机事件数。

计数过程的样本轨道



Poisson过程的性质

设$N = \{N_t;\ t \geq 0\}$为参数$\lambda > 0$ 的Poisson过程,则它是一个计数过程且它满足如下性质:

(1) 对于充分小的Δt, Poisson过程在$(t, t+\Delta t]$时间段内出现事件一次的概率为$\lambda\Delta t + o(\Delta t)$, 即

$$\mathbb{P}(N_{t+\Delta t} - N_t = 1) = \lambda\Delta t + o(\Delta t).$$

(2) 对于充分小的Δt, Poisson过程在$(t, t+\Delta t]$时间段内出现事件两次或两次以上的概率为$o(\Delta t)$, 即

$$\mathbb{P}(N_{t+\Delta t} - N_t \geq 2) = o(\Delta t).$$

Prove:

$$\mathbb{P}(N_{t+\Delta t} - N_t = 0) = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t).$$

Proof: 根据Poisson过程的平稳独立增量性,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_{t+\Delta t} - N_t = 1) &= \mathbb{P}(N_{\Delta t} = 1) = \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t} \\
&= \lambda \Delta t \left(1 + (\lambda \Delta t) + \frac{(\lambda \Delta t)^2}{2!} + \frac{(\lambda \Delta t)^3}{3!} + \cdots\right) \\
&= \lambda \Delta t + (\lambda \Delta t)^2 + \frac{(\lambda \Delta t)^3}{2!} + \cdots \\
&= \lambda \Delta t + o(\Delta t).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_{t+\Delta t} - N_t \geq 2) &= \mathbb{P}(N_{\Delta t} \geq 2) \\
&= \mathbb{P}(N_{\Delta t} = 2) + \mathbb{P}(N_{\Delta t} = 3) + \cdots \\
&= \frac{(\lambda \Delta t)^2}{2!} e^{-\lambda \Delta t} + \frac{(\lambda \Delta t)^3}{3!} e^{-\lambda \Delta t} + \cdots \\
&= o(\Delta t).
\end{aligned}
$$

反问题

如果一个计数过程$N = \{N_t;\ t \geq 0\}$满足: 平稳独立增量和条件(1),(2),则它一定是一个参数为$\lambda > 0$的Poisson过程。

Proof: 我们只需证明: 对任意的时刻$t > 0$, N_t服从参数为λt的Poisson分布。

首先我们考虑概率$p_0(t)=\mathbb{P}(N_t=0)$. 为了能利用条件(1)和(2), 我们考虑概率$p_0(t+\Delta t)=\mathbb{P}(N_{t+\Delta t}=0)$. 于是由平稳独立增量,

$$\begin{aligned}
p_0(t+\Delta t) &= \mathbb{P}(N_{t+\Delta t}-N_t+N_t=0)\\
&= \mathbb{P}(N_{t+\Delta t}-N_t+N_t=0, N_t=0)\\
&= \mathbb{P}(N_{t+\Delta t}-N_t=0, N_t=0)\\
&= \mathbb{P}(N_{t+\Delta t}-N_t=0)p_0(t)\\
&= (1-\lambda\Delta t+o(\Delta t))p_0(t).
\end{aligned}$$

因此

$$\frac{p_0(t+\Delta t)-p_0(t)}{\Delta t}=-\lambda p_0(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

令$\Delta t\to 0$, 则

$$p_0'(t)=-\lambda p_0(t),\quad p_0(0)=1.$$

故$p_0(t)=e^{-\lambda t}$.

现我们考虑概率$p_k(t+\Delta t)=\mathbb{P}(N_{t+\Delta t}=k)$, $k\geq 1$.

$$\begin{aligned}
p_k(t+\Delta t) &= \mathbb{P}(N_{t+\Delta t}=k) \\
&= \mathbb{P}(N_t=k, N_{t+\Delta t}-N_t=0) \\
&\quad +\mathbb{P}(N_t=k-1, N_{t+\Delta t}-N_t=1) \\
&\quad +\sum_{i=2}^{k}\mathbb{P}(N_t=k-i, N_{t+\Delta t}-N_t=i) \\
&= p_k(t)p_0(\Delta t)+p_{k-1}(t)p_1(\Delta t)+o(\Delta).
\end{aligned}$$

则

$$\frac{p_k(t+\Delta t)-p_k(t)}{\Delta t}=-\lambda p_k(t)+\lambda p_{k-1}(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

令$\Delta t\to 0$, 则

$$p_k'(t)+\lambda p_k(t)=\lambda p_{k-1}(t),\quad p_1(0)=1,\ \ p_0(t)=e^{-\lambda t},\ k=2,3,\ldots.$$

迭代得$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Poisson过程的到达时间和到达时间间隔

设$N = \{N_t;\ t \geq 0\}$表示参数为λ的Poisson过程。现定义如下随机时间：

$$
\begin{aligned}
\tau_0 &= 0, \\
\tau_1 &= \min\{t > 0;\ N_t = 1\}, \\
\tau_2 &= \min\{t > \tau_1;\ N_t = 2\}, \\
\cdots \quad \cdots &\quad \cdots, \\
\tau_n &= \min\{t > \tau_{n-1};\ N_t = n\}, \\
\cdots \quad \cdots &\quad \cdots
\end{aligned}
$$

那我们称随机时间序列$\{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots\}$为Poisson过程的到达时间。

定义下面的随机时间：

$$T_1 = \tau_1 - \tau_0, \quad T_2 = \tau_2 - \tau_1, \quad \ldots, \quad T_n = \tau_n - \tau_{n-1}, \quad \ldots$$

那我们称随机时间序列$\{T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots\}$为Poisson过程的到达时间间隔。进一步我们有: $\{T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots\}$是独立同分布于参数为$\lambda$的指数分布。

Proof: 由Poisson过程的平稳独立增量性知$T_1, \ldots, T_n \ldots$是相互独立的。下面求他们的分布：

(1) T_1的分布: 对于$t \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \mathbb{P}(T_1 \leq t) = 1 - \mathbb{P}(T_1 > t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\tau_1 > t) = 1 - \mathbb{P}(N_t = 0) = 1 - e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

(2) T_n的分布($n \geq 2$): 对于$t \geq 0$及任意的$s_1, \ldots, s_{n-1} \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \mathbb{P}(T_n \leq t) = 1 - \mathbb{P}(T_n > t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(T_n > t | T_1 = s_1, \ldots, T_{n-1} = s_{n-1}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(N_{t+s_1+\cdots+s_{n-1}} - N_{s_1+\cdots+s_{n-1}} = 0) \\ &= 1 - \mathbb{P}(N_t = 0) = 1 - e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

由上面的结论,我们立即得到Poisson过程的到达时间$\tau_n \sim \Gamma(n, \lambda)$。

其中$\Gamma(\alpha, \beta)$分布的概率密度函数为

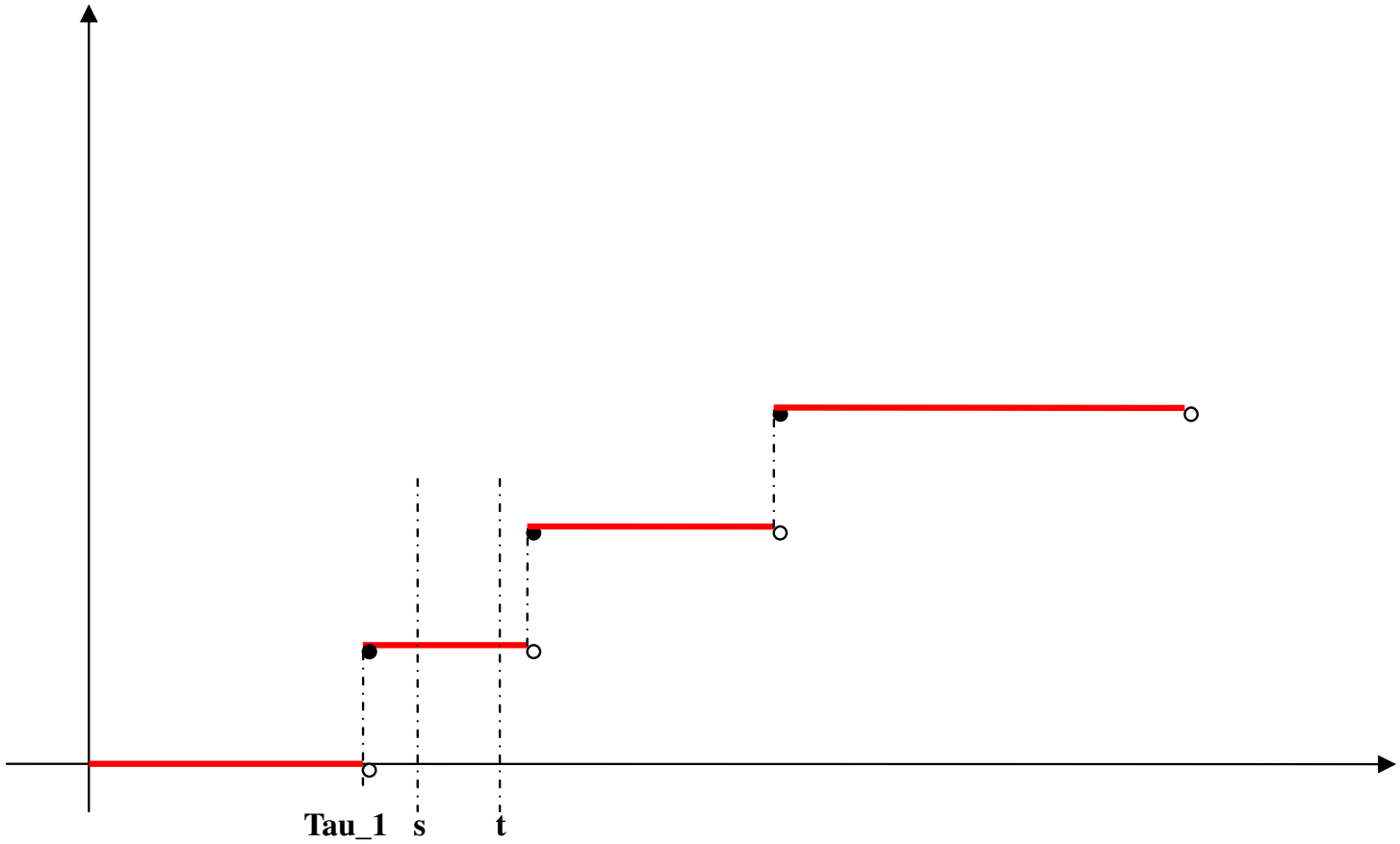
$$f(t) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Proof: n个独立同分布于参数为λ的指数分布之和的分布为$\Gamma(n, \lambda)$分布。

练习

Prove: For $0 \leq s < t$,

$$\mathbb{P}(\tau_1 \leq s | N_t = 1) = \frac{s}{t}.$$


Tau_1
s
t

例题: PAGE 59: 定理2.7.10

设$N = \{N_t; \geq 0\}$是一个参数为$\lambda > 0$的Poisson过程,证明其到达时间$(\tau_1, \ldots, \tau_n)$在$N_t = n$条件下的 联合分布与$(0, t)$上n个均匀分布随机变量$U_1, \ldots, U_n$的次序统计量$U_{(1)} < \cdots < U_{(n)}$的联合分布相同, 即证明: 到达时间$(\tau_1, \ldots, \tau_n)$在$N_t = n$条件下的联合密度为

$$f_{(n)}(u_1, \ldots, u_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n}, & 0 \leq u_1 < \cdots < u_n < t, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Proof: 取$h_1, \ldots, h_n > 0$充分小并使

$$0 \leq u_1 < \tau_{\mathbf{1}} < u_1 + h_1 < u_2 < \tau_{\mathbf{2}} < u_2 + h_2 < \cdots < u_n < \tau_{\mathbf{n}} < u_n + h_n \leq t,$$

则

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\cap_{k=1}^{n}(u_k < \tau_k \leq u_k + h_k) | N_t = n) \\
= & \frac{\mathbb{P}(\cap_{k=1}^{n}(N_{u_k+h_k} - N_{u_k} = 1), N_t = n)}{\mathbb{P}(N_t = n)} \\
= & \frac{\mathbb{P}(N_{h_1} = 1, \cdots, N_{h_n} = 1, N_t = n)}{\mathbb{P}(N_t = n)} \\
= & \frac{\mathbb{P}(N_{h_1} = 1, \cdots, N_{h_n} = 1, N_t - \sum_{k=1}^{n} N_{h_k} = 0)}{\mathbb{P}(N_t = n)} \\
= & \frac{\mathbb{P}(N_{h_1} = 1, \cdots, N_{h_n} = 1, N_{t-\sum_{k=1}^{n} h_k} = 0)}{\mathbb{P}(N_t = n)} \\
= & \frac{\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_{h_k} = 1)\mathbb{P}(N_{t-\sum_{k=1}^{n} h_k} = 0)}{\mathbb{P}(N_t = n)} \\
= & \frac{n!}{t^n} h_1 \cdots h_n.
\end{aligned}
$$