矩 阵 论

主讲教师：徐乐

2014年12月10日星期三

上讲回顾

- 第13讲 QR分解及满秩分解
  - 矩阵QR分解计算方法
  - 矩阵的满秩分解

求QR分解的方法

- [方法一]采用Givens方法
- [方法二]采用Householde方法
- [方法三] Gram-schmidt正交归一化方法

矩阵的满秩分解

定义

- 设 $A\in C_r^{m\times n}(r>0)$
  - 若存在矩阵 $F\in C_r^{m\times r}$ $G\in C_r^{r\times n}$
  - 使得A=FG
  - 称其为A的一个满秩分解
- **Note:**
  - F为列满秩矩阵，即列数等于秩
  - G为行满秩矩阵，即行数等于秩
  - 满秩分解不唯一 可逆方阵

$$F_1\in C_r^{m\times r}, G_1\in C_r^{r\times n}$$

$$\begin{aligned} A &= FG \\ &= F(DD^{-1})G \\ &= (FD)(D^{-1}G) \\ &= F_1G_1 \end{aligned}$$

$$\forall D\in C_r^{r\times r}$$

任何非零矩阵均存在满秩矩阵

矩阵的满秩分解

- 定义:设 $A \in C_r^{m\times n}(r>0)$
  - 若存在矩阵 $F \in C_r^{m\times r}$ $G \in C_r^{r\times n}$
  - 使得A=FG
  - 称其为A的一个满秩分解
- Note:
  - 满秩分解不唯一

$$A = \begin{bmatrix} & \cdot & \\ F & \cdot & S \\ & \cdot & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ \cdots\cdot \\ O \end{bmatrix} = FG$$

- 存在性定理
  - 任何非零矩阵均存在满秩矩阵

矩阵的满秩分解

❖Hermite标准形（行阶梯标准形）

- 设 $B \in C_r^{m\times n}\ (r>0)$
- 且满足
  - B的前r行中每一行至少含一个非零元素（称为非零行），且第一个非零元素为1，而后(m-r)行的元素全为零（称为零行）
  - 若B中第 i 行的第一个非零元素（即1）在第j_i列 (i=1,2,…,r)，则 $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$
  - 矩阵的第j_1列，第j_2列，…,第j_r列合起来恰为m阶单位方阵I_m的前r列（即j_1 , j_2 ,…, j_r列上除了前述的1外全为0）则称为Hermite标准形

$$B_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & j_1 & j_2 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times5} \end{array} \in C_2^{4\times5}$$

矩阵的满秩分解

❖满秩分解的一种求法

$$\boxed{A = FG}$$

- 设 $A \in C_r^{m\times n}$
  - 采用行初等变换将A化成**Hermite**标准形，其矩阵形式为E A＝B，其中B为**Hermite**标准形定义中给出的形状
  - 选取置换矩阵
    - 用P右乘任何矩阵（可乘性得到满足时），即可将该矩阵的第 j_i 列置换到新矩阵（即乘积矩阵）的第 i 列
    - 令 $P = [\underbrace{P_1}_{r列} \mid \underbrace{*}_{(n-r)列}]$ $\quad P_1 = [e_{j_1} \quad e_{j_2} \ldots e_{j_r}]_{n\times r} \in C_r^{n\times r}$
  - 令G＝B的前 r 行 $\in C_r^{r\times n}$ $\quad F = AP_1 \in C_r^{m\times r}$

- 酉对角分解
- 一般矩阵的奇异值分解

❖厄米矩阵的谱分解

- A 为厄米矩阵，则存在酉矩阵 U

$$U^H A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \Lambda$$

$$\boxed{A = U \Lambda U^H = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_i^H}$$

- 将 U 写成列向量形式

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}$$

❖非奇异矩阵的酉对角分解

定理

- 设 A 为 n 阶非奇异矩阵，则存在 n 阶酉矩阵 U 及 V，使得

$$U^H AV = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & O \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ O & & & & \sigma_n \end{bmatrix}, \quad \sigma_i > 0 (i = 1, 2, ..., n)$$

$$\boxed{A = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i u_i v_i^H}$$

- 若将 U、V 写成 $U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}$

酉对角分解

❖证明

- A^HA为n阶非奇异矩阵，且厄米、正定
- 故存在n阶酉矩阵V ,使得

$$V^H(A^HA)V=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & & & & O\\ & \sigma_2^2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ O & & & & \sigma_n^2\end{bmatrix}$$

A^HA的特征值

酉对角分解

- 令
$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & & O\\ & \sigma_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ O & & & & \sigma_n\end{bmatrix}$$

$$\boxed{V^H A^H A V=\Sigma^2}$$

- 令 $U^H=\Sigma^{-1}V^H A^H$

$$\boxed{U=AV\Sigma^{-1}}$$

$$U^H U=\Sigma^{-1}(V^H A^H A V)\Sigma^{-1}=I_n$$

U为酉矩阵

$$\boxed{U^H A V=\Sigma^{-1}V^H A^H A V=\Sigma}$$

证毕

酉对角分解

❖酉对角分解的求法

- 先对A^HA对角化（酉对角化）
- 求出变换矩阵V
- 再令 $U = AV\sum^{-1}$

$$A = U\sum V^H$$

❖ 定理：设 $A \in C_r^{m\times n}$

▪ 则存在m阶酉矩阵U及n阶酉矩阵V，使

$$U^H A V = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} \begin{matrix}\sigma_1 & & & 0\\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_r\end{matrix} & O \\ O & O \end{array}\right] & \begin{array}{l} r行 \\ \\ (m-r)行\end{array} \\ \begin{array}{cc} r列 & \quad (n-r)列\end{array} & \end{array}$$

$$A = U \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & O \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \sigma_r & \\ O & & & & O \end{bmatrix} V^H$$

一般矩阵的奇异值分解

证明

- 首先考虑 A^HA

$$A^HA \in C_r^{n\times n}$$

$$\mathrm{rank}(A^HA) = \mathrm{rank}(AA^H) = \mathrm{rank}A$$

- A^HA为厄米矩阵，存在n阶酉矩阵V，使

$$V^H(A^HA)V = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & O \\ & \sigma_2^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_r^2 & \\ O & & & & O \end{bmatrix}_{n\times n}$$

一般矩阵的奇异值分解

❖令

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & O \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \sigma_r \end{bmatrix} \qquad V = \begin{array}{cc} [V_1 & \mid \quad V_2] \\ r\text{列} & (n-r)\text{列} \end{array}$$

$$V^H(A^HA)V = \begin{bmatrix} V_1^H(A^HA)V_1 & V_1^H(A^HA)V_2 \\ V_2^H(A^HA)V_1 & V_2^H(A^HA)V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma^2 & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

令 $U_1 = AV_1\Sigma^{-1}$

$\boxed{\text{则 } U_1^H A V_1 = \Sigma}$

$\boxed{AV_2 = 0} \leftarrow (AV_2)^H(AV_2) = 0$

一般矩阵的奇异值分解

❖由基扩充定理可知,可在 U_1 的基础上构造酉矩阵 $U=[U_1|U_2]$，即 $U^HU=I$

❖则 $U_1^HU_1=I_r, U_1^HU_2=O_{r\times(n-r)}, U_2^HU_2=I_{n-r}$

❖故

$\boxed{U_1^HAV_1=\sum}$ $\boxed{AV_2=0}$

$$U^HAV=\begin{bmatrix}U_1^H\\U_2^H\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}V_1 & V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U_1^HAV_1 & U_1^HAV_2\\U_2^HAV_1 & U_2^HAV_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=U_2^H(U_1\sum)$$

$$=(U_2^HU_1)\sum$$

$$=0$$

奇异值分解的求法可按证明步骤求之

得证

Penrose 广义逆矩阵的定义及存在性

- 何谓广义
  - 即推广了原有概念或结果
- 逆矩阵一般概念
  - 针对非奇异的（或称为满秩的）方阵
  - 这一概念可推广到
    - （1）奇异方阵
    - （2）非方矩阵
    - 事实上，**Penrose**广义逆矩阵涵盖了两种情况

Penrose 广义逆矩阵的定义及存在性

❖对于满秩方阵A

- 存在A^{-1}
- 且$AA^{-1}=A^{-1}A=I$
- 则

$$
\begin{cases}
AA^{-1}A = A \\
A^{-1}AA^{-1} = A^{-1} \\
(AA^{-1})^H = AA^{-1} \\
(A^{-1}A)^H = A^{-1}A
\end{cases}
$$

这四个对满秩方阵显然成立的等式构成了Penrose广义逆的启示

Penrose 广义逆矩阵的定义及存在性

❖Penrose定义

- 设 $A \in C^{m\times n}$，若 $Z \in C^{n\times m}$ 且使如下四个等式成立

$$AZA = A,\quad ZAZ = Z,\quad (AZ)^H = AZ,\quad (ZA)^H = ZA$$

- 则称Z为A的Moore-Penrose(广义)逆
- 记为A^+
- 上述四个等式又依次称为Penrose方程（i—iv)

❖Moore-Penrose逆的存在性和唯一性

- 定理: 任给 $A \in C^{m\times n}$， $A^{\dagger}$ 均存在且唯一
  - 证明
    - 存在性 $\forall\ A \in C_r^{m\times n}$ 存在酉矩阵 $U \in C_m^{m\times m}$， $V \in C_n^{n\times n}$

$$A = UDV^H \Leftarrow U^H AV = D = \left[\begin{array}{cccc:c} \sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & 0 \\ & & & \sigma_r & \\ \hdashline & & 0 & & 0 \end{array}\right]_{m\times n}$$

$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_r^2$ 是 $A^H A$ 的全部非零特征值

Penrose 广义逆矩阵的定义及存在性

- 令 $Z = V\tilde{D}U^H \in C_r^{n\times m}$

$$\tilde{D} = \left[\begin{array}{cccc:c} \sigma_1^{-1} & & & & \\ & \sigma_2^{-1} & & & \\ & & \ddots & & 0 \\ & & & \sigma_r^{-1} & \\ \hdashline & & 0 & & 0 \end{array}\right]_{n\times m}$$

- 验证

$$AZA = A, \quad ZAZ = Z, \quad (AZ)^H = AZ, \quad (ZA)^H = ZA$$

Penrose 广义逆矩阵的定义及存在性

- i) $$AZA=(UDV^H)(V\tilde{D}U^H)(UDV^H)$$
$$=UD\tilde{D}DV^H=UDV^H=A$$

$$D\tilde{D}=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times m}$$

- ii) $$ZAZ=(V\tilde{D}U^H)(UDV^H)(V\tilde{D}U^H)$$
$$=V\tilde{D}D\tilde{D}U^H=V\tilde{D}U^H=Z$$

$$\tilde{D}D=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

- iii) $$(AZ)^H=[(UDV^H)(V\tilde{D}U^H)]^H$$
$$=(UD\tilde{D}U^H)^H=UD\tilde{D}U^H=AZ$$

$$AZ=UD\tilde{D}U^H$$

- iv) $$(ZA)^H=(V\tilde{D}DV^H)^H=V\tilde{D}DV^H=ZA$$

$$ZA=V\tilde{D}DV^H$$

$$\boxed{Z=A^{\dagger}}$$

Penrose 广义逆矩阵的定义及存在性

❖唯一性

- 设Z ,Y均满足四个Penrose方程，则

$$
\begin{aligned}
Z &= ZAZ = Z(AZ)^H = ZZ^H A^H \\
&= ZZ^H (AYA)^H = Z(AZ)^H (AY)^H = Z(AZ)(AY) \\
&= ZAY = (ZA)^H Y = A^H Z^H Y = A^H Z^H (YAY) \\
&= A^H Z^H (YA)^H Y = A^H Z^H A^H Y^H Y \\
&= (AZA)^H Y^H Y = A^H Y^H Y = (YA)^H Y \\
&= YAY = Y
\end{aligned}
$$

满足四个Penrose方程的Z是唯一的

Penrose 广义逆矩阵的定义及存在性

- **{*i,j,l*}逆的定义**
  - $\forall A \in C^{m\times n}$，若 $Z \in C^{n\times m}$
  - 且Z满足Penrose方程中的第 (i),(j),⋯,(l)个方程，则称Z为A 的{*i,j,l*}逆
  - 记为 $A^{(i,j,\cdots,l)}$
  - 其全体记为 $A\{i,j,\cdots,l\}$

作业

- **P225**
  - **1(2)，　2，　5**
- **P233**
  - **1**