矩 阵 论

主讲教师：徐乐

2014年12月10日星期三

上讲回顾

- 第16讲 Penrose广义逆的性质
  - {1}-逆的性质
  - {1}-逆与{1，2}-逆

{1}−逆的性质

- 引理：$\mathrm{rank}(AB) \le \min\ (\mathrm{rank}A, \mathrm{rank}\ B\ )$

- 定理
  - 设 $A \in C^{m\times n}, B \in C^{n\times P}$ $\lambda \in C$, $\lambda^{\dagger} = \begin{cases} \lambda^{-1} & \lambda \ne 0 \\ 0 & \lambda = 0 \end{cases}$

$\boxed{\mathrm{rank}(A^{(1)}) \ge \mathrm{rank}A}$ $\boxed{(A^{(1)})^H \in A^H\{1\}}$ $\boxed{\lambda^{\dagger}A^{(1)} \in (\lambda A)\{1\}}$

  - 则 $\boxed{T^{-1}A^{(1)}S^{-1} \in (SAT)\{1\}\ ,\ (S \in C_m^{m\times m}, T \in C_n^{n\times n})}$

{1}-逆的性质

- $AA^{(1)}$和$A^{(1)}A$均为幂等矩阵且与A同秩 $(P^2 = P)$
- $R(AA^{(1)}) = R(A), \quad N(A^{(1)}A) = N(A), \quad R((A^{(1)}A)^H) = R(A^H)$
- $$A^{(1)}A = I_n \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = n$$
  $$AA^{(1)} = I_m \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = m$$
- $$AB(AB)^{(1)}A = A \Leftrightarrow \operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(A)$$
  $$B(AB)^{(1)}AB = B \Leftrightarrow \operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(B)$$
- 定理
  - 矩阵A当且仅当A 为满秩方阵时具有唯一的{1}逆 $A^{(1)} = A^{-1}$

{1}-逆与{1，2}-逆

❖ 定理1

- 设 $Y, Z \in A\{1\}$, 则 $YAZ \in A\{1，2\}$

❖ 定理 2

- 给定矩阵A及 $Z \in A\{1\}$, 则 $Z \in A\{1，2\}$的充要条件是 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(Z)$

- **{1}-逆与{1，2，3}-逆、{1，2，4}-逆**
- 关于**A**$^+$
- 广义逆的计算
  - 由**Hermite**标准形求**{1}-**逆
  - 由满秩分解求广义逆
- 投影矩阵与**Moore-Penrose**逆
  - 投影算子与投影矩阵
  - 正交投影算子与正交投影矩阵
  - 投影矩阵与广义逆矩阵

❖引理：对任意矩阵A均有

- $\mathrm{rank}(A^H A) = \mathrm{rank}A = \mathrm{rank}(AA^H)$
  - 证明 $\forall x \in N(A) \Rightarrow Ax=0 \Rightarrow A^H Ax=0$

$\boxed{N(A) \subseteq N(A^H A)}$

$\forall x \in N(A^H A) \Rightarrow x^H A^H Ax=0=(Ax)^H(Ax) \Rightarrow Ax=0 \Rightarrow \boxed{N(A^H A) \subseteq N(A)}$

$\boxed{N(A^H A) = N(A)}$

$A^H A$ 与 A 的列数均为 $n \Rightarrow \boxed{\dim N(A)=n-\mathrm{rank}A}$，$\boxed{\dim N(A^H A)=n-\mathrm{rank}(A^H A)}$

$\boxed{\mathrm{rank}(A^H A)=\mathrm{rank}A}$

$\boxed{A \leftrightarrow A^H} \Rightarrow \boxed{\mathrm{rank}(AA^H)=\mathrm{rank}A^H=\mathrm{rank}A}$

❖定理3： 给定矩阵A，则

$$Y=(A^HA)^{(1)}A^H\in A\{1,2,3\}$$

$$Z=A^H(AA^H)^{(1)}\in A\{1,2,4\}$$

- 证明 显然 $R(A^HA)\subseteq R(A^H)$ 由引理可知 $R(A^HA)=R(A^H)$

$$\Downarrow$$

$A=U^HA^HA \Longleftarrow$ 存在 U 使 $A^H=A^HAU$

$$\Downarrow$$

$AYA=(U^HA^HA)[(A^HA)^{(1)}A^H]A\overset{(i)}{=}U^HA^HA=A$ 满足(i)

$$\Downarrow$$

$$\boxed{Y\in A\{1\}}$$

{1}-逆与{1，2，3}-逆、 {1，2，4}-逆

$Y\in A\{1\}$ → $\mathrm{rank}Y\geq \mathrm{rank}A$ → $\boxed{\mathrm{rank}Y=\mathrm{rank}A}$

$$\mathrm{rank}Y=\mathrm{rank}\left(\left(A^{H}A\right)^{(1)}A^{H}\right)\leq \mathrm{rank}A^{H}=\mathrm{rank}A$$

$\boxed{Y\in A\{1,2\}}$

$$AY=(U^{H}A^{H}A)(A^{H}A)^{(1)}A^{H}=U^{H}A^{H}A(A^{H}A)^{(1)}A^{H}AU$$

$$=U^{H}(A^{H}A)U=(AY)^{(H)}$$ → $\boxed{Y\in A\{3\}}$

$\boxed{Y\in A\{1,2,3\}}$

关于A^+

❖定理4：给定矩阵A $A^+ = A^{(1,4)}AA^{(1,3)}$

- 证明：

$$\boxed{A^{(1,4)}AA^{(1,3)} \overset{\Delta}{=} X} \in A\{1,2\} \leftarrow \boxed{\text{定理 1}}$$

$$AX = \boxed{A\,A^{(1,4)}\,A}A^{(1,3)} \overset{i}{=} \boxed{A}A^{(1,3)} \overset{iii}{=} (AA^{(1,3)})^H = (AX)^H$$

AZA=A

$$XA = A^{(1,4)}\boxed{AA^{(1,3)}\,A} \overset{i}{=} A^{(1,4)}\boxed{A} \overset{iv}{=} (A^{(1,4)}A)^H = (XA)^H$$

AZA=A

$$\boxed{X \in A\{1,2,3,4\} = A^+}$$

关于A^+

❖定理5： 给定矩阵A，则

(1) $\text{rank}\,A^+ = \text{rank}A \Longrightarrow A^+ \in A\{1,2\} \Longrightarrow \text{rank}\,A^+ = \text{rank}A$

Penrose 方程中 (i)↔(ii), (iii)↔(iv) 互为对称

(2) $(A^+)^+ = A \Longrightarrow (A^+)^+ = A$

(3) $(A^H)^+ = (A^+)^H$, $(A^T)^+ = (A^+)^T$

直接采用四个方程验证

(4) $(A^H A)^+ = A^+(A^H)^+$, $(A\ A^H)^+ = (A^H)^+ A^+$

(5) $A^+ = (A^H A)^+ A^H = A^H (AA^H)^+$

(6) $R(A^+) = R(A^H), N(A^+) = N(A^H)$

关于A+

- 证明：(5) $\boxed{A^+ = (A^H A)^+ A^H} = A^H (AA^H)^+$
  - 令 $X=(A^H A)^+ A^H$
  - 由定理3知 $\Rightarrow$ $\boxed{X \in A\{1,2,3\}}$
  - 显然$(A^H A)^+$是 $(A^H A)^{(4)}$

$$XA=(A^H A)^+ A^H A = ((A^H A)^+ A^H A)^H = (XA)^H$$

$$\boxed{\Rightarrow X \in A\{1,2,3,4\}}$$

另式同理可证

关于A^+

- 证明 (6) $R(A^+)=R(A^H), N(A^+)=N(A^H)$

$$R(A^+) \overset{(5)}{=} R(A^H(AA^H)^+) \subseteq R(A^H)$$

$$\mathrm{rank}\,A^+ = \mathrm{rank}A = \mathrm{rank}A^H$$

$$R(A^+)=R(A^H)$$

$$N(A^+)=N(A^H)$$

$$N(A^+) = N((A^HA)^+A^H) \supseteq N(A^H)$$

关于A+

❖推论1 若 $A \in C_n^{m\times n}$(列满秩矩阵)，则 $A^+ = (A^H A)^{-1} A^H$

$A \in C_m^{m\times n}$(行满秩矩阵)，则 $A^+ = A^H (AA^H)^{-1}$

❖推论2 对非零列向量 α， $\alpha^+ = \left(\alpha^H \alpha\right)^{-1} \alpha^H$

对非零行向量 β， $\beta^+ = \beta^H \left(\beta\beta^H\right)^{-1}$； $\alpha^H\alpha, \beta\beta^H$ 均为数

❖Note A,B 可逆，则 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$，但一般 $(AB)^+ \neq B^+ A^+$

由Hermite标准形求{1}-逆

- 任何矩阵都可由初等行变换化为**Hermite**标准形
  - 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}_r^{m \times n}$
  - 存在满秩矩阵 $\mathbf{E} \in \mathbf{C}_m^{m \times m}$
  - 使**EA=B**（**Hermite**标准形）
  - 采用置换矩阵**P** $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{l_1} & \mathbf{e}_{l_2} & \cdots & | & \text{其它}\mathbf{e}_i \end{bmatrix}_{n \times n}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} \Longleftarrow \mathbf{EAP} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

由Hermite标准形求{1}-逆

❖ 求{1}-逆的方法

$$A = E^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$A\{1\} = \left\{ P\begin{bmatrix} I_r & M \\ N & L \end{bmatrix}_{n\times m} E \,\middle|\, KN = 0 \right\}$$

取阶数合适的M、L

▪ [证明]令 $X = P\begin{bmatrix} I_r & M \\ N & L \end{bmatrix}E$

$$\boxed{x = A\{1\}}$$

$$AXA = E^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}P\begin{bmatrix} I_r & M \\ N & L \end{bmatrix}EE^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$= E^{-1}\begin{bmatrix} I_r + KN & M + KL \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$= E^{-1}\begin{bmatrix} I_r + KN & (I_r + KN)K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1} = E^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1} = A$$

由Hermite标准形求{1}-逆

❖求{1，2}-逆的方法

$$A\{1,2\}=\left\{P\begin{bmatrix} I_r & M \\ N & L \end{bmatrix}_{n\times m}E \,\middle|\, KN=0, L=NM\right\}$$

- [证明]

$$X=P\begin{bmatrix} I_r & M \\ N & L \end{bmatrix}E\in A\{1\} \Longleftrightarrow X\in A\{1,2\}$$

P 、 E 为满秩方阵

$$\mathrm{rank}X=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} I_r & M \\ N & L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_r & M \\ N & L \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} I_r & M \\ 0 & L-NM \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}X=\mathrm{rank}A$$

$$\mathrm{rank}A=r$$

$$L-NM=0$$

$$L=NM$$

由满秩分解求广义逆

- 对A进行满秩分解

$$A = FG,\quad A \in C_r^{m\times n},\quad F \in C_r^{m\times r},\quad G \in C_r^{r\times n}$$

- [定理]

（1） $G^{(i)}F^{(1)} \in A\{i\}$ $\quad i = 1,2,4$

（2） $G^{(1)}F^{(i)} \in A\{i\}$ $\quad i = 1,2,3$

$F^{(1)}F = GG^{(1)} = I_r$

Penrose方程

（3） $G^{(1)}F^{+} \in A\{1,2,3\}$， $G^{+}F^{(1)} \in A\{1,2,4\}$

（4） $A^{+} = G^{+}F^{(1,3)} = G^{(1,4)}F^{+}$

（5） $A^{+} = G^{+}F^{+} = G^{H}(GG^{H})^{-1}(F^{H}F)^{-1}F^{H} = G^{H}(F^{H}AG^{H})^{-1}F^{H}$

❖投影

- 设L，M为C^n的子空间并构成直和$L+M=L\oplus M=C^n$
  - 即 $\forall x\in C^n$，$\exists$唯一的$y\in L, z\in M$ 使 $x=y+z$
  - 称 y为x沿着M到L的投影

❖定义

- 将任意 $x\in C^n$ 变为其沿着M到L的投影的变换称为沿着M到L的投影算子，记为$P_{L,M}$
  - 即 $P_{L,M}\ x=y\in L$
  - 投影算子是线性变换，其矩阵称为投影矩阵,仍记为$P_{L,M}$

❖引理

- 设n阶方阵E为幂等矩阵，则N(E)=R(I-E)
  - 证明

$E^2=E$

$E(I-E)=O$

$\forall x\in C^n, E[(I-E)x]=0$

$E[R(I-E)]=0$

$R(I-E)\subseteq N(E)$

$N(E)=R(I-E)$

$N(E)\subseteq R(I-E)$

$x=Ix-O=Ix-Ex=(I-E)x\in R(I-E)$

$\forall x\in N(E)$

$Ex=0$

❖定理

- n阶方阵P成为投影矩阵的充要条件是P为幂等矩阵
  - 充分性证明：

$P^2=P$

$\forall x\in C^n$,令$y=Px\in R(P), z=(I-P)x\in R(I-P)=N(P)$

若 $R(P)\cap N(P)=\{0\}$,则$P=P_{R(P),N(P)}$确为投影矩阵

$\forall x\in R(P)\cap N(P)$

$x\in R(P), \exists u\in C^n, x=Pu$

$x\in N(P)\Rightarrow Px=0$

$Px=P^2u=Pu=x\Rightarrow x=0$

$R(P)\cap N(P)=\{0\}$

P成为投影矩阵

- 必要性证明： $\boxed{P = P_{L,M}}$

$$\forall x \in C^n，\exists\text{唯一分解}\ \ y \in L, z \in M$$

$$x = y + z\text{且}\ \ Px = y$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x \in L, P_{L,M}x=y \\ x \in M, P_{L,M}x=0 \end{array}}$$

$$\boxed{P^2x = Py = y = Px} \xrightarrow{x\text{任意}} P^2 = P$$

即证

❖投影矩阵的构造

- 设已知C^n的子空间L、M构成直和 $L\oplus M=C^n$
  - 设L为*r*维子空间,则M为*n-r*维子空间,下面构造$P_{L,M}$
    - 取L的一个基 $\{x_1, x_2 \dots x_r\}$，M的一个基为 $\{y_1, y_2 \dots y_{n-r}\}$
    - 由直和关系知 $\{x_1, x_2 \dots x_r; y_1, y_2 \dots y_{n-r}\}$构成$C^n$的一个基
      - 令 $X=[x_1, x_2 \dots x_r]$，$Y=[y_1, y_2 \dots y_{n-r}]$
      - 则$[X\ \ Y]$为可逆方阵
    - 由投影矩阵性质可知
      - $x_i\in L\rightarrow P_{L,M}x_i=x_i; y_i\in M\rightarrow P_{L,M}y_i=0$
      - 即 $P_{L,M}[X\ Y]=[X\ O]\rightarrow P_{L,M}=[X\ O][X\ Y]^{-1}$
    - $P_{L,M}$的秩为r $\boxed{\operatorname{rank}(P_{L,M})=\dim R(P_{L,M})=\dim L}$

正交投影算子与正交投影矩阵

❖ 正交投影算子与正交投影矩阵

- 正交补空间
  - L为C^n的子空间，其正交补空间为

$$L^{\perp}=\left\{x \middle| (x,\ y)=0, x\in C^n, y\in L\right\}$$

- 定义
  - 设L是C^n的子空间，则称沿着$L^{\perp}$到L的投影算子为正交投影算子，简记为P_L
  - 正交投影算子的矩阵称为正交投影矩阵，仍记为P_L

❖引理(1)

- 对n阶方阵A，$\forall x \in C^n$ 均有 $\boxed{x^H A x = 0}$ 则 A=0
  - [证明]令 $A = (a_{ij})_{n\times n}$
  - 取 $x = \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 \cdots \underset{\text{第i个}}{1} \cdots 0 \end{bmatrix}^T$
  - 取 $x = \begin{bmatrix} 0 \cdots 0, & \xi_i, 0 \cdots 0, & \xi_j, 0 \cdots 0 \end{bmatrix}^T$ （$i \neq j$）

$\boxed{x^H A x = a_{ii} = 0}$

$\boxed{x^H A x = \overline{\xi_i} a_{ij} \xi_j + \overline{\xi_j} a_{ji} \xi_i}$ $\boxed{x^H A x = \overline{\xi_i} a_{ij} \xi_j + \overline{\xi_j} a_{ji} \xi_i + \overline{\xi_i} a_{ii} \xi_i + \overline{\xi_j} a_{jj} \xi_j}$

– 取 $\begin{cases} \xi_i = \xi_j = 1 \\ \xi_i = 1, \xi_j = \sqrt{-1} \end{cases}$

$\boxed{a_{ij} + a_{ji} = 0}$

$\boxed{a_{ij} - a_{ji} = 0}$

$\boxed{a_{ij} = a_{ji} = 0}$

$\boxed{A = 0}$

❖引理(2)

- $N(P^H) = R^{\perp}(P)$
  - [证明] $\forall x \in N(P^H) \longrightarrow P^H x = 0 \longrightarrow x^H P = 0$

    $x^H P = 0 \Downarrow$，$\forall y \in C^n \longrightarrow x^H(Py) = 0$

    $x^H(Py) = 0 \Downarrow x \perp R(P) \longleftarrow$ 由y的任意性

    $x \perp R(P) \longrightarrow \boxed{N(P^H) \subseteq R^{\perp}(P)}$

  - 设 $x \in R^{\perp}(P) \rightarrow \forall y \in C^n \rightarrow x^H(Py) = 0 \longrightarrow x^H P = 0$

    $x^H P = 0 \Downarrow P^H x = 0 \longrightarrow x \in N(P^H) \longrightarrow \boxed{N(P^H) \supseteq R^{\perp}(P)}$

$$\boxed{N(P^H) = R^{\perp}(P)}$$

正交投影算子与正交投影矩阵

❖充要条件

- **n**阶方阵**P**为正交投影矩阵充要条件是**P**为幂等厄米矩阵
  - [充分性证明]

$$\mathbf{P}^H = \mathbf{P} \qquad \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{R(p),\ N(p)}$$

投影矩阵充要条件

$$= \mathbf{P}_{R(p),\ N(p^H)}$$

引理(2)

$$= \mathbf{P}_{R(p),\ R^{\perp}(p)} = \mathbf{P}_{R(p)}$$

正交投影算子与正交投影矩阵

- [必要性证明] $\mathbf{P}=\mathbf{P}_L \xrightarrow{\text{投影矩阵充要条件}} \boxed{\mathbf{P}^2=\mathbf{P}}$

$$\forall \mathbf{x}\in \mathbf{C}^n, \exists \mathbf{y}=\mathbf{P}\mathbf{x}\in L, \mathbf{z}=(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{x}\in L^{\perp} \text{使} \mathbf{x}=\mathbf{y}+\mathbf{z}$$

$$\mathbf{x}^H\mathbf{P}^H(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{x}=0 \longleftarrow \mathbf{y}^H\mathbf{z}=0 \longleftarrow \mathbf{y}\in L, \mathbf{z}\in L^{\perp}$$

$$\boxed{\text{引理(1)}} \longrightarrow \mathbf{P}^H(\mathbf{I}-\mathbf{P})=0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{P}^H=\mathbf{P}^H\mathbf{P}=(\mathbf{P}^H\mathbf{P})^H=(\mathbf{P}^H)^H=\mathbf{P} \longrightarrow \boxed{\text{厄米矩阵}}$$

P为幂等厄米矩阵

❖正交投影矩阵的构造

- 取L的一个基 $\{x_1, x_2 \ldots x_r\}$，$L^{\perp}$的一个基为 $\{y_1, y_2 \ldots y_{n-r}\}$，则 $x_i^H y_j = 0$
- 令 $X=[x_1, x_2 \ldots x_r], Y=[y_1, y_2 \ldots y_{n-r}]$，则$X^H Y=0$

$$P_L = [X\ O]\boxed{[X\ Y]^{-1}} \xrightarrow{(A^{-1}=(A^H A)^{-1}A^H)} \boxed{\left\{[X\ Y]^H [X\ Y]\right\}^{-1}} [X\ Y]^H$$

$$\left\{[X\ Y]^H [X\ Y]\right\}^{-1} = \begin{bmatrix} X^H X & X^H Y \\ Y^H X & Y^H Y \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= [X\ O]\begin{bmatrix} X^H X & 0 \\ 0 & Y^H Y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X^H \\ Y^H \end{bmatrix}$$

$$= \left[X(X^H X)^{-1}\ \ O\right] \begin{bmatrix} X^H \\ Y^H \end{bmatrix} = X(X^H X)^{-1} X^H$$

❖Moore广义逆定义

- 设 $\boxed{A \in C^{m\times n}, X \in C^{n\times m}\text{且}AX = P_{R(A)},\quad XA = P_{R(X)}}$
  - 则X为A的Moore广义逆矩阵
  - 事实上，Moore广义逆矩阵正是A^+
    - [证明] 设矩阵A满足
    - 则

$$AXA = P_{R(A)}A = A$$
$$XAX = P_{R(X)}X = X$$
$$(AX)^H = \left(P_{R(A)}\right)^H = P_{R(A)} = AX$$
$$(XA)^H = \left(P_{R(X)}\right)^H = P_{R(X)} = XA$$

$\Rightarrow$ $\boxed{X=A^+}$

投影矩阵与广义逆矩阵

- 若X为A的Penrose广义逆，则

$$\left. \begin{array}{l} (AX)^2 = AXAX = AX \\ (AX)^H = AX \end{array} \right\} \Rightarrow \text{AX为正交投影矩阵}$$

$$\text{AX为正交投影矩阵} \Rightarrow AX = P_{R(AX)} \xrightarrow{R(AA^{(1)}) = R(A)} AX = P_{R(A)}$$

$$\left. \begin{array}{l} (XA)^2 = XAXA = XA \\ (XA)^H = XA \end{array} \right\} \Rightarrow \text{XA为正交投影矩阵}$$

$$\text{XA为正交投影矩阵} \Rightarrow XA = P_{R(XA)} \xrightarrow{R(XX^{(1)}) = R(X)} XA = P_{R(X)}$$