场论与复变函数

主讲：徐乐

Review

❖ 留数 $$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz=c_{-1}$$

❖ 留数定理 $$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$$

❖ 留数计算

- ***Rule I***：若z_0为函数 $f(z)$ 的一级极点，则

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

- ***Rule II***：若z_0为函数 $f(z)$ 的 m 级极点，则

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

- ***Rule III***：设$P(z)$、$Q(z)$在z_0解析,$P(z_0)\neq 0$、 $Q(z_0)=0$ 、 $Q'(z_0)\neq 0$,则

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}\qquad \mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

•m的取值可以比函数极点的实际级数高，而并不会影响规则 II 的有效性,有时候将m取的比实际级数高可以简化留数计算

Review

- 无穷远点留数 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)dz=-c_{-1}=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}f(z)dz$
  - 若函数***f*** **(*z*)**在扩充复平面内只有有限个孤立奇点，则 ***f*** **(*z*)**在所有奇点（包括∞点）的留数总和必为零
  - **Rule IV**： $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0]$
- 采用留数来求解定积分有两点须满足：
  - 被积函数必须与某解析函数密切相关
  - 积分路径是闭曲线
- 典型定积分留数求解
  - 积分类型 **I**： $\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$ $\qquad 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$
    - ***R*** **(cosθ，sinθ)为 cosθ与 sinθ的有理函数**

- 留数在定积分中的应用(**II**)
- 复变函数复习

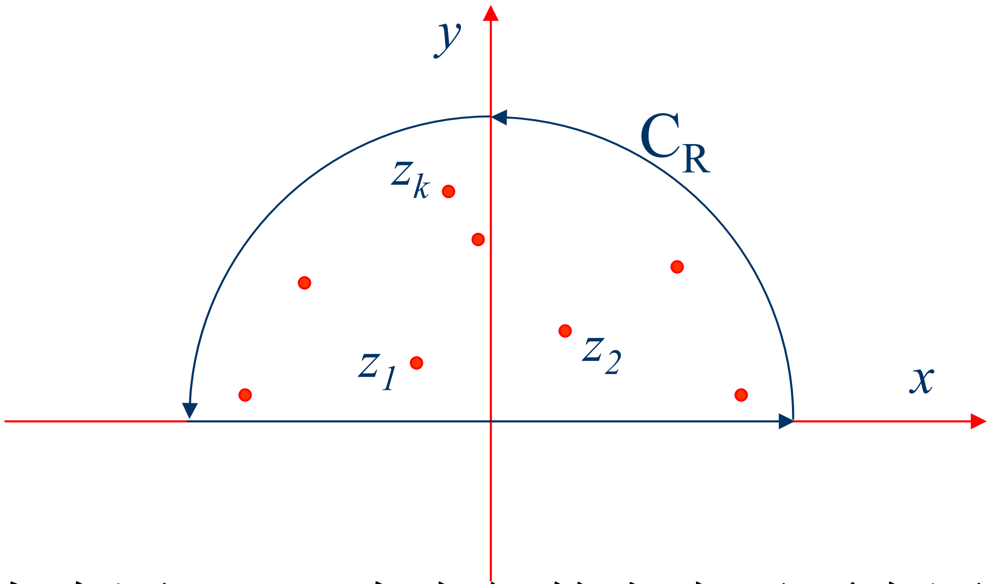
留数在定积分中的应用（II）

- 积分类型 II： $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$
  - ***R*(*x*)是*x*的有理函数**
  - 分母的次数至少比分子的次数高二次
  - ***R*(*x*)在实轴上没有孤立奇点**
  - 不失一般性，设：

$$R(z)=\frac{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}, m-n\geq 2$$

留数在定积分中的应用（II）

$$R(z)=\frac{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}, m-n\geq 2$$



- C_R为以原点为圆心，R为半径的上半平面半圆周
- R足够大，使得C_R包含上半平面所有极点z_k

$$\int_{-R}^{R}R(x)dx+\int_{C_R}R(z)dz=2\pi i\sum \mathrm{Re}\,s[f(z),z_k]$$

留数在定积分中的应用（II）

$$|R(z)|=\frac{1}{|z|^{m-n}}\frac{|1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}|}{|1+b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}|}\le\frac{1}{|z|^{m-n}}\frac{1+\boxed{|a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}|}}{1-\boxed{|b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}|}}$$

当$|z|$足够大时

$$\begin{matrix}|b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}| \\ |a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}|\end{matrix}<\frac{1}{10} \qquad |R(z)|<\frac{2}{|z|^2}$$

在R足够大的C_R上

$$\left|\int_{C_R}R(z)dz\right|\le\int_{C_R}|R(z)|ds\le\frac{2}{R^2}\cdot\pi R=\frac{2\pi}{R}$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}R(z)dz=0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)dx=2\pi i\sum\mathrm{Re}\,s[f(z),z_k]$$

若$R(x)$为偶函数

$$\int_{0}^{\infty}R(x)dx=\pi i\sum\mathrm{Re}\,s[f(z),z_k]$$

留数在定积分中的应用（II）

❖ 例1 计算积分：$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}(a>0,b>0)$

- [解]易验证：
  - 积分函数是x的有理函数
  - *m*=4，*n*=2，*m-n*=2
  - 函数的奇点为±*ai*，±*bi*，不在实轴上

$$I=2\pi i\left[\frac{a}{2i(a^2-b^2)}+\frac{b}{2i(b^2-a^2)}\right]$$

$$=\frac{\pi}{a+b}$$

- 利用积分类型II采用留数求解，显然，在上半平面仅有一级极点*ai*,*bi*，且它们的留数为：

$$\operatorname{Re}s[R(z),ai]=\lim_{z\to ai}\left[(z-ai)R(z)\right]=\frac{-a^2}{2ai(b^2-a^2)}=\frac{a}{2i(a^2-b^2)}$$

$$\operatorname{Re}s[R(z),bi]=\lim_{z\to ai}\left[(z-bi)R(z)\right]=\frac{-b^2}{2bi(a^2-b^2)}=\frac{b}{2i(b^2-a^2)}$$

留数在定积分中的应用（II）

❖积分类型 III： $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{aix}dx(a>0)$

- **R(x)是x的有理函数**
- 分母的次数至少比分子的次数高一次
- 在实轴上没有孤立奇点
- 同样，不失一般性，设

$$R(z)=\frac{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m},m-n\geq 1$$

留数在定积分中的应用（II）

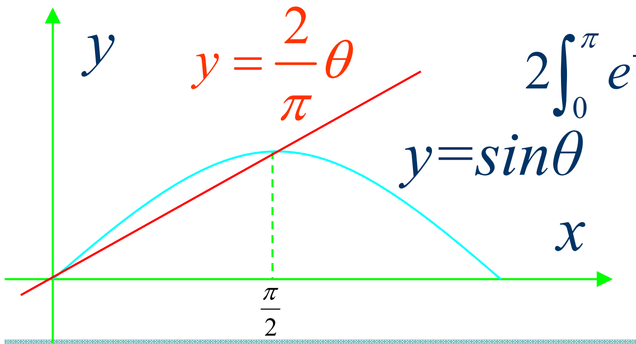
$$|R(z)| = \frac{1}{|z|^{m-n}} \frac{|1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}|}{|1+b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}|} \le \frac{1}{|z|^{m-n}} \frac{1+\boxed{|a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}|}}{1-\boxed{|b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}|}}$$

当$|z|$足够大时

$$\frac{|b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}|}{|a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}|} < \frac{1}{10} \qquad |R(z)| < \frac{2}{|z|}$$

在R足够大的C_R上

$$\left|\int_{C_R} R(z)e^{aiz}dz\right| \le \int_{C_R} |R(z)|\left|e^{aiz}\right| ds \le \frac{2}{R}\int_{C_R} e^{-ay}ds$$



$$2\int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta}d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\theta}d\theta \le 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\frac{2\theta}{\pi}}d\theta = \frac{2\pi}{aR}(1-e^{-aR})$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} R(z)e^{aiz}dz = 0$$

留数在定积分中的应用（II）

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{aix}dx = 2\pi i\sum \mathrm{Re}\,s[R(z)e^{aiz}, z_k]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos ax dx = \mathrm{Re}\left[2\pi i\sum \mathrm{Re}\,s[R(z)e^{aiz}, z_k]\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin ax dx = \mathrm{Im}\left[2\pi i\sum \mathrm{Re}\,s[R(z)e^{aiz}, z_k]\right]$$

❖ **Note：** z_k为$R(z)$位于上半平面的极点

留数在定积分中的应用（II）

❖例2 计算积分 $\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx$

- [解]显然，
  - ***a*=1，满足*a*>0**
  - ***R*(*x*)是*x*的有理函数**
  - ***m*=2，*n*=1，*m*-*n*=1**
  - ***R*(*z*)在实轴上没有孤立奇点**

$$R(z)=\frac{z}{z^2+a^2}$$

$$z=\pm ai$$

$$z=ai>0$$

$$I=2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[R(z)e^{iz},ai]$$

$$\mathrm{Re}\,s[R(z)e^{iz},ai]=\lim_{z\to ai}(z-ai)\frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}=\lim_{z\to ai}\frac{ze^{iz}}{z+ai}=\frac{e^{-a}}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi e^{-a}}{2}$$

$$I=\pi ie^{-a}$$

留数在定积分中的应用（II）

❖总结：

I: $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$ 　　R (cosθ，sinθ)为 cosθ与 sinθ的有理函数

$2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$ 　z_k为$f(z)$在$|z|=1$以内的所有孤立奇点

II: $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$ 　　R (x)为x的有理函数，m-n≥2

$2\pi i\sum\mathrm{Res}[R(z),z_k]$ z_k为$R(z)$在上半平面的所有孤立奇点

III: $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{aix}dx$ 　　R (x)为x的有理函数，m-n≥1，a>0

$2\pi i\sum\mathrm{Res}[R(z)e^{aiz},z_k]$ 　z_k为$R(z)$在上半平面的所有孤立奇点

留数在定积分中的应用（II）

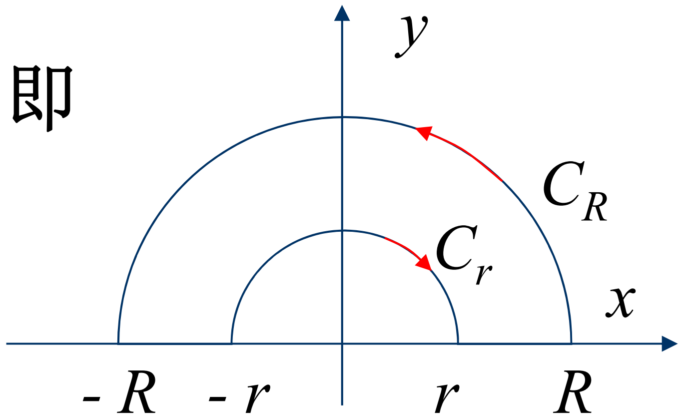
❖ 围道积分法

- **1.**<u>寻找解析函数***F(z)***：</u>使z取实数x时有$f(x)=F(z)$或 $Real[F(z)]$ $Imag[F(z)]$
- **2.**<u>构造积分路径C_R：</u>使积分区间两端及新曲线构成闭合路径，且$F(z)$在曲线及区域内除有限个孤立奇点外解析
- **3.**<u>求解复变函数积分$\int_{Cab} F(z)\,dz$</u>
- **4.**<u>利用留数定理求解定积分：</u>

$$\int_a^b f(x)dx = 2\pi i \sum \mathrm{Res}[F(z), z_k] - \int_{Cab} F(z)dz$$

- **Note：**<u>若实轴上有孤立奇点，需单独处理</u>

❖例3 计算积分 $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$



- [解]积分函数为偶函数，即

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

- 显然R(z)=1/z为z的有理函数，且m-n=1，可以用类型III的积分来求解，即令$F(z)=e^{iz}/z$
- 但R(z)在实轴上有孤立奇点z=0，因此不能直接用类型III定积分求解方式求解

留数在定积分中的应用（II）

❖由柯西-古萨基本定理知 $\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx=\int_{R}^{r}\frac{e^{-ix}}{x}dx=-\int_{r}^{R}\frac{e^{-ix}}{x}dx$

$$\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{r}^{R}\frac{e^{ix}}{x}dx=0$$

$$\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{r}^{R}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx=0 \quad \boxed{\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz}+\boxed{\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz}+2i\int_{r}^{R}\frac{\sin x}{x}dx=0$$

$$\left|\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz\right|\le\int_{C_R}\frac{\left|e^{iz}\right|}{|z|}ds=\frac{1}{R}\int_{C_R}e^{-y}ds=\int_{0}^{\pi}e^{-R\sin\theta}d\theta=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin\theta}d\theta$$

$$\le 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\left(\frac{2\theta}{\pi}\right)}d\theta=\frac{\pi}{R}(1-e^{-R})$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=0$$

留数在定积分中的应用（II）

❖将积分函数展开成级数形式可知

$$\frac{e^{iz}}{z}=\frac{1}{z}+\boxed{i-\frac{z}{2!}+\cdots+\frac{i^n z^{n-1}}{n!}+\cdots}$$

$$=\frac{1}{z}+\varphi(z)$$

Φ(z)解析->连续->有界

$$\varphi(0)=i$$

当|z|足够小时, $|\varphi(z)|\leq 2$

$$\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{C_r}\frac{1}{z}dz+\int_{C_r}\varphi(z)dz$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\varphi(z)dz=0$$

$$\int_{C_r}\frac{1}{z}dz=\int_{\pi}^{0}\frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta=-i\pi$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz=-\pi i$$

留数在定积分中的应用（II）

$$-\pi i + 2i\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = 0$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

- 该积分在研究阻尼振动中有广泛用途

❖作业：

- **P185：**
  - **13：（5）、（6）**
  - **14**


Let's have a rest!

复 习

- 级数(6学时)
  - 内容：复数项级数的概念及敛散性的判别方法；幂级数的概念及性质，确定幂级数收敛半径及收敛域的方法；泰勒(Taylor)级数；洛朗(Laurent)级数。
  - 1. 基本要求
    - (1) 理解复数项级数收敛、发散及绝对收敛的概念。
    - (2) 了解幂级数收敛的阿贝尔定理及幂级数收敛圆的概念，了解幂级数在收敛圆内的性质，掌握幂级数收敛半径的求法。
    - (3) 理解泰勒定理，记住几个主要的初等函数的泰勒展开式，并能利用他们把一些简单的初等函数展开为泰勒级数。
    - (4) 理解洛朗定理，并能将简单的解析函数在其孤立奇点的解析圆环域内展开为洛朗级数。

复 习

2. 重点、难点

- 重点：幂级数收敛性，函数展开为幂级数或洛朗级数
- 难点：解析函数在其孤立奇点的解析圆环域内展开为洛朗级数

3. 说明

- 解析函数展开为洛朗级数是研究解析函数在其孤立奇点邻域内的性质与计算留数的有效方法，是下一章计算围线积分的基础。

复 习

- 留数(6学时)
  - 内容：孤立奇点的分类及其判别方法，函数的零点与极点的关系；留数的定义、留数定理及留数的计算规则；留数在定积分计算上的应用
  - 1. 基本要求
    - (1) 了解孤立奇点的概念、分类及判别方法，掌握解析函数在孤立奇点邻域内的性态
    - (2) 理解函数在孤立奇点留数的概念，掌握计算留数的方法
    - (3) 理解留数定理，掌握用留数计算围线积分的方法。
    - (4) 能用留数计算3种实变量积分

2. 重点、难点

- 重点：孤立奇点的分类及判别，留数定理及用留数计算围线积分
- 难点：极点处留数的求法

说明

- 留数定理是积分理论的继续和发展，在理论研究和实际应用中具有重要的意义

❖ 复数项级数

- 复数列的极限 $\{\alpha_n\}$收敛 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$收敛，$\{b_n\}$收敛
  $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$
- 复级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$

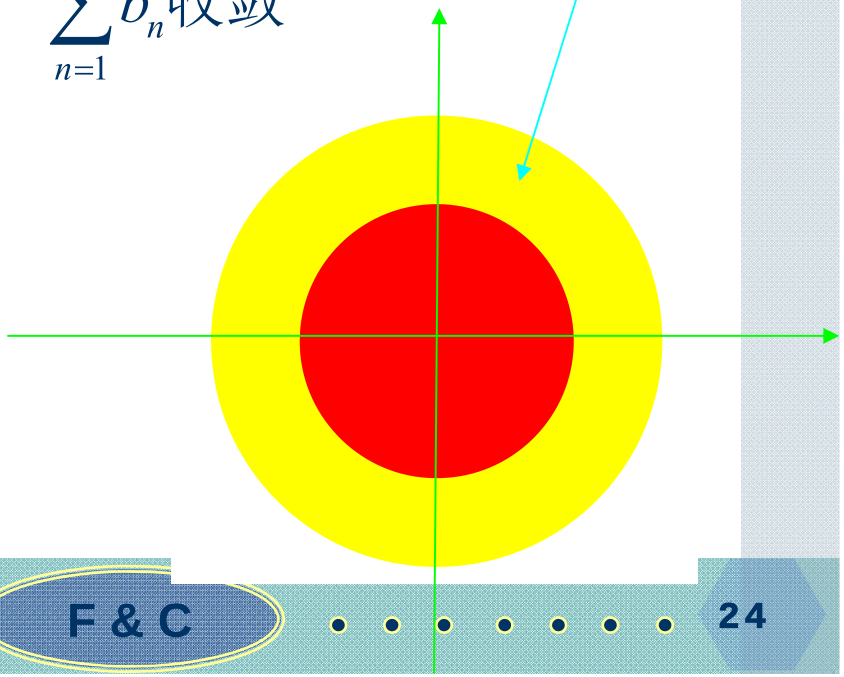
$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{收敛} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{收敛},\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{收敛}$$

$\{s_n\}$

❖ 幂级数

- 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$
- 收敛园与收敛半径

收敛园



❖复数项级数敛散性判断：

$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

否

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$不收敛

是

若α_n不易分解为
$\alpha_n = a_n + ib_n$

若α_n易分解为$\alpha_n = a_n + ib_n$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$收敛

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$收敛

幂级数收敛半径的求法

- 比值法 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda \neq 0 \Rightarrow R = \frac{1}{\lambda}$
- 根植法 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \mu \neq 0 \Rightarrow R = \frac{1}{\mu}$

幂级数的运算性质

- 代数运算性质
- 复合运算性质
- 分析运算性质
  - 1）它的和函数 $f(z)$是收敛圆：$|z-a|<R$内的解析函数
  - 2）$f(z)$在收敛圆内可逐项求导、逐项积分

级 数

❖将函数$f(z)$展开成一般项为$c_n(z-a)^n$幂级数的步骤:

- **Step1**：将函数$f(z)$作代数变形，使之分母出现z-a；
- **Step2**：再将其按照展开式为已知函数$\frac{1}{1-\zeta}=\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^n,(|\zeta|<1)$

  的形式写成 $\frac{1}{1-g(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}[g(z)]^n,(|g(z)|<1)$
- **Step3**：将 $\frac{1}{1-\zeta}$ 展开式中的 ζ换成 $g(z)$即可。

级 数

❖ 泰勒展开式 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

- 右端的级数称为$f(z)$在z_0的泰勒级数

❖ 泰勒展开定理

- 设函数$f(z)$在区域D内解析，z_0为D内的一点，d为z_0到D的边界上各点的最短距离，则当$|z-z_0|<d$时，下式成立

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

$$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

级 数

❖ 泰勒级数求解方法

- 直接法

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

- 间接展开法
  - 利用已知函数的幂级数展开式以及幂级数运算性质和分析性质，依据唯一性确定泰勒展开
  - 变量代换法
  - 逐项积分法
  - 逐项求导法
- 待定系数法

级 数

- 双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$
  - 在圆环域内收敛，且在收敛圆环域内其和函数解析，可以逐项求导和逐项积分
- 洛朗级数 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$
  - 在圆环域 内处处解析的函数必能展成洛朗级数
    - ***Note*1**：z_0为洛朗级数一般项的奇点，但不一定是函数**f(z)**的奇点；
    - ***Note*2**：给定复平面内一点z_0，则 在以z_0为中心的
      - 一个解析环域内洛朗展开式是唯一
      - 不同解析环域内洛朗展开不唯一
    - ***Note*3**：洛朗展开式的收敛园环域的圆周上必有***f(z)*** 的奇点

❖洛朗级数与泰勒级数

- 在圆域 $|z-z_0|< R$ 内解析的函数可在z_0展开成泰勒级数
- 在圆环域 $R_1<|z-z_0|< R_2$ 内解析的函数可在z_0展开成洛朗级数
  - 若函数在$|z-z_0|< R_2$内解析，则洛朗级数变成泰勒级数，即泰勒级数是洛朗级数的特殊形式

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1} f(\zeta)\left(\zeta - z_0\right)^{n-1} d\zeta = 0$$

❖洛朗级数展开的方法：

- 直接法：通过定义求解
- 间接法：通过间接方法展开

❖洛朗级数的应用：

- 若C为圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$ 内的任意一条简单闭曲线，且$f(z)$在圆环域内解析

$$\oint_C f(\zeta)d\zeta = 2\pi i c_{-1}$$

留　数E

- 孤立奇点
- 若$f(z)$在z_0解析,z_0为函数<u>$f(z)$的m级零点</u>的充要条件：
  - $f^{(n)}(z_0)=0$，($n=0,1,2,\ldots,m-1$)
  - $f^{(m)}(z_0)\neq 0$

奇点类型	洛朗级数	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$	零点<=>极点
可去奇点	$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$	存在且有限：c_0	
M级极点	$f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$	∞	$f(z)=(z-z_0)^{-m}g(z)$ 若z_0为函数$1/f(z)$的m级零点，则z_0为函数$f(z)$的m级极点
本性奇点	$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$	不存在且不为∞	

留 数

- 若函数$f(z)$在无穷远点 $z=\infty$的去心领域$R<|z|<+\infty$内解析，则称点∞为$f(z)$的孤立奇点
  - 作变换 $t = 1/z$
    - 将去心领域$R<|z|<+\infty$内对函数$f(z)$的研究化为在去心领域$0<|t|<1/R$内对函数$\varphi(t)$的研究
    - 显然$\varphi(t)$在去心领域$0<|t|<1/R$解析，$t=0$为函数$\varphi(t)$的孤立奇点
  - 若 $t=0$是$\varphi(t)$的可去奇点、m级极点或本性奇点，则称点$z=\infty$是$f(z)$的可去奇点、m级极点或本性奇点

留 数

- 若级数在无穷远点展开的洛朗级数
  - 不含正幂项
  - 含有限多正幂项，且z^m为最高正幂
  - 含无限多正幂项
- 则$z=\infty$是$f(z)$
  - 可去奇点 ← 存在且有限
    - 此时可认为$f(z)$在∞解析，取 $f(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$
  - m级极点 ← ∞
  - 本性奇点 ← 不存在且不为∞
- 同样通过孤立奇点的极限亦可判断其分类 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$

留 数

- 留数及留数定理
- 留数计算
- 在无穷远点的留数
- 留数在定积分中的应用