矩 阵 论

主讲教师：徐乐

2014年12月10日星期三

上讲回顾

❖ 第12讲矩阵的QR分解

- Givens矩阵与Givens变换
- Householder矩阵与Householder变换
- QR分解

❖定义

- 设实数c与s满足 $c^2+s^2=1$

$$
T_{i,j}=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& c &&&& s &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&& \vdots && \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& -s &&&& c &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&& \vdots &&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right]\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow (i) \\ \\ \\ \\ \leftarrow (j) \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

由Givens矩阵所确定的线性变换称为Givens变换

Givens矩阵（初等旋转矩阵）

标记为

$$\boxed{T_{ij}=T_{ij}(c,s)}$$

Givens矩阵与Givens变换

❖性质

- （1） $\left[T_{ij}(c,s)\right]^{-1}=\left[T_{ij}(c,s)\right]^{T}=T_{ij}(c,-s)$ $\quad -s=-\sin(\theta)=\sin(-\theta)$

  $\det\left[T_{ij}(c,s)\right]=1$

- （2） $x=[\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_n]^T$ $\quad y=T_{ij}x=[\eta_1 \quad \eta_2 \quad \cdots \quad \eta_n]^T$

  选 $c=\dfrac{\xi_i}{\sqrt{\xi_i^2+\xi_j^2}}$， $s=\dfrac{\xi_j}{\sqrt{\xi_i^2+\xi_j^2}}$ $\quad \xi_i^2+\xi_j^2\neq 0$

  $$T_{ij}x=\left[\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \sqrt{\xi_i^2+\xi_j^2} \quad \cdots \quad 0 \quad \cdots \quad \xi_n\right]^T$$

Givens矩阵与Givens变换

❖ 定理1.

- 设 $\mathbf{x}=[\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_n]^T \neq 0$
- 存在有限个Givens矩阵的乘积T，使得 $\mathbf{Tx}=|\mathbf{x}|\mathbf{e}_1$

$$\boxed{\mathbf{e}_1=[1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T}$$

- 其中：
  - x为实数时 $|\mathbf{x}|=\sqrt{\|\mathbf{x}\|_2^2}=\sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$
  - x为复数时 $|\mathbf{x}|=\sqrt{\mathbf{x}^H\mathbf{x}}$

❖ 推论

- 对于任何非零列向量$x \in R^n$及任何单位列向量 $z(|z|=1)$
- 均存在着有限个Givens矩阵的乘积T
- 使得 $\mathbf{Tx}=|\mathbf{x}|\mathbf{z}$

Householder矩阵与Householder变换

- 平面直角坐标系中，将向量x关于e_1轴作镜像变换，则得到

$$y=\begin{bmatrix}\xi_1\\-\xi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{bmatrix}=\left(I-2e_2e_2^T\right)x=Hx$$

- 将其推广至n维，可定义
  - 设有单位列向量$u\in R^n$
    - 则称H=I-2uu^T为Householder矩阵（初等反射矩阵）
    - 由Householder矩阵所确定的线性变换（y=Hx）称为Householder变换

$\boxed{H^{-1}=H^T}$（正交）

$\boxed{H^T=H}$（实对称）

$\boxed{H^2=I}$（对合）

$\boxed{H^{-1}=H}$（自逆）

定理2

- 对任何非零列向量$x \in \boldsymbol{R}^n$及单位列向量$z \in \boldsymbol{R}^n$
- 存在**Householder**矩阵**H**，使得 $\mathbf{Hx} = |\mathbf{x}|\mathbf{z}$

$$\text{选 } \mathbf{u} = \frac{\mathbf{x} - |\mathbf{x}|\mathbf{z}}{|\mathbf{x} - |\mathbf{x}|\mathbf{z}|}$$

定理3

- 初等旋转矩阵（**Givens**矩阵）是两个初等反射矩阵的乘积

QR分解

❖定义

- 如果实（复）矩阵**A**可化为正交（酉）矩阵**Q**与实（复）上三角矩阵**R**的乘积
  - 即 $\mathbf{A}=\mathbf{QR}$
  - 则称上式为**A**的**QR**分解

❖定理

- 设**A**是**n**阶的非奇异矩阵，则存在正交（酉）矩阵**Q**与实（复）上三角矩阵**R**
  - 使得 $\mathbf{A}=\mathbf{QR}$
  - 且除去相差一个对角元素的绝对值（模）全为**1**的对角因子外，上述分解唯一

❖定理5

- 设A是m×n的实（复）矩阵，且其n个列线性无关，则A具有分解A=QR，其中
  - Q是m×n阶实（复）矩阵，且满足$Q^TQ=I(Q^HQ=I)$
  - R是n阶实（复）非奇异上三角矩阵
  - 除了相差一个对角元素的绝对值（模）全为1的对角阵因子外，上述分解唯一

第13讲 QR分解及满秩分解

- 矩阵**QR**分解计算方法
- 矩阵的满秩分解

❖求QR分解的方法

- [方法一]采用Givens方法
  - 将n阶非奇异矩阵A写为 $A=\begin{bmatrix} b^{(1)^T} \\ * \end{bmatrix}^T$
  - 存在有限个Givens矩阵的乘积T_1，使得

$$T_1 b^{(1)} = \left|b^{(1)}\right| e_1 \rightarrow T_1 A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A^{(1)} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

QR分解

- $\mathbf{A}^{(1)}$ 写成 $\mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{(2)^T} \\ * \end{bmatrix}^T \to$ 存在$\mathbf{T}_2$，使得

$$\mathbf{T}_2\mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{22}^{(2)} & \mathbf{a}_{23}^{(2)} & \cdots & \mathbf{a}_{2n}^{(2)} \\ \mathbf{0} & & & \\ \vdots & & \mathbf{A}^{(2)} & \\ \mathbf{0} & & & \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{A}^{(n-2)}$ 写成 $\mathbf{A}^{(n-2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{(n-1)^T} \\ * \end{bmatrix}^T \to$ 存在$\mathbf{T}_{n-1}$，使得

$$\mathbf{T}_{n-1}\mathbf{A}^{(n-2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{n-1,n-1}^{(n-1)} & \mathbf{a}_{n-1,n}^{(n-1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

QR分解

- 令 $$T=\begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & T_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{n-3} & 0 \\ 0 & T_{n-2} \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} I_{2} & 0 \\ 0 & T_{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_{2} \end{bmatrix}T_1$$
- 则

$$TA=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{n-1} \end{bmatrix}=R\rightarrow A=T^{-1}R=QR$$

- 其中
  - R为上三角矩阵
  - Q为正交矩阵

- [方法二]采用Householde方法

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}^{(1)} & *\end{bmatrix} \text{ 存在 } \mathbf{H}_1\text{，使得}$$

$$\mathbf{H}_1\mathbf{b}^{(1)}=\left|\mathbf{b}^{(1)}\right|\mathbf{e}_1 \rightarrow \mathbf{H}_1\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\left|\mathbf{b}^{(1)}\right|\mathbf{e}_1^n & \mathbf{A}^{(1)}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(1)}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}^{(2)} & *\end{bmatrix}\text{存在 } \mathbf{H}_2\text{，使得 } \mathbf{H}_2\mathbf{A}^{(1)}=\begin{bmatrix}\left|\mathbf{b}^{(2)}\right|\mathbf{e}_1^{n-1} & \mathbf{A}^{(2)}\end{bmatrix}\cdots$$

$$\mathbf{A}^{(n-2)}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}^{(n-1)} & \mathbf{b}^{(n)}\end{bmatrix}\text{存在 } \mathbf{H}_{n-1}\text{，使得 } \mathbf{H}_{n-1}\mathbf{A}^{(n-2)}=\begin{bmatrix}a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)}\\ 0 & a_{nn}^{(n-1)}\end{bmatrix}$$

QR分解

- 令 $S=\begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & H_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{n-3} & 0 \\ 0 & H_{n-2} \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} I_{2} & 0 \\ 0 & H_{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_{2} \end{bmatrix}H_1$

$$\boxed{H_u = I_{n-l} - 2uu^T (u \in R^{n-l}, u^T u = 1)}$$

$$\begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & H_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & I_{n-l} \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & uu^T \end{bmatrix} = I_n - 2\begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0^T & u^T \end{bmatrix} = I_n - 2vv^T$$

$$\boxed{(v \in R^{n-l}, v^T v = u^T u = 1)}$$

- 是n阶Householder矩阵
- 即S为有限个Householder矩阵的连乘积

- [方法三] **Gram-schmidt正交归一化方法**
  - 对于 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix}$
  - 各列向量线性无关可进行正交化

$$\mathbf{q}_1=\mathbf{a}_1/|\mathbf{a}_1| \qquad \mathbf{y}_1=\mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{q}_2=\frac{\mathbf{a}_2+\mathbf{k}_{21}\mathbf{q}_1}{|\mathbf{a}_2+\mathbf{k}_{21}\mathbf{q}_1|},\mathbf{k}_{21}=-\langle\mathbf{a}_2,\mathbf{q}_1\rangle \qquad \mathbf{y}_2=\mathbf{a}_2+\mathbf{k}_{21}\mathbf{q}_1$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{q}_l=\frac{\mathbf{a}_l+\sum_{j=1}^{l-1}\mathbf{k}_{lj}\mathbf{q}_j}{\left|\mathbf{a}_l+\sum_{j=1}^{l-1}\mathbf{k}_{lj}\mathbf{q}_j\right|},\mathbf{k}_{lj}=-\langle\mathbf{a}_l,\mathbf{q}_j\rangle \qquad \mathbf{y}_l=\mathbf{a}_l+\sum_{j=1}^{l-1}\mathbf{k}_{lj}\mathbf{q}_j$$

$$q_i^H q_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \rightarrow Q = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n]，满足 Q^T Q = I$$

- 改写：

$$a_1 = q_1 |y_1|$$

$$a_2 = q_2 |y_2| - k_{21} q_1$$

$$\vdots$$

$$a_l = q_l |y_l| - \sum_{j=1}^{l-1} k_{lj} q_j$$

$$[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n] = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n] \begin{bmatrix} |y_1| & -k_{21} & -k_{31} & \cdots & -k_{n1} \\ & |y_2| & -k_{32} & \cdots & -k_{n2} \\ & & |y_3| & \cdots & \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & |y_n| \end{bmatrix}$$

$$= QR$$

❖定义

- 设 $A \in C_r^{m\times n} (r>0)$
  - 若存在矩阵 $F \in C_r^{m\times r}$ $G \in C_r^{r\times n}$
  - 使得A=FG
  - 称其为A的一个满秩分解
- Note:
  - F为列满秩矩阵，即列数等于秩
  - G为行满秩矩阵，即行数等于秩
  - 满秩分解不唯一 $\boxed{\text{可逆方阵}}$

$$\boxed{F_1 \in C_r^{m\times r}, G_1 \in C_r^{r\times n}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A &= FG \\ &= F(DD^{-1})G \\ &= (FD)(D^{-1}G) \\ &= F_1G_1 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\forall D \in C_r^{r\times r}}$$

❖存在性定理

- 任何非零矩阵均存在满秩矩阵
  - 证明：采用构造性证明方法
    - 设 $A \in C_r^{m\times n}$
    - 存在初等变换矩阵 $E \in C_m^{m\times m}$
    - 将A写成 $A=E^{-1}B$，把E^{-1}分块

$$EA = B = \begin{bmatrix} G \\ \cdots\cdots \\ O \end{bmatrix} \begin{array}{l} r\text{行} \\ \\ (m-r)\text{行} \end{array}, \quad G \in C_r^{r\times n}$$

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} \underset{r\text{列}}{F} & | & \underset{(m-r)\text{列}}{S} \end{bmatrix}, \quad F \in C_r^{m\times r}$$

$$A = \begin{bmatrix} F & \vdots & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ \cdots\cdots \\ O \end{bmatrix} = FG$$

矩阵的满秩分解

❖ **Hermite标准形（行阶梯标准形）**

- 设 $\mathbf{B} \in \mathbf{C}_r^{m\times n} \ (r>0)$
- 且满足
  - B的前r行中每一行至少含一个非零元素（称为非零行），且第一个非零元素为1，而后(m-r)行的元素全为零（称为零行）
  - 若B中第 i 行的第一个非零元素（即1）在第j_i列 (i=1,2,…,r)，则 $j_1<j_2<\ldots<j_r$
  - 矩阵的第j_1列，第j_2列，…,第j_r列合起来恰为m阶单位方阵I_m的前r列（即$j_1, j_2, \ldots, j_r$列上除了前述的1外全为0）则称为Hermite标准形

$$\begin{array}{ccccc} & & j_1 & j_2 & \\ \end{array}$$
$$B_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 5} \in C_2^{4\times 5}$$

❖满秩分解的一种求法

- 设 $A \in C_r^{m\times n}$
  - 采用行初等变换将A化成**Hermite**标准形，其矩阵形式为EA＝B，其中B为**Hermite**标准形定义中给出的形状
  - 选取置换矩阵
    - P的第i列为e_{j_i}，即该列向量除第j_i个元素为**1**外，其余元素全为零（i＝1，2，．．．，r）,其中j_i为**Hermite**标准形中每行第一个非零元素（即**1**）所在的列数
    - 其它（n－r）列只需确保P为置换矩阵即可（P的每一行，每一列均只有一个非零元素，且为**1**）

矩阵的满秩分解

- 用P右乘任何矩阵（可乘性得到满足时），即可将该矩阵的第 j_i 列置换到新矩阵（即乘积矩阵）的第 i 列
- 令 $\mathbf{P}=[\underbrace{\mathbf{P}_1}_{\text{r列}} \mid \underbrace{*}_{\text{(n−r)列}}]$ $\qquad \mathbf{P}_1=\left[\mathbf{e}_{j_1}\quad \mathbf{e}_{j_2}\dots\mathbf{e}_{j_r}\right]_{n\times r}\in \mathbf{C}_r^{n\times r}$

• 令 G＝B的前 r 行 $\in \mathbf{C}_r^{r\times n}$ $\qquad \mathbf{F}=\mathbf{A}\mathbf{P}_1\in \mathbf{C}_r^{m\times r}$

$$\boxed{\mathbf{A}=\mathbf{F}\mathbf{G}}$$

矩阵的满秩分解

❖证明

$$EA = B = \begin{bmatrix} G \\ O \end{bmatrix} \longrightarrow A = E^{-1}B = [F \;\; | \;\; S]\begin{bmatrix} G \\ O \end{bmatrix} = FG$$

$F \in C_r^{m\times r}$

$G \in C_r^{r\times n}$

$\boxed{G\text{已知，但}F = ?}$

- 可以通过求出E、E^{-1}再将E^{-1}分块得到F
  - 求解E^{-1}比较复杂
- 注意到 $BP_1 = \begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{AP_1 = E^{-1}BP_1 = [F \;\; | \;\; S]\begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix} = F}$

❖例2　求矩阵满秩分解

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

- 解
  - 首先求出 A 的秩
    - 显然，前两行互相独立，而第三行可由第一行减去第二行得到，故 $r=2$

矩阵的满秩分解

- 进行初等变换将 A 化为Hermite标准型

$$[A \mid I_3]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & . & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & . & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & . & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)-(1)+(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & . & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1)-(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & . & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & . & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & . & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

B

G

E

矩阵的满秩分解

- 求出 P$_1$ 及 A P$_1$

$$j_1 = 1, j_2 = 2$$

$$\boxed{F = AP_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \qquad P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 验证

$$FG = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- **P225**
  - **1(2)， 2， 5**